高等学校教学用书

积分方程論講义

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ 著
胡 祖 熾 譯

人民教育出版社

高等學校教學用書

積分方程論講義

I . [illegible]

胡祖 [illegible] [illegible]

人民教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的彼得羅夫斯基(И. Г. Петровский)所著"積分方程論講義"(Лекции по теории интегральных уравнений)的 1951 年修訂第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為國立大學數理系教科書。

原書與著者另著"常微分方程式論講義"及"偏微分方程講義"同在 1952 年獲得斯大林獎金。

本書為北京大學胡祖熾譯。

积分方程論讲义

И. Г. 彼得羅夫斯基著

胡祖熾譯

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山東街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京發行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·120 开本 850×1168 1/32 印张 3 11/16

字数 92,000 印数 32,201—34,200 定价(6) ¥0.33

1954 年7月第1版 1963 年5月北京第12次印刷

著者爲中文譯本所寫序言

這些講義，我曾於1946年在莫斯科國立大學講授過。在編這些講義的過程中和後來爲了出版而進行的修訂工作中，我曾經盡力選擇了積分方程論裏最主要的與最基本的材料。對於我的這一工作，О. А. 阿列依尼克（Олейник）與А. Д. 米什吉士（Мышкис）給了許多幫助。

我高度重視，這本書能被譯成偉大中國人民的語文，並且如果這本書對於優秀的中國青年有用，那更使我感到愉快。

И. 彼得羅夫斯基

一九五三年四月二日於莫斯科

第一版序言

這些講義我曾在 1946 年於莫斯科國立大學講授過。原稿曾經亞力山得洛夫（П. С. Александров），蓋爾方特（И. М. Гельфанд）與米什吉士（А. Д. Мышкис）看過，他們提出了一系列很有價值的意見。在最後校訂工作中，我採用了這些意見，爲此，我熱誠地感謝他們。

И. 彼得羅夫斯基

一九四七年五月二十八日

第二版序言

在準備這一版的時候，我採用了蓋爾方特（И. М. Гельфанд），克拉起可夫斯基（С Крачковский），米亥林（С. Г. Михлин），米什吉士（А. Д. Мышкис）及阿列依尼克（О. А. Олейник）對第一版提出的意見。特別是阿列依尼克給了我很大的幫助。我熱誠地感謝這幾位同志。

И. 彼得羅夫斯基

一九五一年二月十四日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　錄

第一章　引論．富內德和蒙定理

§1. 定義．例題

若方程中未知函數包含在積分符號下面，這方程就叫做積分方程。特別，方程

$$a(x)\varphi(x)+f(x)=\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (1.1)$$

是含函數 $\varphi(x)$ 的積分方程。這裏 $a(x)$, $f(x)$ 及 $K(x,\xi)$ 都是已知函數，$\varphi(x)$ 則是未知函數。變數 x 及 ξ 都可取區間 (a,b) 上的一切數值。

本書只研究線性地包含着未知函數的方程，也就是只研究像(1.1)那樣的方程。它們叫做線性積分方程。若 $a(x)$ 恆不爲0，用 $a(x)$除方程(1.1)的兩端，就得到下列形狀的方程：

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+f(x). \qquad (2.1)$$

這種方程叫做第二種線性積分方程，或者按最早研究它的那位數學家的名字而叫它做富內德和蒙積分方程。若 $f(x)\equiv 0$，方程(2.1)就叫做齊次的。

若 $a(x)\equiv 0$，方程 (1.1) 就變成

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=f(x),$$

這種方程叫做第一種線性積分方程。

函數 $K(x,\xi)$ 叫做積分方程的核。

今後我們主要研究第二種線性積分方程。

我們可以研究所含未知函數不止依賴於一個自變數，而是依賴於多個自變數的積分方程。例如，包含未知函數 $\varphi(\xi,\eta)$ 的方程

$$\varphi(x,y)=\int_G K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+f(x,y)$$

就是這種積分方程。這裏的積分展佈在 (ξ,η) 平面的區域 G 上。這方程可寫作

$$\varphi(P)=\int_G K(P,Q)\varphi(Q)dQ+f(P),$$

這裏 $P\in G, Q\in G$❶。

我們還可以討論包含多個未知函數的積分方程組。

附註　在今後的討論中，除 §20 以外，即使不特別聲明，也假定點 P 或 Q 的函數都確定在一個 d 維區域 G 上。並且除掉可能在 G 上的有限個點、有限條平滑曲線、有限個平滑曲面、……及有限個平滑的 $(d-1)$ 維曲面上不連續而外，這些函數在 G 上其他各處都連續。在這些特殊的點、線、面上，函數可以無定義。我們假定區域 G 的邊界是由有限個平滑的 $(d-1)$ 維曲面所組成。若 $d=2$，它就由有限個平滑的弧線聯接而成。

在今後的討論中，除 §20 以外，若函數在 G 上連續，積分就是通常的意義。若函數在某些點、線、面上不連續，積分就要看成反常積分。所有研究到的函數都假定是絕對可積的。

§ 2. 導出線性積分方程的典型問題

考慮一條長度爲 l 的有彈性的絃線，這絃線容易改變它的形狀，

❶ 符號 $A\in M$ 的意義是點 A 屬於集合 M。

(我們假定，在一定限度以內不會受到任何阻力)，而將其長度增長 Δl 時，則要用力 $c\Delta l$，這裏 c 是常數[虎克(Hooke)定律]。設絃的兩端固定在在 x 軸上的兩個固定的點 A, B 上。設點 A 就是原點而 x 軸是水平的。當絃爲靜止又只受到水平張力 T_0 的作用，而張力 T_0 與其他考慮到的力比較起來很大時，絃的位置是水平的，就是說絃與 Ox 軸相重合。

假定在絃上 $x=\xi$ 的點 C 處施加鉛直方向的力 P。由於它的作用，絃成折線 ACB 的形狀(圖 1)。設 $CC_0=\delta$ 與 AC_0 及 C_0B 比較起來很

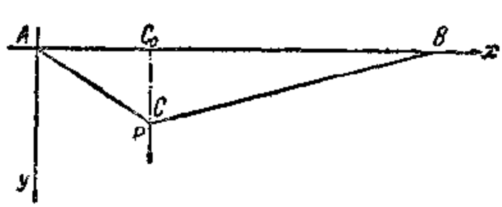

圖 1

小(這是由於 P 與 T_0 相較很小的結果)。與 l 相較，略去 δ 的平方不計，我們可以認爲在力 P 的作用下，絃的張力還是 T_0。把絃在 C 點的張力和力 P 都向鉛直方向投影，並且再一次略去包含 δ^2 的各項就得到

$$T_0\frac{\delta}{\xi}+T_0\frac{\delta}{l-\xi}=P,$$

所以
$$\delta=\frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

用 $y(x)$ 表示絃上橫座標是 x 的點的下垂，我們就得到

$$y(x)=PG(x,\xi),$$

這裏

$$\left.\begin{aligned} G(x,\xi)&=\frac{x(l-\xi)}{T_0 l}, \text{當點}(x,y)\text{在線段} AC \text{上(即 } 0\leqslant x\leqslant\xi) \text{時，}\\ G(x,\xi)&=\frac{(l-x)\xi}{T_0 l}, \text{當點}(x,y)\text{在線段} CB \text{上(即 } \xi\leqslant x\leqslant l) \text{時。}\end{aligned}\right\}$$
$$(1.2)$$

利用這些公式,容易驗知

$$G(x,\xi)=G(\xi,x).$$

假定作用於絃的力是連續地分佈的，且其線性強度是 $p(\xi)$,則作用於絃上點 ξ 和點 $\xi+\Delta\xi$ 之間那一段絃上的力就差不多等於 $p(\xi)\Delta\xi$。把由於這些力元素 $p(\xi)\Delta\xi$ 而引起的絃的變形加起來（“疊合原理”),故在這力的作用下,絃的形狀就是

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi.$$

我們考慮下面的問題。

1. 确定力的分佈强度 $p(\xi)$,使在這力的作用下,絃成給定的形狀 $y=y(x)$。這就得到一個含未知函數 $p(\xi)$ 的第一種積分方程

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

2. 設作用於絃的力隨時間 t 變,並且它在點 ξ 的強度是

$$p(\xi)\sin\omega t,\quad (\omega>0).$$

在它的作用下，絃就運動起來。我們同時還假定絃的運動不改變絃的每一點的橫坐標,而絃作由方程式

$$y=y(x)\sin\omega t$$

所描寫的周期振動。

把絃在點 ξ 的線密度記做 $\rho(\xi)$,那末在時刻 t, 點 ξ 與點 $\xi+\Delta\xi$ 之間的那段絃除受力 $p(\xi)\sin\omega t\,\Delta\xi$ 的作用之外,還受惰性力

$$-\rho(\xi)\Delta\xi\frac{d^2y}{dt^2}=\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t\,\Delta\xi$$

的作用。所以等式(2.2)呈下列形狀:

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t+\omega^2\rho(\xi)y(\xi)\sin\omega t]d\xi.$$

約去 $\sin\omega t$ 並設

$$\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi=f(x),$$

$$G(x,\xi)\rho(\xi)=K(x,\xi),\quad \omega^2=\lambda,$$

我們得到

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,\xi)\,y(\xi)d\xi+f(x). \tag{3.2}$$

若認爲函數 $p(\xi)$ 已經給定，因之 $f(x)$ 也是已給定的，我們就得到一個確定函數 $y(x)$ 的富內德和蒙積分方程。注意由於函數 $f(x)$ 的定義，我們有

$$f(0)=f(l)=0.$$

若密度 $\rho(\xi)$ 是常數，而 $f(x)$ 是兩次連續可微的函數，就不難解這個積分方程。因爲把 $G(x,\xi)$ 的表達式 (1.2) 代入 $K(x,\xi)$ 中，就得到

$$y(x)=\omega^2\rho\int_0^x\frac{\xi(l-x)}{T_0 l}\,y(\xi)\,d\xi+\omega^2\rho\int_x^l\frac{x(l-\xi)}{T_0 l}\,y(\xi)d\xi+f(x),$$

或

$$y(x)=\frac{\omega^2 c}{l}(l-x)\int_0^x\xi y(\xi)\,d\xi+\frac{\omega^2 cx}{l}\int_x^l(l-\xi)\,y(\xi)d\xi+f(x),$$

這裏

$$c=\frac{\rho}{T_0}.$$

把這方程兩端對 x 微分兩次，就得到

$$y''(x)=-\omega^2 c\,y(x)+f''(x). \tag{4.2}$$

另一方面，可以證明微分方程 (4.2) 的任何一個在 $x=0$ 及 $x=l$ 時都等

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

於 0 的解是積分方程 (3.2) 的解。爲此,用 $T_0G(x, \xi)$ 乘 $y''(\xi) = -\omega^2 c\, y(\xi) + f''(\xi)$的兩端,再從 0 到 l 對 ξ 求積分。我們得到等式(3.2),因爲如果 $\varphi(x)$是任何具有二級連續微商且在 $x=0$ 及 $x=l$ 時都等於 0 的函數,用分部積分法容易證明

$$\int_0^l T_0G(x, \xi)\, \varphi''(\xi)\, d\xi = -\varphi(x).$$

從常微分方程教程中,大家知道方程(4.2)的普遍解是

$$y = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x + \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi) \sin \mu(x-\xi)\, d\xi,$$

這裏 $\mu = \omega\sqrt{c}$,而 c_1 及 c_2 都是任意常數。從等式 (1.2) 及 (3.2) 得 $y(0) = y(l) = 0$。若 $\sin \mu l \neq 0$,從這兩個條件確定出 c_1 及 c_2,就得到

$$\left.\begin{aligned} y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\sin \mu x}{\sin \mu l}\int_0^l f''(\xi)\sin \mu(l-\xi)\, d\xi + \\ +\frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi) \sin \mu(x-\xi) d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

在這種情形,對於任何函數 $f(x)$,只要它有連續二級微商而且 $f(0) = f(l) = 0$,積分方程 (3.2) 就恰好只有一個解。

可以證明,當 $\sin \mu l \neq 0$ 時,要積分方程 (3.2) 有解,只須函數 $f(x)$ 是連續的;要求 $f(x)$ 有二級微商且其二級微商連續都是多餘的。但是對於任何連續函數 $f(x)$,甚至對於任何有隨便多少級微商的函數 $f(x)$,要這積分方程都有解,條件 $\sin \mu l \neq 0$ 仍是必要的。

若 $\sin \mu l = 0$,則

$$\mu = \frac{k\pi}{l}, \tag{6.2}$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l\sqrt{c}}, \tag{7.2}$$

$$\lambda=\frac{k^2\pi^2}{l^2c},\tag{8.2}$$

這裏 k 是任何整數（可以是正整數、負整數或 0）。當 $k=1,2,3,\cdots$ 時，公式（8.2）給出的 λ 的那些值叫做積分方程（3.2）中的參數 λ 的固有值，而相應的 ω 叫做絃的振動的固有頻率。

若 $\sin\mu l=0$ 而函數 $f(x)$ 有連續二級微商，從公式（5.2）就知道在這種情況下，積分方程（3.2）只有在

$$\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi=0\tag{9.2}$$

時才可以有解。分部積分上式，並利用當 $\xi=0,\xi=l$ 時，$\sin\mu(l-\xi)=$ $=0$ 及 $f(\xi)=0$，這個條件可以變成

$$\int_0^l f(\xi)\sin\mu\xi\,d\xi=0.\tag{10.2}$$

反之，也容易相信條件（10.2）也是方程（3.2）對於那些使 $\sin\mu l=0$ 的 μ 有解的充分條件。

特別在 $f(x)\equiv0$ 時條件（10.2）是適合的。此時積分方程（3.2）及微分方程（4.2）就都變成齊次的。所有齊次微分方程（4.2）的當 $x=0$ 及 $x=l$ 時都等於 0 的解，因之所有積分方程（3.2）的解，就都由公式

$$y(x)=C\sin\mu_k x\tag{11.2}$$

給出，這裏 C 是任意常數而 μ_k 是（6.2）中的那些數目之一。公式（11.2）給出當沒有外力作用時絃的固有振動

$$y=C\sin\mu_k x\sin\omega_k t\tag{12.2}$$

在點 x 的振幅。從上面看出，這些振動的頻率不能是任意的而只能是公式（7.2）當 $k=1,2,3\cdots\cdots$ 時所給出的那些頻率之一。

如果條件（9.2）不成立，公式（5.2）指出，當外力的頻率 ω 趨近於絃的振動的一個固有頻率時，絃的周期振動在點 x 的振幅 $y(x)$ 就要無限

增大。在這兩個頻率相等的極限情形就開始共振。所以,一般說來,也就是當外力的振幅是任意的時候,絃不作周期振動。與此相應,一般說來,非齊次積分方程(3.2)當 λ 等於這方程的一個固有值時無解。

§ 3. 線性積分方程與線性代數方程組之間的相似之處. 富內德和霍定理

我們來研究第二種線性積分方程

$$y(x)=\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{1.3}$$

這兒 $K(x,\xi)$ 及 $f(x)$ 是在 $a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant \xi\leqslant b$ 上確定的已知函數。把區間 (a,b) 分成 n 個相等的部份區間,每個部份區間的長等於

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x=\Delta\xi.$$

設

$$K(a+p\,\Delta x,\ a+q\,\Delta\xi)=K_{pq}\ (p,q=1,2,\cdots,n),$$
$$y(a+p\,\Delta x)=y_p\quad (p=1,2,\cdots,n),$$
$$f(a+p\,\Delta x)=f_p\quad (p=1,2,\cdots,n).$$

在 $x=a+p\,\Delta x$ 時,用和數

$$\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\,y_q\,\Delta\xi.$$

代替積分 $\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$, $p=1,2,\cdots,n$。於是得到一組線性代數方程

$$y_p=\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\,y_q\,\Delta\xi+f_p,\ \ p=1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

來代替積分方程(1.3)。這裏 $K_{pq}, f_p, \Delta\xi$ 都認爲是已知數而 y_p 則是

未知數。

其下一段的目的是把大家所知道的關於線性代數方程組的定理轉用到第二種富內德和蒙積分方程來。通常在敍述關於線性代數方程組的定理時，用到行列式。雖然我們也能夠把行列式與積分方程聯繫起來，但是這種做法是繁雜的。所以我們在敍述這些定理時不用行列式。這些定理的敍述都加曲線排印。

解方程組 (2.3) 時，其係數所組成的行列式

$$\begin{vmatrix} 1-K_{11}\,\Delta\xi & -K_{12}\,\Delta\xi & \cdots\cdots & -K_{1n}\,\Delta\xi \\ -K_{21}\,\Delta\xi & 1-K_{22}\,\Delta\xi & \cdots\cdots & -K_{2n}\,\Delta\xi \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -K_{n1}\,\Delta\xi & -K_{n2}\,\Delta\xi & \cdots\cdots & 1-K_{nn}\,\Delta\xi \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

起極重要的作用。

大家知道，若這行列式不等於 0，則對於 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的任何數值，方程組 (2.3) 總有解，而且這解總是唯一的。在這種情形，其轉置方程組，即方程組

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp}\, z_q\, \Delta\xi + f_p^*,\ p = 1, 2, \cdots, n$$

對於任意的 f_p^* 也都有解，而且這解也是唯一的。

若這行列式等於 0，對於任意的 f_p，一般說來方程組 (2.3) 就沒有解。但是相應的齊次方程組，就是把 (2.3) 中的 f_p 都看作是 0 而得的方程組，就總有非平凡解，就是不只是由 0 所組成的解。

於是有以下兩種可能：或者原設非齊次線性代數方程組 (2.3) 不論其右端的 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 取那些數值都有一組解而且僅此一組解，或者相應的齊次方程組至少有一組非平凡解。如果原設方程組屬於第一種可能的情形，則其轉置方程組也屬於第一種情形。

在第二種情形下，原設齊次方程組

$$y_p-\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\,y_q\,\Delta\xi=0,\ p=1,2,\cdots,n\tag{4.3}$$

與其轉置方程組

$$z_p-\sum_{q=1}^{n}K_{qp}\,z_q\,\Delta\xi=0,\ p=1,2,\cdots,n\tag{5.3}$$

有同樣多組線性無關的解；其線性無關的解的組數等於 $n-r$，這裏 r 是行列式（3.3）的矩陣的秩。❶

現在我們求在第二種可能的情形下，非齊次方程組(2.3)有解的必要充分條件。首先我們容易得到必要條件。設

$$z_1,z_2,\cdots,z_n$$

是方程組（5.3）的解。以 z_p 乘(2.3)的第 p 個方程，然後把得到的這些方程加起來，就得到

$$\sum_p y_p\,z_p-\sum_{p,q}K_{pq}\,y_q\,z_p\,\Delta\xi=\sum_p f_p\,z_p.$$

但是這個等式的左端可以再改寫成

$$\sum_p y_p\,z_p-\sum_{p,q}K_{pq}\,y_p\,z_q\,\Delta\xi=\sum_p y_p\left(z_p-\sum_q K_{qp}\,z_q\,\Delta\xi\right).$$

由於方程(5.3)，這個表達式等於 0。因此應該有

$$\sum_{p=1}^{n}f_p\,z_p=0.\tag{6.3}$$

現在證明：如果方程組(5.3)所有的解都滿足（6.3）這個等式，它就也是方程組（2.3）有解的充分條件。顯然，如果方程組（5.3）的任何

❶ 注意齊次方程組（4.3）及（5.3）恰有 $(n-r)$ 組線性無關的解這一斷語，在第一種可能的情形下也是眞實的；此時 $n=r$。而"0 組線性無關的解"這句話的意義是指只有全部由 0 組成的解。

$(n-r)$ 個互相線性無關的解適合條件(6.3)，這個條件就滿足了。爲了證明我們的斷語，回憶在高等代數教程裏有：在行列式等於 0 的情形下，方程組(2.3)有解的充分條件是矩陣

$$\left\|\begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi, & \cdots\cdots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi, & \cdots\cdots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi, & \cdots\cdots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix}\right\| \tag{7.3}$$

的秩和矩陣 (3.3) 的秩相等。

爲此，只須證明所有由矩陣(7.3)的元素所組成並且包含這個矩陣最後一列的元素的$(r+1)$階行列式都等於 0 就够了。把這樣的行列式 D_{r+1} 按照元素 f_k 展開，由條件 (6.3) 就知道它的確等於 0。因爲若於一定的 i，當 f_i 在 D_{r+1} 內出現時，令 z_i 等於 f_i 在 D_{r+1} 內的代數餘因式；否則令 $z_i=0$，那末

$$z_1, z_2, \cdots, z_n$$

就適合方程組(5.3)。❶

我們自然要希望，當 $\Delta\xi$ 趨於 0 時，$\sum\limits_{q} K_{pq}\,y_q\,\Delta\xi$ 趨於 $\int\limits_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$，而方程組 (2.3) 的解趨於積分方程 (1.3) 的解。當我們對核 $K(x,\xi)$ 作了某些假定時，的確會是這樣。但這個證明却是繁冗的，因而我們不去證明它，雖然在求積分方程 (1.3) 的近似解時，有時候也會用方程組 (2.3) 來代替積分方程 (1.3)。❷ 我們只證明從以上方程組

❶ 這個斷語的正確性可證明如次：把 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 代入方程組(5.3)的第 j 個方程中。如果矩陣(7.3)的第 j 列的元素在 D_{r+1} 中出現，則代入後的結果等於 0，因爲它等於一個有兩列元素相同的行列式。如果矩陣 (7.3) 的第 j 列的元素不在 D_{r+1} 中出現，則代入後的結果也等於 0，因爲它等於由秩爲 r 的矩陣 (7.3) 的元素所組成的一個$(r+1)$ 階行列式。

❷ 參看 Л. В. Канторович 和 В. И. Крылов 所著：高等分析的近似方法，莫斯科-列寧格勒，第三版 (1950)，第二章 §1。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com