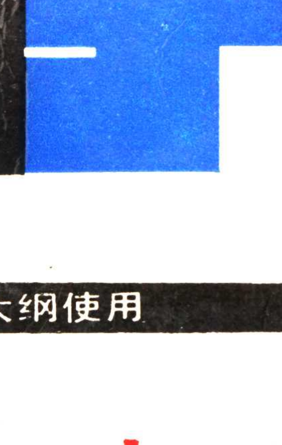
数学

配合新颁中学教学大纲使用

高中数学

胡炯涛 主编



北京师范学院出版社

配合中学新颁教学大纲使用

高中数学教与学

胡炯涛　主编

北京师范学院出版社

1988 年 · 北京

顾　问　鲍　霁

主　编　蔡健光

副主编　张国栋　高建军

编　委　（以姓氏笔划为序）

马　明　王立根　王绍宗　刘玉贞

华跃义　孟学军　张国栋　胡炯涛

高建军　董风举　鲍　霁　蔡健光

配合新颁中学教学大纲使用

高中数学教与学

[illegible]

北京师范学院出版社出版

（北京阜成門外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：16.125　字数：356千

1988年1月北京第1版　1989年11月北京第2次印刷

印数：162 001—193 000册

ISBN 7-81014-139-2/G·134

定价：4.85元

丛书小引

鲍　霁

在《全日制中小学各科教学大纲修订说明》的《前言》里，国家教委中小学教材审定委员会办公室指出:“最近经国家教委批准正式颁发的18个学科教学大纲，是修订现行教学大纲”而成的，是“今后一段时期过渡性教学大纲”。同时又指出:“这个教学大纲在新的教学计划和教学大纲全面实施前，将作为中小学教学的依据，考试的依据，教学质量评估的依据和编写教材的依据”。因此，这个教学大纲理所当然地受到全国中小学教师的普遍关注，而如何更快更好地把它贯彻到自己从事的教学实践中去，则成为大家集中思虑的问题。

向来以推动我国中小学教育事业发展为己任的北京师范学院出版社，闻讯后，随即会同《北京科技报》编辑部，共同邀请全国十四所著名中学（北大附中、人大附中、北师大二附中、北京师院附中、天津南开中学、华东师大一附中和二附中、上海师大附中、南京师大附中、福州一中和三中、东北师大附中、苏州中学、杭州学军中学)和北京教育学院二部的一些教学经验丰富且成绩显著的教师，针对大家所集中思虑的这个问题进行了深入讨论，并最后商定分工合作，各扬所长，以改革的精神为指导，编写一套配合中学语文、数学、英语、物理、化学各科教学使用的参考性读物；每科初中和高中总的各编写一册。这套丛书每册均题名为“教与学”。

有人可能会问，编写这套丛书既然是为了帮助解决教师所思虑的问题，那为什么在“教”之外还要冠名以“学”呢？这是因为，教与学是构成整个教学过程的基本矛盾的两方面，对立统一，不可分割。况且，教是为了学，教好是为了学好。不以学生学好为出发点的教师，很难教好；不了解教师的教学目的、内容和方法的学生，也不易学好。引申而言，这套丛书固然可供各科教师参阅，同时也可供学生参阅。正是基于这样的认识，我们期望这套丛书能成为中学师生的益友良师。

我们知道，任何期望的实现都是要付出代价的，而我们这个期望的实现，更要经过切实的努力。为此，我们早在一年前就着手准备，延请名师，组织队伍，深入研讨，认真编写，并成立编委会，出头把关，务求系统完整，科学实用。至于我们的期望能否实现，还有待实践检验，而中学师生是最权威的检验员。

1987年10月于北京花园村

目　录

第一章 函 数

〔知识提要〕

一、函数的定义

二、一次函数与二次函数

三、集合与映射

四、幂函数、指数函数与对数函数

第一节 一次函数与二次函数

一、一次函数

如果两个变量x和y之间的函数关系能表示成$y=kx$（k是不等于零的常量），那末这两个变量间的关系叫做正比例关系。函数$y=kx$叫做正比例函数。它的图象是经过点（0，0）和点（1，k）的一条直线。k叫做直线的斜率，当$k>0$时，直线过一、三象限，函数是上升的；当$k<0$时，直线在二、四象限，函数是下降的。

函数$y=kx+b$（$k\neq 0$）叫做x的一次函数。显然，当$b=0$时，一次函数变成$y=kx$，所以，正比例函数是一次函数的特例。$y=kx+b$的图象是把$y=kx$沿y轴平行移动b个单位而得。

形如$y=c$（或$y-c=0$）的函数（或方程）的图象是一条过点（0，c）且平行于x轴的直线；形如$x=c$（或$x-c=0$）的函数（或方程）的图象是一条过点（c，0）且平行于y轴的直线。

二、二次函数

函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 称为 x 的二次函数。它的图象是一条抛物线。在图象中起决定性作用的因素是 a 以及顶点坐标 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$。其中顶点坐标决定图象的位置，而 a 则决定着抛物线的形状（a 决定开口方向，$|a|$ 决定着张口的大小）。二次函数与二次方程、二次三项式、二次不等式有密切的联系，一般有"四个二次"之称。

三、例题分析

例 1 设 k、b 的取值范围是 $|k| \leqslant 1$，$|b| \leqslant 1$，试图示 $y = kx + b$ 图象的存在范围。

解 若取 b 值一定，k 在 $|k| \leqslant 1$ 范围内变动时，直线 $y = kx + b$ 在过点 $(0,\ b)$，斜率为 ± 1 的两直线所成左、右两只角的范围内变动。另外，当 b 在 $|b| \leqslant 1$ 的范围内变动时上述两只角沿 y 轴平移而得到图 1-1 中未画斜线的区域，即为所求。

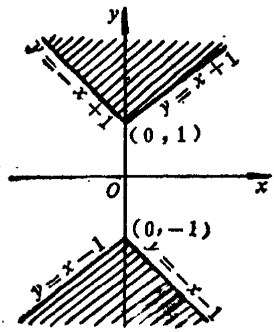


图 1-1

例 2 设梯形 $ABCD$ 中，$AB = CD = 5$，$AD = 7$，$BC = 13$，E 为 AD 上的定点，$AE = 4$。动点 P 从 D 出发，沿着梯形的周界依次经过 C、B，最后到达 A。设点 P 走过的距离为 x，$\triangle APE$ 的面积为 y，把 y 表示成 x 的函数，且画出图象。

解 可分别考虑点 P 在 DC、CB 和 BA 边上的三种情形。设 $\angle C = \theta$，则 $\angle D$ 的外角也等于 θ。

（1）当P在DC边上移动，即$0 \leqslant x \leqslant 5$时，

$$y = S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 4 \times x\sin\theta = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}x.$$

（2）当P在CB上移动，即$5 \leqslant x \leqslant 18$时，

$$y = S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8;$$

（3）当P在BA上移动，即$18 \leqslant x \leqslant 23$时，

$$y = S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 4 \times (23 - x)\sin\theta = \frac{1}{2} \times 4 \times (23 - x) \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}(23 - x).$$

综合上述三点，即得图象如图 1-2 所示的一段折线。

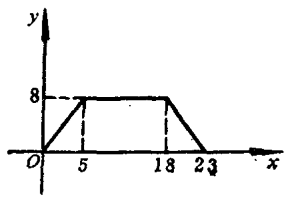


图 1-2

例3 变量x、y、z均大于 0，并满足$3y + 2z = 3 - x$及$3y + z = 4 - 3x$，求函数$\omega = 3x - 2y + 4z$的最大值与最小值。

解 一次函数的最大值与最小值常与它的定义域与值域相一致。这里可把ω变成x的函数，再由x的取值范围得到ω的最大（小）值。

由 $\begin{cases} 3y + 2z = 3 - x \\ 3y + z = 4 - 3x \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y = \frac{5}{3}(1 - x) \geqslant 0 \\ z = 2x - 1 \geqslant 0, \end{cases}$

推出 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$。

另外，代入得$\omega=\frac{1}{3}(43x-22)$，它是单调递增函数，

∴　当$x=\frac{1}{2}$时ω有最小值$-\frac{1}{6}$，

当$x=1$时，ω有最大值7。

例 4　20个劳力种50亩地，这些地可以种蔬菜、棉花或水稻，若这些农作物每亩地所需的劳力和预计产值如下：蔬菜—1/2劳力/亩，预计产值110元；棉花—1/3劳力/亩，预计产值75元；水稻—1/4劳力/亩，预计产值60元。问怎样安排，才能使每亩地都种上作物，所有劳力都有工作，而且农作物的预计总产值达到最高？

解　设蔬菜、棉花、水稻的土地顺次为x亩、y亩、z亩，预计总产值为W元，则据已知条件得

$$x+y+z=50\cdots①,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=20\cdots②.$$

$W=110x+75y+60z\cdots③$。这是一个x、y、z一次函数的最大（小）值问题，象上例一样，它可以转化成闭区间上求x的一次函数最大（小）值问题，从而据一次函数的增减性得解。

由①、②得$y=90-3x$，$z=2x-40$，代入③得

$W=4350+5x$。但由$x\geqslant0$，$y=90-3x\geqslant0$，$z=2x-40\geqslant0$，得$20\leqslant x\leqslant30$。

∴当$x=30$时，W取最大值4500，这时$y=0$，$z=20$。所以种30亩地蔬菜，20亩地水稻，才能使产值总数最高，达4500元。

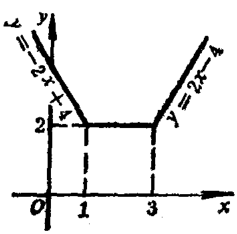


图 1-3

例 5　作函数$y=|3-x|$

$+|x-1|$的图象。

解 当$x\geqslant 3$时，$y=x-3+x-1=2x-4$；

当$1\leqslant x\leqslant 3$时，$y=3-x+x-1=2$；

当$x\leqslant 1$时，$y=3-x+1-x=4-2x$。

据上作出图象为一段折线。(图 1-3)。

例 6 求抛物线$y=4-9x-x^2$顶点的坐标和轴的方程。

解 $y=4-\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{81}{4}=-\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{97}{4}$，

所以顶点是$\left(-\dfrac{9}{2},\ \dfrac{97}{4}\right)$，轴的方程是$x=-\dfrac{9}{2}$。

例 7 设x的函数$f(x)=ax^2-2x+2$ (a为常数)，对于满足$1<x<4$的一切x值都有$f(x)>0$，求常数a的范围。

解 可按$a=0$，$a>0$，$a<0$三种情形分别讨论。

(1) 当$a=0$时，$f(x)=-2x+2$，则$f(2)=-2$不合题意；

(2) 当$a<0$时，$f(2)=4a-2<0$，不合题意；

(3) 当$a>0$时，$f(x)=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2+2-\dfrac{1}{a}$ …①，图象是向上开口的抛物线，对称轴是$x=\dfrac{1}{a}$。

$f(2)=a\left(2-\dfrac{1}{a}\right)^2+2-\dfrac{1}{a}=2a\left(2-\dfrac{1}{a}\right)$。

若$0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则$f(2)\leqslant 0$，不合题意；

若$a>\dfrac{1}{2}$，则$2-\dfrac{1}{a}>0$，因而①式对一切实数值x都有$f(x)>0$，当然满足$1<x<4$时$f(x)>0$。

$\therefore a>\dfrac{1}{2}$。

例8 有一个x的二次式，当$x=1$时取最大值16。它的图象在x轴上截得的线段长为8，求此二次式。

解 当$x=1$时取最大值16的二次式可表示成$a(x-1)^2+16$，$a<0$，它的图象关于$x=1$对称。又因在x轴上截得的线段长为8，因而图象与x轴交点的横坐标为1 ± 4，所以$a(5-1)^2+16=0$，$\therefore a=-1$。所求式为$-(x-1)^2+16=-x^2+2x+15$。

例9 设抛物线$y=ax^2+bx+c$通过点$(-2, 20)$，$(1, 2)$，$(3, 0)$，求a、b、c的值。

解 以$(-2, 20)$代入方程，

$$\therefore 4a-2b+c=20 \qquad \cdots \quad ①$$

再以另两点代入可得$a+b+c=2 \qquad \cdots \quad ②$

$$9a+3b+c=0 \qquad \cdots \quad ③$$

解方程组①、②、③得$a=1$，$b=-5$，$c=6$。

例10 设二次函数$y=ax^2+bx+c$的最大值等于$-3a$，且它的图象通过点$(-1, -2)$、$(1, 6)$，求a、b、c的值。

解 同上，可把两点代入，再把a、b、c中的两个表示成第三个的函数。

以$(-1, -2)$，$(1, 6)$代入整理得$a-b+c=-2$，$a+b+c=6$，解得$b=4$，$c=2-a$，则$y=ax^2+4x+(2-a)=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2+2-a-\frac{4}{a}$，由于$y$有最大值$-3a$，$\therefore a<0$，$2-a-\frac{4}{a}=-3a$，从第二式得$(a-1)(a+2)=0$，取$a=-2$，$\therefore c=4$。

$\therefore \quad a=-2,\ b=4,\ c=4$。

例11 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点（1，6），顶点是（-1，2），求此二次函数。

解 由顶点知二次函数的表达式是 $y=a(x+1)^2+2=ax^2+2ax+a+2$，$\therefore b=2a$，$c=a+2$，以 $x=1$，$y=6$ 代入，得 $6=4a+2$，$a=1$，推知 $b=2$，$c=3$。

$\therefore \quad y=x^2+2x+3$。

例12 下列各图是当 a、b、c 取不同值时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象。指出每一个图象对应 a、b、b^2-4ac 的正、负。

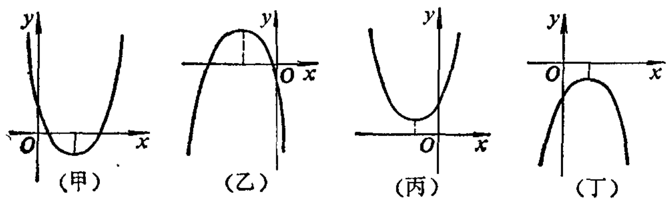


图 1-4

解 顶点坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，据此考虑

（1）$a>0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}<0$，

$\therefore \quad a>0,\ b<0,\ b^2-4ac>0$。

（2）$a<0$，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}>0$。

$\therefore \quad a<0,\ b<0,\ b^2-4ac>0$。

（3）同上推知 $a>0$，$b>0$，$b^2-4ac<0$。

（4）同上推知 $a<0$，$b>0$，$b^2-4ac<0$。

例13 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ …①，$y=px^2+qx+r$ …②。

见图 1-5、根据图象回答如下问题：

（1）判断 p、q、r、$a+c$、pa^2+qa+r 的符号；

（2）求满足 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$ 的 x 范围；

（3）记两图象的交点横坐标是 α、β。把 $\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ 用 a、b、c、p、q、r 表示。

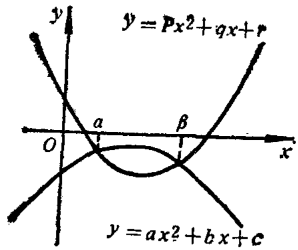


图 1-5

解 （1）显然 $a<0$，$p>0$，$c<0$，$r>0$，$\therefore a+c<0$。

又由 $a<0$，②的图象在 y 轴左边部分位于 x 轴上方，可知②中令 $x=a$，则 $y>0$，即 $pa^2+qa+r>0$。

②式变形为 $y=p\left(x+\dfrac{q}{2p}\right)^2-\dfrac{q^2-4pr}{4p}$，其顶点横坐标为正，$\therefore -\dfrac{q}{2p}>0$，但 $p>0$，$\therefore q<0$。

总之，p，r，pa^2+qa+r 为正；q，$a+c$ 为负。

（2）$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$，即

$ax^2+bx+c\geqslant px^2+qx+r$，$\therefore \alpha\leqslant x\leqslant\beta$。

（3）考虑方程 $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$，即

$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0$，$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{b-q}{a-p}$，$\alpha\beta=\dfrac{c-r}{a-p}$。

例14　m取何值时，方程$x^2+2mx+2m+1=0$在区间（-4，0）中有两个不相等的实数根？

解　问题可转化为确定函数$y=x^2+2mx+2m+1$的图象，与x轴交点在（-4，0）与（0，0）之间时的m取值范围，即可分析抛物线与x轴的关系得到有关系数的取值。

$\because$　$a>0$，$\therefore$开口向上，且抛物线与x轴的交点在（-4，0），（0，0）之间，顶点在x轴下方，所以有关系式

$$\begin{cases} f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)<0, \\ -4<-\dfrac{b}{2a}<0, \\ f(-4)>0 \\ f(0)>0. \end{cases}$$

而这里$-\dfrac{b}{2a}=-m$，则有

$$\begin{cases} m\geqslant 1+\sqrt{2}\text{或}m\leqslant 1-\sqrt{2}, \\ 0<m<4, \\ m<\dfrac{17}{6}, \\ m>-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

解得$1+\sqrt{2}\leqslant m<\dfrac{17}{6}$。

例15　已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与直线$y=25$有交点，且不等式$ax^2+bx+c>0$的解是$-\dfrac{1}{2}<$