《数学参考资料》增刊

中学数学专题选讲

北京师范学院数学系

1980

前　　言

一九七八年中学数学竞赛举行以来，全国各省、市、区、县和学校大都组织了数学课外小组，有重点地对一部分青少年进行了辅导，不仅提高了参加课外小组的同学们的数学知识水平及分析问题与解答问题的能力，也促进了中学数学教学的研究工作。

北京市科学技术协会、北京市教育局与北京市数学学会曾联合举办了中学生数学辅导讲座，北京市少年宫还为数学小组编写了讲义，定期讲授。这些内容，包括对中学数学知识较系统深入的研究，对一些典型数学题目作了较详细的分析并揭示了解题的基本思想与一般方法。可供中学生和知识青年复习中学数学之用，也可作中学数学教师辅导课外小组的参考资料。

这次我们把这些内容汇编成册，仍保留专题的独立形式，便于大家选用。由于时间仓促，收集的并不齐全，在编辑中也还有不少缺点。

在编辑过程中，我们得到系领导的关怀，以及许多热心的同志们的鼓励，河北省安次县廊坊日报社印刷厂给予大力协助，特别是数学研究所，北京师范大学，北京师范学院以及北京市有关中学的老师们参加了讲授与编写辅导材料的工作，在此一并表示谢意。

北京师范学院数学系
《数学参考资料》编辑组
一九七九年

目　　录

怎样复习数学

裘宗沪

讲一些不成熟的意见，供同学们参考.不妥当之处，欢迎大家指正。

一、重视基本训练

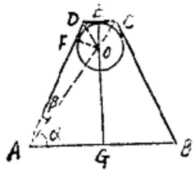
复习大纲中指出：“……特别应着重基础知识的学习，基本技能的训练和逻辑思维能力的培养。”因此我们复习时应着重在打好基础上下功夫，把注意力放在巩固过去所学的基础知识上。

难度较大，比较复杂的数学题，也是由一些基础题组成的，这些基础题要靠基础知识和基本技能来解决，也就是靠基本功。

例1、在等腰梯形内，有一元与梯形的上底和两腰都相切，已知梯形下底的长为6，高为5，元的半径为1，求梯形的腰和下底夹角的余弦值。

（北京市78年数学竞赛第一试第8题）

（图1）



解这一题，可以分成四步：第一步，证明内切园园心O，在上、下两底中点连线

EG上，第二步，从直角三角形AGO，

已知：$AG=3$ 和 $OG=EG-OE=4$，可算出 $AO=5$，

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$；第三步从直角三角形AOF，可算出$\sin\beta=\frac{1}{5}$；

$\cos\beta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，第四步计算$\cos(\alpha+\beta)$就得底角余弦的数值是$\frac{6\sqrt{6}-4}{25}$。

四步可以看成四个基础题。解出四个基础题，需要等腰梯形的特征。勾股弦定理、正弦余弦的基本定义和余弦的和角公式等基本知识。其中有一个基本环节解决不了，这道题就做不出来。当然把这些基础题串连一起，需要一些技巧和灵活的思路，可是，基础知识掌握不好，没有熟练的基本功，基础题解决不了，也就谈不上技巧的运用和思路的开展。因此要提高分析问题和解决问题的能力，一定要立足于比较扎实的基础。

在过去几年中，祸国殃民的四人帮干扰和破坏学校的教学，目前，同学们的基础是不太行的。因此在全面复习中学课程的时候，很需要补一补基础，从基本功入手。

下面我们举一些例子，希望引起大家对基本训练的重视。

1.代数运算不熟练

有的同学计算$a\times b\div a\times b$，结果竟然是1。正确结果应是b^2，由于运算的顺序颠倒了，就导致错误，有些同学，做有关比例的几何题，由于比例的运算不熟练，做题就无从入手，例如不知道从$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，可以得到$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$。北京

参加全国数学竞赛的同学集训时，有一道练习题如下：

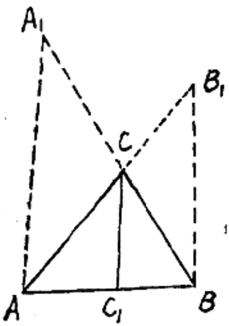
例2、$\triangle ABC$的一边AB上任取一点C_1，过A作CC_1的平行线与BC的延长线相交于A_1，过B作CC_1的平行线与AC的延长线相交于B_1，求证：

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$$

这一题并不难。由$AA_1 /\!/ CC_1$得出$\triangle AA_1B \backsim \triangle CC_1B$，就有$\frac{CC_1}{AA_1}=\frac{BC_1}{AB}$。

$$从\frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}=\frac{BC_1}{AB}+\frac{C_1A}{AB}=1.$$

就可以得出结论：$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$。可是有的同学由于比例运算不熟练，解题很繁，或者根本做不出这道题。参加集训的50人中有近一半的人，此题做得不好，这也足以说明基本功较差。



（图2）

再举全国数学竞赛第二试第2题（1）作为例子：

例3、分解因式：

$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

解：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

$=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}$

$=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

有些同学算不出$\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$等于什么。目前课本中没没有$x^n-1$的分解这一内容，前一步做不出来，还情有可愿。最后一步硬做除法就可解决，代数式除法（长除）是代数运算中最基本的技能之一，有的同学（甚至在竞赛中成绩较好的同学）就不会。据说，参加全国竞赛三百五十名同学中，做对此题的人数寥寥无几。有不少同学就差最后一步，功亏一篑，实在令人遗憾。

2.基本概念不清。我们也举三个例子。

例4、解不等式：$ax-2>x-3a$。

经移项后得：$(a-1)x>2-3a$，于是

当$a-1>0$，　　$x>\frac{2-3a}{a-1}$。

当$a-1<0$，　　$x<\frac{2-3a}{a-1}$。　　负数除不等式两边，要改变符号，有的同学就不太清楚。

当$a-1=0$时，很多同学回答是无意义，对吗？当然0是不能做除数，可是$a-1=0$，即$a=1$，代入原来不等式，就得$x-2>x-3$。此时x为任意实数，不等式都成立，也就是有无穷多个解，怎能说无意义呢？

例5、解方程：$(2x+1)^x=(x-1)^x$

有的同学，竟然讨论x是奇数或偶数来确定x的值，奇、偶数是整数，这里x并不限于整数，x应在实数范围内求解。某次测验中有六、七个人都去讨论x的奇偶性，岂不是概念

不清吗？实际上，只要指数幂概念清楚，此题不难解。

排除$x=1$的情形，方程就可转换成$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}=1$。只有两种可能，使等式左边取值1。其一，$x=0$，其二，底数$\frac{2x+1}{x-1}=1$，即$x=-2$。不少人把$x=0$这一解漏掉了，说明他对零指数幂概念不太清楚。

例6、　　化简$\cos\alpha\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}}$

这一题也在集训班测验过，只有3个人做对了。我们在实数范围内考虑问题，根号内不能是负数，$\cos\alpha$ 和$\sin\alpha$必须取同样符号，因此α在第一象限或第三象限内才有意义。但是$\cos\alpha$在第三象限取负值，因此，当$0<\alpha<90°$，$\cos\alpha$搬进根号内后，等于$\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$；当$180<\alpha<270°$，化简后将等于$-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$，这一题也涉及算术根的概念。

基本概念清楚是非常重要的，概念清楚可以看清问题的实质，提高解题能力。对此，我们亦举一例。

例7、方程$x^2+ax+1=0$和方程$x^2+x+a=0$有相同的根，问a取什么值。

不少同学解此题都用公式求根，这样就要解无理方程，是非常麻烦的。

当确定a的值，就可以求出两个方程相同的根，反之，当知道两个方程相同的根，也就可以确定a的值。如果对联立方程组的概念清楚的话，就可以把这一题看成含有两个未知数x和a的联立方程组来求解。不过，解法与通常的消元法稍不同。将两个方程相减，就可得到方程

$$(a-1)\ x=\ (a-1)$$

因为$a-1=0$将使等式成立，所以$a=1$是一个解，另外，当$a-1\neq 0$时，x必须取值1，才能使等式成立，于是将$x=1$代入原方程之一，得$a=-2$，这就得到另一个解。

3．目前很多同学缺乏几何图形的想象力，几何直观能力较差，也举二个例子。

例8、把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上，下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度。

这是全国数学竞赛第一试第5题。球的摆法是解题的基础，正确摆法是四球的球心构成一个正三棱锥，可是有的同学却摆成右图那样，根本不满足“两两相切”条件。也不想一想，这样摆法，上面的球能搁得住吗？现在就有一些同学，看了几何题的叙述，竟然画不出图，这怎能正确地做题呢？

图3

再给大家讲一个例子，有一位同学不久前做了这样一道几何题。

例9、△AEF中，B是AE上一点，D是AF上一点，且BD∥EF。连接BF、DE相交于C，连接AC延长与EF相交于G，求证EG＝GF。

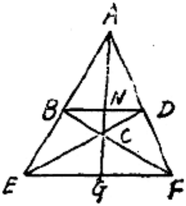


图4

按照题意画图应是右图那样。后来这位同学看到了全国数学竞赛试题，其中第二试第1题是：四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连

线与四边形的一条对角线平行，证明，另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段。

这与上面题目仅仅是叙述上不同，实质上是完全一样的，可是这位同学却发现不了这一点，经别人指出，才恍然大悟。从这一例子，一定程度上反映出他的几何直观能力较差，另外也说明，做过的题目并没有真正搞透。

这里顺便介绍一下，上面题目的一种证法。

设AC与BD的交点是N，从BD∥EF，可以得出$\triangle AEG \backsim \triangle ABN$和$\triangle AFG \backsim \triangle ADN$，因此$\frac{BN}{EG}=\frac{AN}{AG}=\frac{ND}{GF}$。又从BN∥EF，可以得出$\triangle NCD \backsim \triangle GCE$和$\triangle BCN \backsim \triangle FCG$因此$\frac{DN}{EG}=\frac{CN}{CG}=\frac{BN}{GF}$。将两个等式两端相乘，就得到

$$\frac{BN\cdot DN}{EG^2}=\frac{DN\cdot BN}{GF^2}，即\frac{1}{EG^2}=\frac{1}{GF^2}，因此EG=GF.$$

上面的一些例子，反映出当前有些同学基础不太好，希望通过复习，把基础打得扎实一些。怎样补基础，要从自己的实际情况出发，要能抓住自己的薄弱环节，对此，同学们要多听从老师的指导。

二、不断总结经验，提高解题的技巧。

做习题是很重要的复习方法，数学知识只有通过练习才能得到巩固，学会运用。但是，做习题不能光求数量多，也要求质量好。有些同学已做了不少题，可是收效不大，提高不快。如果象前面讲到的那位同学，做过的题都“不认得”这就颇成问题。

怎样讲究做题的质量呢？这要求我们做题时，做一道搞

透一道，并且随时总结经验。关于总结解题的经验，有几点不成熟的意见，供同学们参考。

1.要逐步训练自己会区分题目类型，培养举一反三的能力。力争搞透典型的题目，找到解一类题目的关键。

例如一元二次方程的题目，有的是探讨二次曲线与直线的关系，有的是文字系数待定数值，有的从已知二根是三角函数来确定方程等等，表面上看来是不同的题目，实质上是大同小异，解法不外乎根的判别式和根与系数关系灵活运用，因此如能充分注意到它们的“大同”又能认识它们的“小异”，以后再碰到这类题目就会心中有数，单刀直入熟练求解。

从圆内角的关系，形成相似三角形，然后论证线段的比例关系（或者乘积形式），这一类题目也很多，大家可以总结一下。

2.对一种解题技巧分析它的特点。

例10、计算$\sin18°\cos36°$

解：$\sin18°\cdot\cos36°=\dfrac{2\sin18°\cos18°\cos36°}{2\cos18°}$

$$=\frac{\sin36°\cos36°}{2\cos18°}=\frac{\sin72°}{4\cos18°}=\frac{1}{4}$$

上面解题中的“凑配”是解三角题常用的，它有两个特点：

（1）配成可以逐次利用正弦的倍角公式；

（2）分母中配上的恰好与分子的计算结果抵销。

如果你掌握了这两个特点，就容易看出，这一技巧适用于下列题目。

计算：$\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°\sin90°$

（答案：$\frac{1}{16}$）

$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$　　（答案：$\frac{1}{8}$）

容易看出这一技巧计算$\sin20°\sin40°\sin60°\sin80°$却是不适用的。

3.摸索规律

例11、已知x,y,z为三个不相等的实数，且$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，求证$x^2y^2z^2=1$

大家是否注意到，这一题的已知条件有一个特点，将x换y，y换成z，z换x，也就是将x,y,z轮换一下，条件仍然不变。如果注意到这一点，解题的关键就找到了。当计算出$x-y=\frac{y-z}{yz}$，按照轮换的规律，你马上就会想到还有$y-z=\frac{z-x}{xz}$和$z-x=\frac{x-y}{xy}$这两个等式。因此，将三个等式两端相乘，等式两边都有$(x-y)(y-z)(z-x)$，消去后就得$\frac{1}{x^2y^2z^2}=1$，即得$x^2y^2z^2=1$。

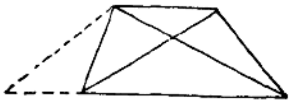
上述这样规律是很有用的，请再看一个例子。例如因式分解：$a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-a)+c^2a^2(a-c)$，$a,b,c$也是可以轮换的。当$b=a$，上式就等于0，便知它有因式$(b-a)$按照轮换规律，它也必有因式$(c-b)$和$(a-c)$这样解题的方向就明确了。

善于摸索规律，解题时就能认清方向，少走弯路。例

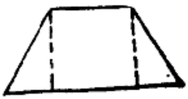
如：“有关三角形中线的题，常要引进平行四边形。”“二圆相切的题，添一条公切线常有好处。”“证几何不等式的题，通常要从下面定理出发考虑，三角形二边之和大于第三边，二边之差小于第三边；大角对大边和小角对小边。”这一些经验之谈（不是定律）是很有用的。

做几何题，对正三角形、直角三角形、平行四边形、梯形等，特殊图形要总结一些规律。例如，有关梯形的问题，常常要作下面三种形式的转化，可以用下面三个图形来说明。

(1)



(2)



(3)

（1）将梯形转化为一个平行四边形和一个三角形，这个三角形有二边与梯形的两腰相等，另一边等于下底与上底之差。（2）将梯形化为一个三角形，它的二边与梯形两条对角线相等，另一边等于两底之和。（3）这一转化常用于等腰梯形，将梯形转化成两个直角三角形和一个矩形。

对正三角形、直角三角形和平行四边形等图形的特性，

同学们是否也能摸索出一些规律呢？

4.注意代数、三角、几何相互联系。

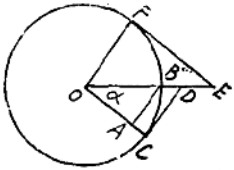
对此是大有文章可做的，这里只举一个例子。

学习三角，单位圆（半径为1）是很起作用的。在图中 $BA\perp OC$，$DC\perp OC$，$\angle OFE=90°$，$OF\perp EF$。于是α角的三角函数就可以用图中线段表示。

$AB=\sin\alpha$，$OA=\cos\alpha$，

$CD=\mathrm{tg}\alpha$，$FE=\mathrm{ctg}\alpha$，

$OD=\sec\alpha$，$OE=\csc\alpha$。



利用这一图形，很容易证明三角中常用不等式和恒等式。

例如：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$，$\mathrm{tg}\alpha>\sin\alpha$；$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\geqslant 2$。

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$，$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$。证明最后一个不等式，要注意$\alpha>45°$时图形的变化。

5.从失败中总结经验

有些同学，做题时绕了弯路或者做不出题耽误了一些时间，就感到非常可惜。因此，做题求快，做不出就马上问别人，自己不愿多想。这样是不好的，不刻苦钻研，是不会有多大进步。做每一道题都很顺利，也就无从求进步。做题不顺利耽误一些时间，其实是不用可惜的，失败常常给成功的解题提供线索。因为经历了失败，把有些解题不对头的路子堵死了，如果你能及时吸取教训，以后这些"死路"和"弯路"就可以不走了。同时，也使你逐渐地摸索到正确的路子。

例12、三角形三边成等差数列，周长是36，面积是54，

求三边长。

通常三数成等差数列，应设首项是a，公差是d，于是设三边长是a，$a+d$和$a+2d$.可是你试一试后，就会发现，这样做将非常麻烦。通过这一“失败”，就会设三边长是$a-d$，a，$a+d$。

从$(a-d)+a+(a+d)=36$，得$a=12$。三边长是$12-d$、12和$12+d$。半周长是$36\div 2=18$，$18-(12-d)=6+d$，$18-12=6$，$18-(12+d)=6-d$。用海罗一秦九韶求面积公式，可列出关于未知数d的方程：

$$\sqrt{18\cdot 6\cdot(6-d)(6+d)}=54$$

化简得$d^2=9$，$d=\pm 3$。因此三边长是9、12和15。

三、少而精量力准备

有些同学搜集了多种复习资料、试题解答，用很多时间，化很大精力去钻偏题，猜试题，却忽略了基本知识和基本技能的掌握，力气没有用在刀口上。

目前出的复习资料未必对同学有针对性，有些也编得比较粗草，我认为同学们还是少看为好。看的话，从中挑一本好的，不要盲目地东翻西抄，死记硬背，复习还要系统性，基本知识要连贯地掌握和巩固。复习资料让老师们看比较合适，他们能从中吸取精华，并能针对同学们的实际情况进行讲解辅导。

看题解也不一定真正有益，弄得不好反而干扰和妨碍同学们的独立思考。看一道题的解答，如果能吃透解题者的思路，也许还能有所借鉴，否则是囫囵吞枣。为了加强基本训练，同学们在复习时应力争独立思考做一些有意义的习题，很多老师已为同学们选了一些有针对性、典型性的习题，同

学们应该认真做一做，如果还有余力，还可以对你的基础作如下测试：从去年各省市试题中，挑选一些考察基础的题目（一般是前几个题），一道题评分标准几分，你就用几分钟时间做，看是否能正确无误。因为120分钟做100分的题，上面这样的时间规定大体是合理的。这就可以测试熟练和正确程度。

有几位同学，曾问过我两个问题，这里简单说一下个人看法。

1.基础与提高

基础要全面的复习。什么是基础，复习大纲中已讲了，要花点时间钻研一下大纲，另外还要多听从老师指导，从自己的实际情况出发，抓住薄弱环节补补基础，如果各科基础都已复习得较好，并有余力，就可以在有的方面从深度和广度上作一些提高。但时间已不多，抓提高一定要有重点，应该从已掌握得较好的方面去提高，要少而精，量力而行。有些同学怕考这样、那样，总想面面俱到，复习光求数量，不求质量，一头未抓好，就想抓另一头，抓的头绪很多，结果两头落空。

2.关于平面几何

平面几何是很多同学的薄弱环节。这次全国数学竞赛试题中几何题不少，使许多同学都认为这次高考中平面几何题也一定不少，而且不会太容易，因此很多时间做各种各样的几何题，这里姑且不说这样猜测可靠性有多大，但是平面几何决不是短时间能突击的。没有一定的基础，做有些题是很困难的，花了很多时间和精力，也做不了几道题，而且孤立的做几道题很难融会贯通，这是“少慢差费”的复习。