高等学校试用教材

初等代数研究 上册

余元希　田万海　毛宏德

高等教育出版社

高等学校试用教材

初等代数研究

（上）

余元希　田万海　毛宏德

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是参照二、三年制师范专科学校“初等数学研究与教学法”教学大纲编写的. 分上、下两册出版. 上册主要内容为数的概念的扩展，有理数、实数和复数的运算，代数式和初等超越式的恒等变换等.

本书可供师范院校数学系、科“初等代数研究”课程作为试用教材，也可供中学数学教师参考.

高等学校试用教材

初 等 代 数 研 究

（上）

余元希　田万海　毛宏德

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 8.75　字数 207,000

1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷

印数 00001—7.160

ISBN 7-04-000041-5/O·22

定价 1.60 元

前　言

本书是在华东师范大学数学系设置"初等代数原理"和上海教育学院数学系设置"初等代数复习与研究"这两门课程的讲稿的基础上，参照二、三年制师范专科学校《初等数学研究与教学法》教学大纲（供数学专业试用）编写的，供高等师范院校数学系、科设置"初等代数研究"课程作为试用教材.

本书的编写采取专题讨论的方式.各章都具有相对的独立性，使用时可以根据教学大纲的要求和实际需要，着重教学其中的某些章节，而把其余留给学生自学参考.本书每章正文之后，都配有一定数量的习题，其中包括了正文中引入的留给读者自行证明的定理，供读者练习.

本书第一、二、三、四、五、十二、十三、十四等章及附录B由田万海撰写；第六、七、八、九、十、十一等章及附录A由毛宏德撰写；余元希主持了全书的编写工作，并进行统稿.初稿写成后，曾在编者所在的院校试用，高等教育出版社组织了由丁尔陞同志主持的十三所高等师范院校数学系、科代表曹才翰（北京师大）、黄澍（徽州师专）、何荣廷（六安师专）、吴雪庐、葛尚范（芜湖师专）、张恩华（南京师大）、赵登生（浙江师院）、王笃正（扬州师院）、张振环（安徽师大）、罗淑英（昆明师专）、林普江（荆州师专）、吴秉国（南通师专）、周修知（宁德师专）、黄又人（娄底师专）参加的审稿会议，进行审稿，并提出了修改意见.根据这些意见，编者对初稿又作了全面修订.修订稿由丁尔陞、曹才翰二位同志进行复审.但限于编者的水平，书中还难免有不少的缺点和错误，希望读者批评指正.

编　者

一九八六年五月

目　　录

绪　言

代数这一名词起源于公元九世纪时的花剌子模数学家和天文学家穆罕默德·伊本·穆斯·阿里·花剌子模的著作《Kitab al jabr w'al-mugabala》，意思是"整理"和"对比"．后来，aljabr演变成了algebra，这就是拉丁文的"代数学"．代数的基础就是脱离了具体数字在一般形态上形式地加以考察的关于算术的学说．代数的课题首要就是字母表示的式的变换和解方程的规则和方法．所以，代数这个名称的起源完全符合这门科学本身的内容①．

关于什么是代数以及代数的基本问题是什么这两个问题的观点，随着代数这门科学的发展有过几次改变．十六世纪后期，韦达(Vieta, Francis 1540～1603)引进了字母表示法．当时人们把代数看成是关于字母的计算、字母排成的式子的变换以及解方程的科学．它与算术的不同，只是在于算术仅仅是对具体数字的运算．十七世纪六十年代，欧拉(Euler, Leonard 1707～1783)写的一本有名的著作《代数学引论》，把代数定义成各种量的计算的理论，就明显地体现了这种观点．

十八世纪末到十九世纪初，代数方程的解法渐渐被人们认为是代数学的中心问题．许多数学家对一元n次方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

进行了研究，并提出了与这个问题有关的许多复杂的理论．在这一时期，人们把代数理解为仅是研究方程理论的科学．

---

① 参阅苏联A.Д.亚历山大洛夫等著《数学——它的内容、方法和意义》第一章§5.

十九世纪后半期，代数这门科学开始在力学、物理学以及数学本身找到了越来越多的研究对象，如向量、矩阵、张量、旋量、超复数等等．对于这类对象，很自然地要考察关于它们的运算，但是这些运算所满足的规律和法则，却不完全与有理数的运算规律和法则相同．这些对象虽然也是用字母来表示的，但是对于它们的运算，还得作专门的研究．相应地，这就促使代数学这门科学起了质的变化．如果对于某种用字母表示的对象的集合，给出了一些运算以及这些运算所满足的规律、法则，我们就说给出了一个代数系统．应用这一概念，人们就把代数理解为研究各种代数结构的科学，这也就是近代数学中所谓公理化的或抽象化的代数．这一观点，回到了韦达时代把代数看作是关于字母的计算的科学这种观点，但是已上升到更加高级的形态．

作为中学数学教学科目的代数，它的性质与内容，则与近代代数有显著的差别．在这门课程里所包含的内容，主要有数的概念的扩展，有理数、实数和复数的运算；代数式和初等超越式的恒等变换；函数的初步知识，幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数的性质和图象；代数方程和简单初等超越方程（方程组）的解法和一元 n 次方程的简单理论；不等式的证明与一元不等式（不等式组）的解法；数列、数学归纳法、排列与组合、、二项式定理，以及概率初步、统计初步等等．这些内容有的属于传统的代数，而有些内容则属于数学分析、概率统计等数学分支．所以，中学代数实际上是一门综合性的学科．由于这些内容相互间的联系，以及教学法的原因，在教材的安排上，必须采取交错安排的办法．教材的叙述，较多地采用描述的办法，理论上的要求不可能十分严谨，内容的深度与广度都有一定的局限性．

根据中学数学教学的目的和中学生的年龄特征，中学代数教材按上述方法处理是合理的；但是对于一位未来的中学数学教师

来说，仅仅具备中学代数中所涉及的这些知识，那是远远不够的．为了更好地掌握并处理中学代数的教材，还必须知道在中学代数用描述的方法引进的一些数学概念怎样给出精确的定义，未作证明的或者证明不完整的数学命题怎样作出严格的证明，以及一些广泛应用的数学方法的理论依据．学习高等数学可以帮助我们解决这些理论性的问题，但是也有一些理论问题，运用高等数学中的处理方法与中学代数距离较远，不能直接搬用，或者在高等数学里认为中学代数已经解决，未加讨论．这就需要我们对中学代数作专门的研究．中学数学教师的实践中，重要任务之一是给学生作解题指导，培养学生运用数学知识解决问题的能力．因此，教师本身就需要具备这一方面较强的能力．学习高等数学，可以提高数学修养，提高解题能力，但是怎样结合中学的实际，运用中学生可以接受的方法，特别是运用初等的方法来处理初等数学的问题，这方面的技能与技巧，毕竟还得作专门的训练．在高等师范院校数学系、科设置初等数学研究这门课程，目的也就在此．

摆脱了中学代数里已有的基础，以及高等数学里已作详尽讨论的知识，按照自己的逻辑系统来阐述初等代数的内容，并进行研究，将难免造成与中学代数或高等数学不必要的重复．为此，本书采用了按照前述中学代数的几个主要课题（除去概率统计）进行专题讨论的方法．对于中学代数中已经解决的问题，将不再展开讨论；已有的知识与技能将作为工具来应用；在高等数学里已讨论过的有关理论，可以直接指导中学代数的，将直接引用，不再论证．

第一章 自 然 数

自然数是人类最早认识的数. 我们研究初等代数就从这最基本的对象开始. 在这一章里,首先概述自然数的两种理论,说明每一种理论是怎样定义自然数及其运算与顺序的,对于自然数的性质,又是如何证明的;然后,用自然数的理论,研究数学归纳法.

§ 1.1 自然数的基数理论

十九世纪中叶,康托(G. Cantor)提出了自然数的基数理论. 这种理论的实际背景是如何度量一类物体的个数.

考察集合X所含元素多少,可以选定另一个集合A,视X与A的元素间能否一对一搭配起来. 如果存在这样的一一对应关系,就说X等价于A(记作 $X\sim A$),也说X与A具有同一个基数. 集合A的基数用 $\bar{A}$ 表示.

我们把不能与其任一个真子集等价的集合叫做有限集,在这一节中所说的有限集都不是空集(空集用$\varnothing$表示).

定义 1 有限集的基数叫做自然数.

所有等价于 $\{\varnothing\}$ 的集合的基数,用符号 1 表示,就是

$\overline{\{\varnothing\}}=1$, 1是自然数;

类似地,

$\overline{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}=2$, 2是自然数;

$\overline{\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}}=3$, 3是自然数;

……………………………………………

一切自然数组成的集合，叫做自然数集，记为 $\boldsymbol{N}$.

定义 2 如果有限集 A、B 的基数分别为 a、b，那么

1) 当 $A\sim B$ 时，就说 a 等于 b，记作 $a=b$；

2) 当 $A\sim B'\subset B$(B'是B的真子集)时，就说 a 小于b，记作 $a<b$;

3) 当 $A\supset A'\sim B$ 时，就说 a 大于 b，记作 $a>b$.

根据定义 1、定义 2 与集合等价的性质，可以得到

定理 1 自然数的相等关系具有反身性、对称性与传递性，即

1) 对任何 $a\in\boldsymbol{N}$，有$a=a$;

2) 对任何 $a,b\in\boldsymbol{N}$，若 $a=b$，则 $b=a$;

3) 对任何 $a, b, c\in\boldsymbol{N}$，若 $a=b$, $b=c$，则 $a=c$. □

定理 2 自然数的顺序关系具有对逆性、传递性与全序性，即

1) 对任何 $a, b\in\boldsymbol{N}$，当且仅当 $a<b$ 时 $b>a$;

2) 对任何 $a, b, c\in\boldsymbol{N}$，若 $a<b$, $b<c$，则 $a<c$;

3) 对任何 $a, b\in\boldsymbol{N}$，在$a<b$, $a=b$, $a>b$ 中有且只有一个成立.

这里只证明 2). 设 A、B、C 都是有限集，$\bar{\bar{A}}=a$, $\bar{\bar{B}}=b$, $\bar{\bar{C}}=c$. 根据定义 2，存在集合B'、C'，使得

$$A\sim B'\subset B,\quad B\sim C'\subset C,$$

这就有集合 $C''\subset C'$，且$C''\sim B'$，于是

$$A\sim C''\subset C'\subset C,\quad \text{即} a<c.\ \square$$

下面讨论自然数的运算.

定义 3 设 A、B 都是有限集，$\bar{\bar{A}}=a$, $\bar{\bar{B}}=b$，且 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A\cup B$ 的基数为 a 加上 b 的和，记作 $a+b$. 这里 a 叫做被加数，b 叫做加数. 求和的运算叫做加法.

对于自然数 a、b，显然 $a+b$ 是唯一确定的自然数.

定理 3 自然数的加法满足交换律与结合律. □

定理 3 表明, 对加法不必区分被加数与加数, 而统称为加数; 加法可以拓广到任何有限个加数的情形.

加法在所有加数都相等时被规定为自然数的另一种运算.

定义 4 若 b 个有限集 $A_1,A_2,\cdots,A_b$ 彼此之间没有公共元素, 它们的基数都是 a, 则称 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b$ 的基数为 a 乘以 b 的积, 记为 $a\times b$, 或 $a\cdot b$, 或 ab. 这里 a 叫做被乘数, b 叫做乘数. 求积的运算叫做乘法.

由定义 4 可知, ab 是 b 个 a 之和.

在定义 4 中, 显然 $b\neq 1$. 为了解除这个限制, 可以补充规定: $a\cdot 1=a$.

这样一来, 乘法在 N 中就能单值地进行了.

定理 4（乘法交换律） 对任何 $a,b\in N$, 恒有

$$ab=ba.$$

证 设

$$A_1=\{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1a}\},$$
$$A_2=\{x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2a}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_b=\{x_{b1}, x_{b2}, \cdots, x_{ba}\},$$

且这 b 个集合彼此之间没有公共元素, 则

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b$$
$$=\{x_{11}, x_{12},\cdots, x_{1a}, x_{21}, x_{22},\cdots, x_{2a},\cdots,x_{b1}, x_{b2},\cdots, x_{ba}\}.$$

根据定义 4,

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b}=ab. \tag{1}$$

再令

$$B_1=\{x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{b1}\},$$
$$B_2=\{x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{b2}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_a=\{x_{1a}, x_{2a}, \cdots, x_{ba}\},$$

则这 a 个集合彼此之间也没有公共元素，每一个集合的基数都是 b，而且

$$\overline{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_a} = ba. \tag{2}$$

因为 $$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_b = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_a,$$

故由(1)，(2)，得 $ab = ba$. □

定理 4 表明，对于乘法不必区分乘数与被乘数，而统称为乘数.

定理 5(乘法对加法的分配律) 对任何 $a,b,c \in \mathbf{N}$，总有

$$a(b+c) = ab + ac; \qquad (b+c)a = ba + ca.$$

证 这里只证明第一个等式.

$$\begin{aligned} a(b+c) &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{(b+c)\text{个}} \\ &= (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{b\text{个}}) + (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{c\text{个}}) \\ &= ab + ac. \quad \square \end{aligned}$$

推论 若 a, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是自然数，则

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n. \quad \square$$

定理 6 (乘法结合律) 对任何 $a,b,c \in \mathbf{N}$，恒有

$$a(bc) = (ab)c.$$

证

$$\begin{aligned} a(bc) &= a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{c\text{个}}) \\ &= (\underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{c\text{个}}) \\ &= (ab)c. \quad \square \end{aligned}$$

定理 6 表明，乘法可以拓广到有限个乘数的情形.

把自然数的加法与乘法各与自然数的顺序联系起来，有下面的

定理 7 设 $a,b,c\in N$，且 $a\leqslant b$，则

1) $a+c\leqslant b+c$（加法单调性）；

2) $ac\leqslant bc$（乘法单调性）. □

如果把一个个基数为 1 而元素各不相同的集合并起来，得一系列并集，根据这些集合的基数的大小可以把 N 中的元素由小到大排成所谓自然数列

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots.$$

由于这个缘故，N 及其等价集合，如

$$\{1,3,5,7,\cdots\},$$

$$\{2,4,6,8,\cdots\},$$

都叫做可列集（指无限可列集）. 通常认为所有可列集具有同一个基数，这基数用 $\aleph_0$ 表示.

顺便指出，如果把有限集的基数的加法拓广到可列集，就有

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,\quad \aleph_0+m=\aleph_0\qquad (m\in N).$$

由此可见，可列集与有限集有着本质差异.

我们还可以把自然数加法与乘法的逆运算分别规定为自然数的减法与除法. 但 N 关于减法与除法都是不封闭的.

以上用有限集的基数给出了自然数及其顺序与运算的定义，并证明了自然数的基本运算律与基本顺序律. 由它们可以推出自然数的运算与顺序的其它性质.

§1.2 自然数的序数理论

自然数的理论严谨性问题，是在十九世纪中叶数学公理法发

展的影响下提出来的. 所谓公理法，就是以一些不加定义的基本关系与不加证明的公理为基础，借助于纯粹逻辑方法推演出一系列定理与命题，以建立起整个理论.

执此以绳前述的基数理论，由于它过多地依赖集合论的原理，就显得不甚纯粹，也不够严密了.

实际上，基数理论反映了自然数在数量上的意义，但没有很好揭露自然数在顺序上的意义，也没有给出自然数加、乘运算的具体方法.

为了克服这些缺陷，皮亚诺(G. Peano)在 1889 年提出自然数的公理，建立了自然数的序数理论.

这种理论是从自然数列抽象出来的. 自然数列是排定了顺序的一串数，其中有一个最前面的数，没有两个相等的数，每一个数有且只有一个后继数. 把"后继"作为不加定义的基本关系，用一组公理来刻划它，这组公理列举自然数不加证明的基本性质，就有

定义 1 集合 $\boldsymbol{N}$ 的元素叫做自然数，如果 $\boldsymbol{N}$ 的元素间有一个基本关系"后继"(用"+"来表示)，并满足下列公理：

Ⅰ $1\in \boldsymbol{N}$；

Ⅱ 对任何 $a\in \boldsymbol{N}$，有唯一的$a^{+}\in \boldsymbol{N}$；

Ⅲ 对任何 $a\in \boldsymbol{N}$，a^{+}不是 1；

Ⅳ 对任何 $a,b\in \boldsymbol{N}$，若a^{+}与 b^{+}相同，则 a 等于 b(记为 $a=b$)；

Ⅴ (归纳公理) 若 $M\subseteq \boldsymbol{N}$，且

1° $1\in M$；

2° 对任意 $a\in M$，有$a^{+}\in M$，

则 $M=\boldsymbol{N}$.

显而易见，自然数列满足定义 1，反之，由Ⅰ和Ⅲ，有自然数 1，它是最前面的一个自然数；由Ⅱ和Ⅳ；有唯一的 1^{+}，记为 2，它只后

继于 1；同样有唯一的 2^+，记为 3，它只后继于 2；这样继续下去，可以得到

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots.$$

定义 2 自然数的加法是一种对应关系"+"，由于它，对任何 $a, b \in \boldsymbol{N}$，有唯一确定的 $a+b \in \boldsymbol{N}$，并且

1） $a+1=a^+$；

2） $a+b^+=(a+b)^+$.

例 1 证明 $2+3=5$.

证 $\because \quad 2+1=2^+=3,$

$$2+2=2+1^+=(2+1)^+=3^+=4,$$

$\therefore \quad 2+3=2+2^+=(2+2)^+=4^+=5.$

一般说来，这样的加法是否存在？是否唯一？定义本身没有回答这些问题，但答案是肯定的.

定理 1 自然数的加法是唯一存在的.

证 1° 至多有一种这样的对应.

取定 a，假设至少有两个对应 f, g，对任何 $b \in \boldsymbol{N}$，各对应于 $f(b)$，$g(b) \in \boldsymbol{N}$. 设使 $f(b)=g(b)$ 的所有 b 组成的集合为 M. 由定义 2 的 1)，得

$$f(1)=a^+=g(1), \quad \therefore \quad 1 \in M.$$

假定 $b \in M$，则 $f(b)=g(b)$. 根据 II，$[f(b)]^+=[g(b)]^+$. 又由定义 2 的 2)，得 $f(b^+)=g(b^+)$，于是 $b^+ \in M$.

按 V，$M=\boldsymbol{N}$，即对任意 $b \in \boldsymbol{N}$，$f(b)=g(b)$.

这对给定的 a，1° 已被证明. 由 a 的任意性，知对任意 $a, b \in \boldsymbol{N}$，1°也被证明.

2° 存在性. 设使加法存在的 a 组成的集合为 W. 当 $a=1$ 时，对任意 $b \in \boldsymbol{N}$，令 $a+b=b^+$. 这就有

$$a+1=1^+=a^+,$$

$$a+b^{+}=(b^{+})^{+}=(a+b)^{+}.$$

$\therefore \quad 1\in W.$

假定 $a\in W$，即对任意 $b\in N$，有 $a+b$ 与它对应，而且

$$a+1=a^{+},\quad a+b^{+}=(a+b)^{+}.$$

现在对任何 $b\in N$，令 $a^{+}+b=(a+b)^{+}$. 这就有

$$a^{+}+1=(a+1)^{+}=(a^{+})^{+},$$

$$a^{+}+b^{+}=(a+b^{+})^{+}=[(a+b)^{+}]^{+}=(a^{+}+b)^{+},$$

$\therefore \quad a^{+}\in W.$

根据V，$W=N$. 因此，对任何 $a,b\in N$，这种对应存在. □

定理 2（加法结合律） 对任何 $a,b,c\in N$，总有

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

证 取定 a,b，设 M 是使上面等式成立的所有 c 组成的集合. 由于

$$a+(b+1)=a+b^{+}=(a+b)^{+}=(a+b)+1,$$

$\therefore \quad 1\in M.$

假定 $c\in M$，则

$$\begin{aligned}a+(b+c^{+})&=a+(b+c)^{+}\\&=[a+(b+c)]^{+}\\&=[(a+b)+c]^{+}\\&=(a+b)+c^{+},\end{aligned}$$

于是 $$c^{+}\in M.$$

因此，$M=N$. 又由 a,b 的任意性，知定理 2 得证. □

定理 3 自然数的加法满足交换律. □

定义 3 自然数的乘法是一种对应关系“·”，由于它，对任何 $a,b\in N$，有唯一确定的 $a\cdot b\in N$，并且

1） $a\cdot 1=a$;

2） $a\cdot b^{+}=a\cdot b+a$.