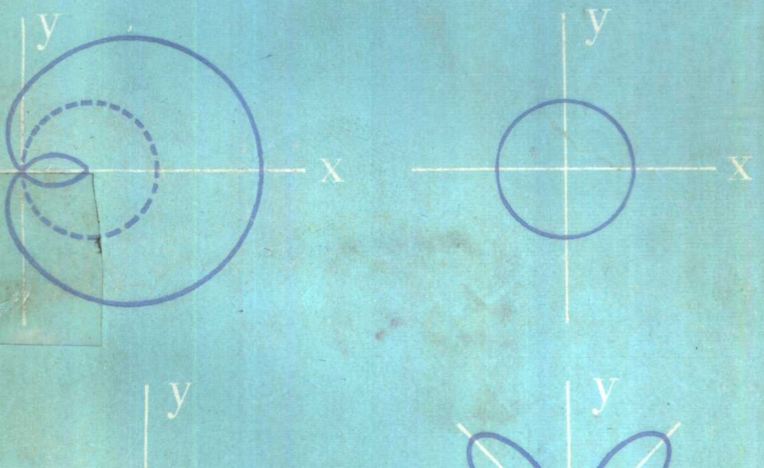
中学数学自学辅导教材

代　数

第四册（一）课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编



地质出版社

3

中学数学自学辅导教材

代　数

第四册（一）课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编

地质出版社

内 容 简 介

本套教材按照中学数学教学大纲的要求编写，经教育部批准公开出版发行。全套书共包括代数四册、平面几何两册以及配套使用的练习本和测验本，程度与内容基本和全日制十年制统编教材一致，但富有学习心理学特点，便于自学，并能激发学习者的兴趣和自信心。1965年开始实验，经多次修订，现已在全国二十八个省、市、自治区的部分中学推广实验，在培养学生自学能力、形成自学习惯和自学能力迁移方面的效果显著。本套教材可作为正式中学的实验课本，也可以在没有教师指导的情况下用于自学，是同年级学生课外阅读和社会、青工、干部等自学者的良好读物，同时，对中学教师和教研人员亦有一定的参考价值。

中学数学自学辅导教材
代 数
第四册 (一)课 本
中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编
*
责任编辑：张 瑚 赵 薇
地质出版社出版
(北京西四)
沧州地区印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售
*
开本：787×1092 1/32 印张(共三册)：17 1/2 字数：382,000
1985年5月沧州第一版·1985年5月第一次印刷
印数：1—156,085册 定价：2.35元(共三册)
统一书号：7038·新154

前　　言

一、中学数学自学辅导教材，是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡副研究员根据人民教育出版社课本内容，贯彻一些有效的学习心理学原则，并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种实验教材．当时这套教材每册有三个本子，一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，习惯上称“三本教学”（现在已把答案附在课本后面，增加了一个小测验本，测验本由老师掌握）．1966年初在北京市女六中和西四中学与常规教学进行对比实验，1973年、1974年、1978年、1979年在一七二中和三中进行试验．这三次的实验教学都比常规教学学习时间短，学习质量高，并加速了学生自学能力的成长。由于十年动乱，实验中断了两次，以至实验未能在初三年级展开．

1980年开始，以三年为一周期进行推广实验，目前已在全国二十八个省、市、自治区数以千计的班级展开．三年级的数学自学辅导教材虽然由内部印刷做了三遍实验，但是缺点仍然很多，这次是第一次公开出版，请教师们和同学们多提宝贵意见，以便今后进一步完善．

二、使用这套教材做实验时，教师启发、指导、答疑、提问或小结等，平均每课时占10分钟（最多15分）左右，这些活动都是在开始上课时或在下课前进行的；中间约有35分钟（至少30分钟）让学生集中精力粗、细、精地认真阅读课本内容，每阅读一、两段内容后要用铅笔在书旁进行眉批（即写概括段义），接着做练习并对答案，中间不打断学生的思路，以便

快者快学，慢者慢学．学生学完老师规定的进度之后，可以自学参考书或人教社编的课本．在学生自学时，老师必须巡视学生的学习情况并辅导差生．学生在做练习时，应在做完一大题所包含的全部小题以后再对答案，而不要做完一小题就对答案，以免造成思维步子过小，影响思维能力的成长，但也不要全部做完一个练习才对答案，这样会出现连锁性的错误（具有较好的数学才能的学生可以做完一个练习再对答案）．本套教材的使用方法详见《教育研究》1982年第11期“怎样进行自学辅导教学实验”一文，以及1984年第1期“自学辅导教学实验的教学原则”一文．

三、这套中学数学自学辅导教材是参照人民教育出版社最新教学大纲和样本的要求进行修改的．本册教材由金祥凤、卢仲衡、钱金莱、段惠若、陈其弼、宋同荦同志编写，赵爱秋同志给予了协助，特此致谢．由于时间仓促，水平所限，错误之处定然不少，请批评指正．

中国科学院心理研究所
数学自学辅导教学实验组

1985年2月

目　　录

第一章　常用对数

1．1　对数

现在让我们学习与指数有密切关系的对数．对数运算与指数运算是互为逆运算的．对数是简化复杂运算的工具，如可以把乘、除法运算简化为加、减法运算，把乘方、开方运算简化为乘、除法运算．但是要利用对数进行计算，必须深刻理解对数的概念．

1．对数的概念

我们以前学过指数式$a^b=N$，知道，对于指数式$a^b=N$，只要已知a、b、N三个数中的任两个数，就可以求出第三个数．

（1）已知a、b，求N．这是求幂的问题，可以利用乘方运算来解决．例如，已知$a=3$，$b=4$，则$N=a^b=3^4=81$．

（2）已知b、N，求a．这是求底数的问题，可以用开方运算来解决．例如，已知$b=3$，$N=8$，则由$a^3=8$，有$a=\sqrt[3]{8}=2$．

（3）已知a、N，求b．这是求指数的问题，可以用对数来解决，这就是我们下面要学习的内容．

例如，求出式子$5^b=2$中的指数b，记作$b=\log_5 2$．

式中记号"log"是拉丁字"logarithm"的简写，读作laoge，表示对数．$\log_5 2$读作以5为底的2的对数．

又如，已知$2^x=8$，求x．用对数运算记作

$$x=\log_2 8$$

由此我们不难知道：

若$3^4=81$，　　　　则$4=\log_3 81$；

若$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$，　　　　则$-3=\log_{\frac{1}{2}}8$；

若$(16)^{\frac{1}{2}}=4$，　　　　则$\frac{1}{2}=\log_{16}4$；

若$(125)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$　　　　则$-\frac{1}{3}=\log_{125}\frac{1}{5}$；

一般地说，设a是不等于1的正数，那末a的b次幂等于N，可以记作

$$a^b=N.$$

反过来，如果我们要表示N是a的多少次幂，就可以记作

$$\log_a N=b$$

这里a仍然叫做底数，N叫做真数，b叫做以a为底的N的对数.

注意：(1)当$a=1$时，不能求出唯一的对数b.因为1的任何次方都等于1，所以$1^b=1$中的b可以是任意实数.因此在$a^b=N$中已知a、N求出的$b=\log_a N$，必须规定$a\neq1$.

(2)当$a<0$时，a^b不一定都有意义.

如$(-2)^{\frac{1}{2}}$在实数范围内无意义.

因此在$a^b=N$中已知a、N求出的$b=\log_a N$，必须规定$a>0$.

(3)当$a>0$，$a\neq1$时，式子$a^b=N$中的N一定大于0.

所以在$a^b=N(a>0,a\neq1)$中，已知a、N，求出的$b=\log_a N$，不仅$a>0$，$a\neq1$，并且$N>0$.

本章对数式中的字母，如不加特殊说明，底数都是不等于1的正数，真数都是正数.

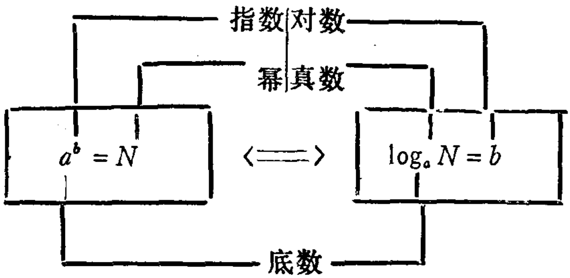
（翻开练习本做练习一）

2. 指数式$a^b=N$和对数式$\log_a N=b$互为逆运算

对数运算与指数运算互为逆运算，对数运算的结果就是对数。

我们知道，加法与减法互为逆运算；乘法与除法互为逆运算；乘方与开方互为逆运算。换句话说，加法运算的结果得和数，加法的逆运算是减法（已知和数和一个加数求另一个加数的运算），减法的运算结果得差数；乘法运算的结果得积数，乘法的逆运算是除法（已知积数和一个乘数求另一个乘数的运算），除法运算的结果得商数；乘方运算的结果得幂，乘方的逆运算是开方（已知幂求一个数的方根的运算），开方运算的结果得方根；指数运算$a^b=N$的结果得幂数N，而对数运算是已知底数a、幂数N求指数b，即对数运算是指数运算的一种逆运算。

从对数的定义，对于$a>0$，$a\neq1$，$N>0$，我们知道$a^b=N$和$\log_a N=b$这两式中所表示的a、b和N三个数之间的关系是一样的，只是表达的形式有所不同。它们的关系可以表示如下：



从这图表中可以看出，指数式$a^b=N$中的指数b，就是对数式$\log_a N=b$中的对数b；指数式$a^b=N$中的幂数N，就是对数式$\log_a N=b$中的真数N；指数式$a^b=N$中的底数a，就是对数式$\log_a N=b$中的底数a a、b、N的关系一样，名称不同，这并不奇怪。

如同乘法$a\cdot b=c$中，a叫做因数，c叫做积数；逆运算除法$c\div b=a$中，a叫做商数，c叫做被除数，二者的道理是一样的。

（翻开练习本做练习二）

对数运算是指数运算的逆运算，因而$a^b=N$ $(a>0, a\neq 1)$ $\Longleftrightarrow \log_a N=b(a>0, a\neq 0, 且N>0)$

例1. 把下列指数式化为对数式：

(1) $3^2=9$； (2)$5^{-4}=\frac{1}{625}$，

(3) $10^{-5}=0.00001$； (4)$16^{\frac{1}{2}}=4$。

解： (1) $\log_3 9=2$； (2) $\log_5 \frac{1}{625}=-4$；

(3) $\log_{10}0.00001=-5$； (4) $\log_{16}4=\frac{1}{2}$。

例2. 把下列对数式写成指数式

(1) $\log_{10}100=2$； (2) $\log_2 128=7$；

(3) $\log_{\frac{1}{3}}27=-3$； (4) $\log_{64}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$。

解： (1) $10^2=100$； (2) $2^7=128$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$； (4) $(64)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$。

例3. 把下列指数式写成对数式：

(1) $(0.25)^{\frac{1}{2}}=0.5$； (2) $2.75^0=1$；

(3) $10^{-2}=0.01$； (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$。

解： (1) $\log_{0.25}0.5=\frac{1}{2}$； (2) $\log_{2.75}1=0$。

(3) $\log_{10}0.01=-2$;　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$。

例4．把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}$;　　(2) $\log_5 5=1$;

(3) $\log_7 1=0$;　　(4) $\log_{10}10000=4$。

解：(1) $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$;　　(2) $5^1=5$;

(3) $7^0=1$;　　(4) $10^4=10000$。

例5．求下列各式的值

(1) $\log_5 125$;　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}81$;　　(3) $\log_4 32$。

解：(1) 设$\log_5 125=x$

把对数式化为指数式，得

$5^x=125$,

$5^x=5^3$。

比较指数得$x=3$。

因此 $\log_5 125=3$。

(2) 设 $\log_{\frac{1}{3}}81=x$

把对数式化为指数式得

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=81,$$

$3^{-x}=3^4$。

比较指数得$-x=4$，即 $x=-4$。

因此 $\log_{\frac{1}{3}}81=-4$。

(3) 设 $\log_4 32=x$,

把对数式化为指数式，得

$4^x=32$.

$2^{2x}=2^5$.

比较指数得 $2x=5$，即$x=\frac{5}{2}$.

因此 $\log_4 32=\frac{5}{2}$.

由例5可以得到如下结论：**两个指数式，如果幂相同，底相同，那么指数必相同.**

（翻开练习本做练习三）

3．对数恒等式

由对数定义可以知道，$N=a^{\log_a N}$ $(N>0, a>0, a\neq1)$. 这个等式对N、a的一切可取值都是成立的，所以称它为对数恒等式.

另外，对数还有如下几个恒等式：

（1）$\because 5^0=1$，　　　$\therefore \log_5 1=0$；

$\because \left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，　　$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 1=0$

……………………………………………………

一般地，$a^0=1$，

$$\log_a 1=0 \quad (a>0, 且a\neq1)$$

（2）$\because 3^1=3$，　　$\therefore \log_3 3=1$.

$\because \left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{1}{4}$　　$\therefore \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}=1$

……………………………………………………

一般地，$a^1=a$，

$$\log_a a=1 \quad (a>0且a\neq1)$$

（3）把$8=2^3$代入$\log_2 8=3$中得$\log_2 2^3=3$.

把$\frac{1}{9}=3^{-2}$代入$\log_3\frac{1}{9}=-2$中得$\log_3 3^{-2}=-2$.

一般地，把 $N=a^b\ (a>0$ 且 $a\neq1)$ 代入 $\log_a N=b\ (a>0$ 且 $a\neq1, N>0)$ 中得

$$\log_a a^b=b\ (\text{其中}a>0\text{且}a\neq1)$$

(4) 把 $2=\log_5 25$ 代入 $5^2=25$ 中得

$$5^{\log_5 25}=25$$

把 $-\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{4}}2$ 代入 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=2$ 中得

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}2}=2$$

一般地，把 $b=\log_a N(a>0$ 且 $a\neq1$，$N>0)$ 代入 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq1)$ 中，得

$$a^{\log_a N}=N(a>0\text{且}a\neq1,\ N>0).$$

注意：利用上面四个对数恒等式解题时，要特别注意括号中的条件．如果不符合条件，则不可用这恒等式。

（翻开练习本做练习四）

例1. 求下列各式的值：

(1) $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}2}$；　　(2) $\log_{10}100$；

(3) $\log_{10}0.001$；　　(4) $\log_2\frac{1}{16}$；

(5) $\log_9 3$。

解：(1) 根据 $a^{\log_a N}=N(a>0$ 且 $a\neq1, N>0)$

得 $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}2}=2$；

(2) 根据 $\log_a a^b=b(a>0$ 且 $a\neq1)$

得 $\log_{10}100=\log_{10}10^2=2$；

(3) 得$\log_{10}0.001=\log_{10}10^{-3}=-3$；

(4) 得 $\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$；

(5) 得 $\log_9 3=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$。

例2. 回答下列问题：

(1) 以$\sqrt{5}$为底，$\frac{1}{25}$的对数是什么？

(2) 底是什么数时，128的对数是7？

(3) 底是$\frac{1}{3}$时，什么数的对数是-3？

解： (1) 设所求对数为x，根据题意得

$$\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{25}=x,$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^x=\frac{1}{25},$$

$$5^{\frac{x}{2}}=5^{-2}.$$

所以$\frac{x}{2}=-2$，

因此$x=-4$。

答： 以$\sqrt{5}$为底，$\frac{1}{25}$的对数是-4。

(2) 设所求的底数是x，根据题意得

$$\log_x 128=7,$$

$$x^7=128,$$

$$x=\sqrt[7]{128}.$$

$\therefore x = 2$。

答：底是2时，128的对数是7。

(3)设所求的真数为 x，根据题意得

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -3,$$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},$$

$$\therefore x = 27。$$

答：底是$\frac{1}{3}$时，27的对数是 -3。

例3. 求下列各式的值：

(1) $3^{4\log_3 5}$，　　(2) $7^{\log_{\frac{1}{7}} 6}$

解： (1) $3^{4\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4$

$$= 5^4$$

$$= 625。$$

(2) $7^{\frac{1}{7}^{6}} = \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^{\log_{\frac{1}{7}}5}$

$$= \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}}5}\right]^{-1}$$

$$= 6^{-1}$$

$$= \frac{1}{6}。$$

例4. 计算：

$$4\log_3 243 - \log_2 256 - 9\log_{(\sqrt{2}-1)} 1 + \log_8 \frac{1}{8}$$

$$- 20\log_{1000} 1000$$