高等学校教材

XIAN XING ZHEN DONG JIAO CHENG

# 线性振动教程

高淑英 沈火明 编著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等学校教材

# 线性振动教程

高淑英　沈火明　编著

中国铁道出版社

2003年·北京

(京)新登字 063 号

## 内　容　简　介

全书分为两篇，共八章。第一篇为离散系统的振动，包括概论、单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、多自由度系统固有特性的近似解法。第二篇为连续系统的振动，包括弦和杆的振动、梁的横向振动、连续系统固有特性的近似解法、薄板的振动。

本书可作为力学、机械和土木类本科生和研究生的教材，也可作为从事与振动相关的工程技术人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性振动教程/高淑英等编．－北京：中国铁道出版社，2003.8
ISBN 7-113-05309-2

Ⅰ.线…　Ⅱ.高…　Ⅲ.线性振动－教材
Ⅳ.0321

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045348 号

**书　　名**：线性振动教程
**作　　者**：高淑英　沈火明　编著
**出版发行**：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
**责任编辑**：程东海
**封面设计**：蔡　涛
**印　　刷**：中国铁道出版社印刷厂
**开　　本**：787×1092　1/16　印张：11.25　字数：274 千
**版　　本**：2003 年 9 月第 1 版　　2003 年 9 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～2 000 册
**书　　号**：ISBN 7-113-05309-2/TB·55
**定　　价**：16.50 元

# 前　言

随着科学技术的进步，振动问题已成为各个工程领域内经常提出的重要问题。计算机的广泛使用和动态测量技术的日益发展，也为复杂振动问题的解决提供了有力的工具。因此，线性振动已成为工程技术人员所必须具备的理论知识。线性振动是工程力学专业本科教学的主干课程之一，也是机械类、土建类、水利类和航空类等工程专业本科生和研究生教学中的一门重要的专业基础课程。通过本门课程的学习，要求学生掌握线性振动的基本理论和分析、计算方法，并能初步应用于工程解决各类振动问题。

全书分为两篇，共八章。第一篇为离散系统的振动，包括概论、单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、多自由度系统固有特性的近似解法等四章内容。第二篇为连续系统的振动，包括弦和杆的振动、梁的横向振动、连续系统固有特性的近似解法、薄板的振动等四章内容。各章均附有适量的习题，以加深对内容的理解。本书既适合用作教材，也可作为从事与振动相关的工程技术人员的参考书。

本书第一、五、六、七、八章由高淑英编写，第二、三、四章由沈火明编写。全书由高淑英加工定稿。编写工作得到了各方面的支持和鼓励，并且汲取了国内外线性振动教材的许多宝贵经验。本书取材于作者在西南交通大学所编写的讲义，曾在西南交通大学工程力学本科生和力学、机械和土木类研究生中试用。

限于水平，书中不足之处恳请读者指正。

作者

2003 年 7 月

# 目　　录

## 第一篇　离散系统的振动



## 第二篇　连续系统的振动

# 第一篇　离散系统的振动

## 第一章　概　　论

### §1—1　线性振动研究内容

随着科技和生产的发展及近代电子技术和数字计算机的发展和广泛的应用,使振动领域的基础理论和应用技术的研究日益广泛和深入。过去无法实现的复杂计算和测试皆可能实现,使振动的研究取得了突破性的进展。

当前我国处在经济建设的高潮,大量的工程项目正在建设中,工程的设计,工程问题的分析处理,产品质量的提高,设备有效运行的故障排除等,都提出了大量需要研究的问题。总之,振动研究的目的是探究工程实际中使研究对象发生振动的原因及其运动规律对机器、结构物和人体的影响,寻找控制和消除振动的方法。振动的研究大致有以下几个方面:

(1)确定系统的固有频率,预防共振的发生;

(2)计算系统的动力响应,以确定机器、结构物受到的动载荷或振动的能量水平;

(3)研究平衡、隔振和消振方法,以消除振动的影响;

(4)研究自激振动及其他不稳定振动产生的原因,以使有效地控制;

(5)进行振动检测,分析事故原因及控制环境噪声;

(6)振动技术的利用。

以上这些问题涉及到线性振动、非线性振动、随机振动及其他学科等。本书是线性振动教程,故着重讨论前面两类问题。

线性振动研究的内容可以用下面的框图作一扼要说明:

| | | |
|---|---|---|
| 激励(excitation) → 输入(input) | 系统 (system) | 响应(response) → 输出(output) |

系统是指所研究振动问题的对象(机械产品、工程结构或零部件),它表征了系统本身的特征,如质量(惯性)、弹性(刚度)、阻尼。

激励(输入)是指外界对系统的作用,如初始干扰、外激振力等。

响应(输出)是指系统在激励的作用下所产生的输出(位移、速度和加速度),通常称为系统的动态响应。

从计算分析来看,只要已知其中两者的情况即可求得第三者。从此意义来说,工程实际中所研究的所要解决的问题可分为以下几类:

(1)响应分析

已知系统激励和系统参数情况下求系统响应问题,它包括位移、速度、加速度和力的响应。为计算机器或结构物的强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。

(2)系统设计

已知系统激励的情况下设计合理的系统参数，来满足动态响应或其他输出的要求。这是得到一台设计良好的机器非常重要的一步，同时它也有依赖于前一个问题的解决，故在实际工作中这两个问题是互相交替进行分析的。

(3)系统识别

已知系统的激励和响应的情况下求系统的参数，以便了解系统的特性，这个问题称为动力学反问题之一。目前较为有效的方法是采用测试技术和理论相结合的途径。

(4)环境预测

已知系统的输出及系统参数的情况下，来确定系统的输入，以判别系统的环境特性。

## §1—2　振动分析中力学模型的建立问题

振动分析中一般都要通过测试与理论分析来建立力学模型。经过不断地修正，使一些工程中的振动问题获得更精确的力学模型(理论的、数值的或实验的力学模型)。

对于一台机器或一种工程结构的振动分析，首要的步骤是如何建模。由于它们本身组成系统的复杂性，外界载荷的复杂性、多样性(相对静载荷而言)及不可预见性(风载荷、地震载荷)往往出现突发性，为此建立振动问题力学模型必须根据需要解决的问题来考虑研究对象以及外界对它的作用来简化为一个计算所用的力学模型。例如，对高层建筑作地震反应分析时，将根据所研究的对象特点不同所建立的计算力学模型也不同。

(1)刚性楼盖高层建筑

对采用现浇钢筋混凝土楼板的体型规则的高层建筑，由于楼盖的水平刚度很大，在确定结构动力特性(频率、主振型)时，可采用串联质点系〔图 1—1(a)〕。

(2)非刚性楼盖高层建筑

对采用钢筋混凝土预制楼板的高层建筑以及体型复杂的高层建筑，需要考虑地震作用下各层楼盖所产生的水平变形，确定结构动力特性时，宜采用串并联质点系〔图 1—1(b)〕。

(3)偏心结构高层建筑

结构存在着偏心时，即使在地震动单向平动分量作用下，也会发生扭转振动。对采用串联质点系作为其力学模型就不可能体现出这种扭转振动的效果。为此，将采用串联刚片系作为偏心结构高层建筑的振动分析的力学模型〔图 1—1(c)〕。该模型中每层刚片具有两个正交的水平位移和一个转角，共 3 个自由度，如图 1—1(d)所示。众所周知，不管机器或结构物会产生怎样的振动形式，其主要的原因在于其本身的质量(惯性)和弹性。阻尼则使振动抑制。从能量观点出发，质量可储存动能，弹性可储存势能，而阻尼则消耗能量。当外界对系统作功时，使系统质量吸收动能而获得运动速度，弹簧就储存了变形而具有使质量恢复到原来状态的能力。由于能量不断地变换就使系统质量在平衡位置附近作往复运动。如果没有外界始终不间断地给质量输入能量，那么，由于阻尼存在而消耗其能量，将使振动趋于停息。由此可见，质量、弹性和阻尼是振动系统力学模型的三要素。

所有实际机器和结构物元件的质量和弹性皆是分布的。若将实际上是分布的参数(如高层建筑、桥梁、齿轮和齿轮轴等)经过简化，把它简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧或弹性杆和阻尼器联结在一起的系统。此时振动系统的力学模型就有连续系统和离散系统两种不同计算力学模型。

可见,在振动分析中,力学模型的建立需注意以下几点:

(1)根据研究目的,需要解决什么问题,对实际结构进行调查研究,找到其特点。

(2)外界对研究对象的作用要分析清楚,判别是确定载荷,还是不确定载荷,在线性振动中,将不讨论不规则载荷,这种载荷的作用将在随机振动书籍中专门解决。

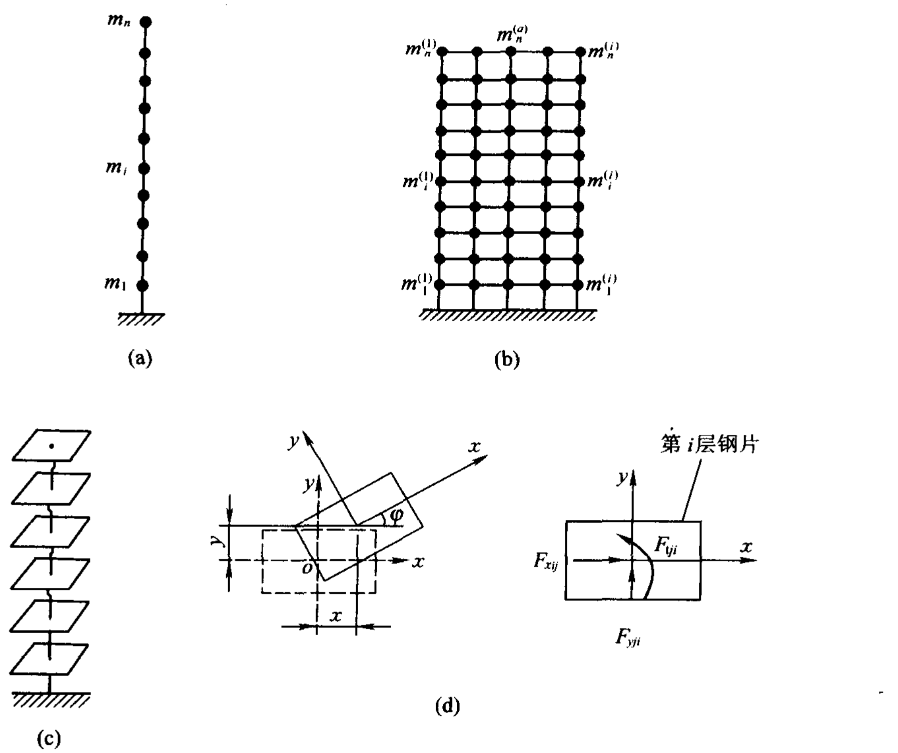

图 1—1

(3)考察研究对象以空间的,还是平面的问题来研究;以离散系统,还是连续系统来解决;由一个自由度系统还是多个自由度系统来处理。

## §1—3 数学建模问题及求解

当力学模型建立之后,需建立系统参数(质量、弹性、阻尼)、激励及响应三者之间的关系式,即数学表达式——运动微分方程式。

根据理论力学、材料力学中的牛顿第二定律、动力学普遍定理、动静法或拉格朗日方程建立离散系统运动微分方程,另外,再考虑材料力学中取单元、变形等概念、公式对连续系统建立运动微分方程。

对离散系统所建立的振动微分方程一般为二阶常微分方程。当系统为多自由度系统时,则为二阶联立微分方程组。对连续系统所建的振动微分方程一般为偏微分方程。

由于微分方程是系统振动行为的数学描述,为此人们便可清楚地了解其运动的类型。这样,根据运动微分方程是常微分方程,那系统一定是集中质量系统,即离散系统。若运动微分方程是偏微分方程,那么系统一定是分布参数系统,即连续系统。当运动微分方程是齐次的,那系统一定作自由振动,即在初始激励后以系统的恢复力进行振动。若运动微分方程是非齐

次的，则系统作强迫振动，即在系统上作用着外激励，系统受干涉力进行振动。当运动微分方程是线性的，那么系统为线性的，而运动微分方程是非线性的，那系统为非线性的。

从振动运动微分方程的自由项函数的形式也可以判定系统振动运动的形式。若自由项为简谐函数，则系统的响应(稳态)也是简谐函数；若自由项为任意周期函数，则系统的稳态响应也一定是任意周期函数；若自由项为脉冲函数，那么，系统一定是瞬态振动；若自由项为随机函数，则系统一定是随机振动。

求解微分方程是一件较为复杂的工作。对线性微分方程而言，一般对一、二个自由度系统，可用经典方法求得封闭解，对高阶数的需借用线性代数的方法，将联立微分方程化为联立代数方程，编写电算程序在计算机上求解，得出其近似解。对于偏微分方程将应用数理方程的方法，将偏微分方程化为常微分方程，并配合边界条件来求解。

# 第二章　单自由度系统的振动

实际的振动系统往往是很复杂的，在研究某些感兴趣的物理量时，振动系统需要简化为某种理想模型。例如简化为若干个“无质量”的弹簧和“无弹性”的质量所组成的“质量—弹簧”系统。由于对同一物理系统可以建立几种数学模型，人们希望得到一个既能较真实反映实际物理系统的重要特性，又便于计算或实验的模型。仅有一个“质量—弹簧”的系统是最简单的振动模型，如图 2—1 所示。若质量块在竖直方向上作上下运动，系统的位置可用一个独立坐标

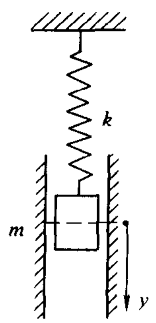


图　2—1

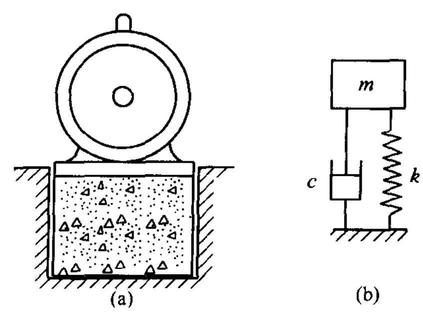


图　2—2

$y$ 来确定，称为单自由度系统，简称单度系统。工程中有许多问题可简化成这种模型。图 2—2(a)所示为一发动机固定在混凝土基础上，在只研究发动机与基础的竖直振动时，将基础的发动机一起看作质量块，参与振动的土壤当作一个无质量的弹簧和阻尼器，于是就简化成图 2—2(b)所示的质量—弹簧系统。图 2—3 上所示各例均属于单自由度振动系统，也都可以简化为类似图 2—2(b)所示的模型。

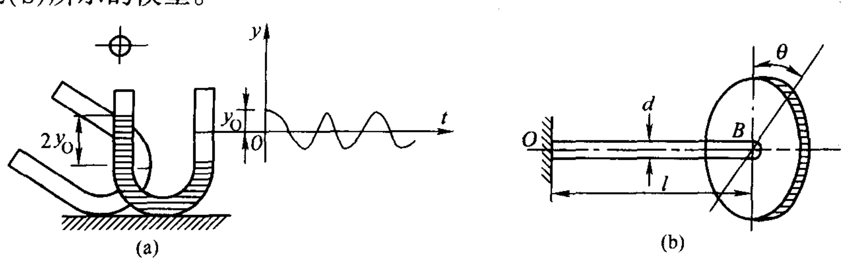


图　2—3

## §2—1　运动方程的建立

**【例 2—1】**　弹簧质量系统。

**【解】**　这是最简单的单自由度系统。图 2—4 中，我们考察弹簧质量系统沿铅垂方向的自由振动。弹簧刚度为 $k$，其质量忽略不计，$x_1$ 方向以向下为正，由牛顿第二定律，系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - l) = mg$$

若设偏离静平衡位置的位移为 $x$，则因 $x_1 = x + l + mg/k$，故上式变为

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

因此，当像重力一类的不变力作用时，可只考虑偏离系统静平衡位置的位移，那么运动方程中不会再出现重力这类常力，使方程形式简洁。现约定，以后若无特别指明，一律以系统稳定的静平衡位置作为运动（或广义）坐标的原点。

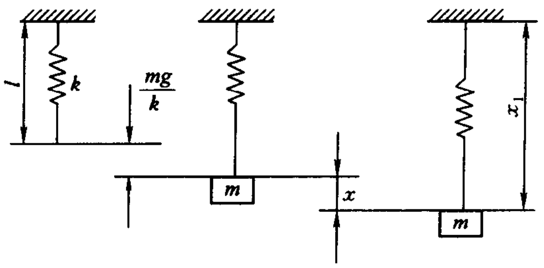


图 2—4

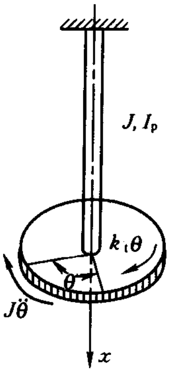


图 2—5

【例 2—2】 扭摆的振动。

【解】 如图 2—5 所示，相对于固定轴 $x$，建立系统的转动运动方程。仅有两力矩作用在圆盘上，即

惯性力矩 $J\ddot{\theta}$

恢复力矩 $\dfrac{GI_p}{l}\theta$

由动静法原理得

$$J\ddot{\theta} + \frac{GI_p}{l}\theta = 0$$

其中，$\dfrac{GI_p}{l}$ 为轴的扭转刚度 $k_t$，故

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J}\theta = 0$$

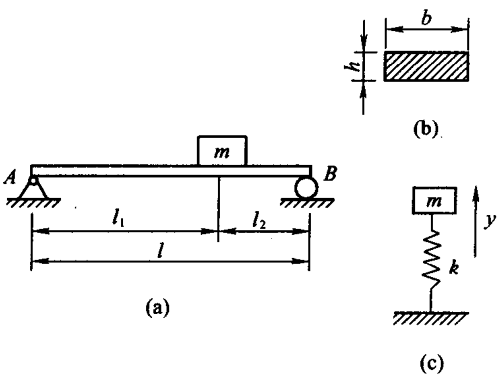


图 2—6

【例 2—3】 带重物 $m$ 的简支梁的横向振动。

【解】 梁的质量与 $m$ 相比可略去。弹簧常数 $k$ 取决于质量 $m$ 在梁上的位置。对图 2—6(a)所示的简支梁，由材料力学得

$$\Delta = \frac{mg}{3EI}\frac{l_1^2 l_2^2}{l}$$

从而

$$k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{3EIl}{l_1^2 l_2^2}$$

因矩形横截面惯性矩 $I = \dfrac{1}{12}bh^3$，所以

$$k = \frac{Ebh^3 l}{4 l_1^2 l_2^2}$$

由图 2—6(c)所示的当量系统，惯性力与弹性恢复力相平衡，所以有

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

或 $$y+\frac{Ebh^{3}l}{4ml_{1}^{2}l_{2}^{2}}y=0$$

如果梁的两端不是简支,那么 $\Delta$ 应改变为不同数值。

**【例 2—4】** 较复杂系统的振动。

**【解】** 我们可以选择任意坐标 $x_1$、$x_2$、$\theta$ 作为变量。它们互相关联且只有一个独立,现取绕固定轴 $O$ 的转角 $\theta$ 为独立坐标,则等效转动惯量

$$J_{c}=m_{1}a^{2}+m_{2}b^{2}+m_{3}r^{2}$$

其中,$r$ 是 $m_3$ 的惯性半径。系统的等效角刚度

$$k_{e}=k_{1}a^{2}+k_{2}b^{2}+k_{3}c^{2}$$

则 $$\ddot{\theta}+\frac{k_{1}a^{2}+k_{2}b^{2}+k_{3}c^{2}}{m_{3}r^{2}+m_{2}b^{2}+m_{1}a^{2}}\theta=0$$

或 $$\ddot{\theta}+A\theta=0$$

其中 $$A=\frac{k_{1}a^{2}+k_{2}b^{2}+k_{3}c^{2}}{m_{1}a^{2}+m_{2}b^{2}+m_{3}r^{2}}$$

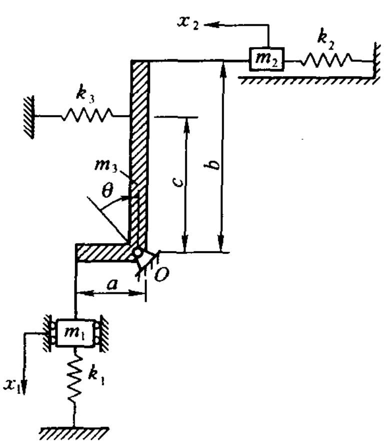


图 2—7

可以取 $x_1$ 为独立坐标,于是

$$(m_{1})_{e}=m_{1}+m_{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}+m_{3}\left(\frac{r}{a}\right)^{2}$$

$$(k_{1})_{e}=k_{1}+k_{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}+k_{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{2}$$

令 $$B=\frac{(k_{1})_{e}}{(m_{1})_{e}}=\frac{k_{1}+k_{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}+k_{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{2}}{m_{1}+m_{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}+m_{3}\left(\frac{r}{a}\right)^{2}}$$

经推导可得系统运动方程

$$\ddot{x}_{1}+Bx_{1}=0$$

同理以 $x_2$ 为独立坐标,可得

$$\ddot{x}_{2}+Cx_{2}=0$$

其中 $$C=\frac{k_{1}+k_{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2}+k_{3}\left(\frac{c}{b}\right)^{2}}{m_{1}+m_{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2}+m_{3}\left(\frac{r}{b}\right)^{2}}$$

不难验证 $A=B=C$

可见,对结构较复杂的单自由度系统(其中有些元件作平动,另一些作转动),不管我们选择哪一个坐标变量作为独立坐标,其运动方程形式不变。这说明系统固有振动规律与坐标选择无关。

## §2—2 等效质量、等效刚度、等效阻尼

1. 等效质量

在工程实际中,有时要把具有多个集中质量或分部质量系统简化为具有一个等效质量的单自由度系统。下面介绍几种典型情况下求等效质量的方法。

【例 2—5】 如图 2—8 所示一弹簧质量系统若需要考虑弹簧质量，则其等效质量为多少？设弹簧原长为 $l$，单位长度的质量为 $\rho$。

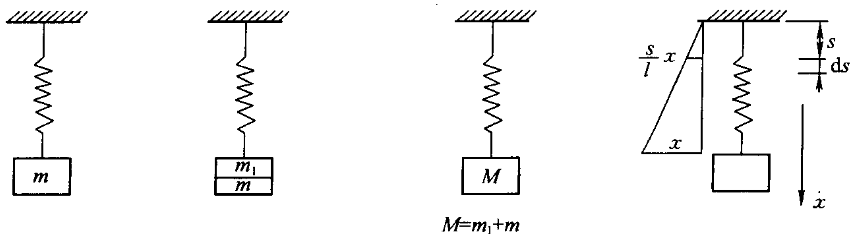


图 2—8

【解】 弹簧的质量为匀布，它要参与系统振动，可以将其简化，即把它集中到质量块上，如图 2—8(b)所示。现按动能等效的原则来获得等效质量，如图(d)所示，取微段 $\mathrm{d}s$，其质量

$$\rho \mathrm{d}s = \mathrm{d}m$$

在 $\mathrm{d}s$ 段处的弹簧位移为$\frac{s}{l}x$，速度为$\frac{s}{l}\dot{x}$，微段的动能为

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\mathrm{d}m \cdot v^2 = \frac{\rho}{2}\mathrm{d}s\left(\frac{s}{l}\dot{x}\right)^2$$

则弹簧的动能为

$$T = \int \mathrm{d}T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho \cdot \frac{\dot{x}^2}{l^2}s^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\rho l\right)\dot{x}^2$$

令
$$m_1 = \frac{1}{3}\rho l$$

则
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

故
$$m_e = m_1 = \frac{1}{3}\rho l$$

即弹簧的等效质量是按 1/3 的弹簧质量附加到原质量块上。

【例 2—6】 如图 2—9(a)所示，已知 $l$、$m$、$k$。求该系统的等效质量。

【解】 依据动能等效原则，有

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[J_C + m\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\dot{\theta}^2$$

又 $J_C = \frac{1}{12}ml^2$，则

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{48}ml^2\right)\dot{\theta}^2$$

由几何关系，得

$$\dot{x} = \frac{3}{4}l\dot{\theta}$$

故
$$T = \frac{1}{2}m_e\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m_e\left(\frac{3}{4}l\dot{\theta}\right)^2$$

由(a)、(b)两式得

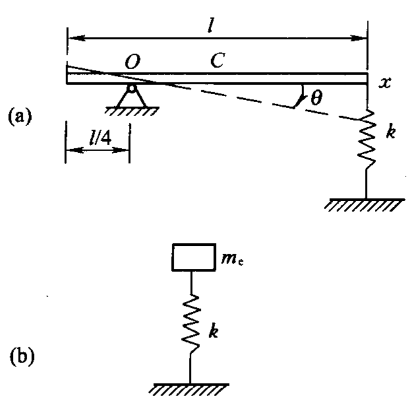


图 2—9

$$m_e = \frac{7}{27}m$$

【例 2—7】 图 2—10 所示系统，一转动惯量为 $J_0$ 的杆件 $AB$，连接有质量块 $m_1$ 和 $m_2$，距杆 $AB$ 转动点 $O$ 的距离分别为 $a$ 和 $b$。现求将质量简化到 $A$ 点的等效质量。

【解】 设等效质量的动能为

$$T_e = \frac{1}{2}m_e u_e^2$$

而总系统的动能

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2$$

又

$$u_e = v_A = a \cdot \dot{\theta}$$

$$v_B = b\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

$$T = T_e$$

$$\frac{1}{2}m_e(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

得

$$m_e = m_1 + m_2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{J_0}{a^2}$$

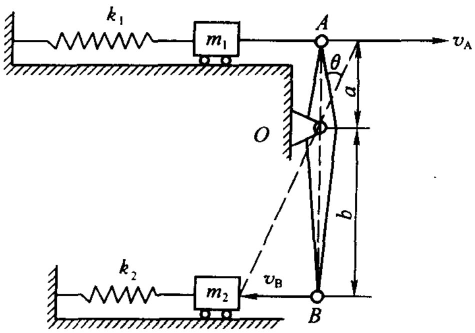


图 2—10

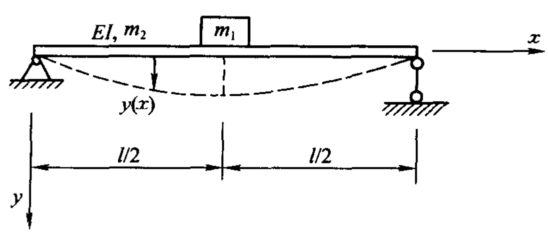


图 2—11

【例 2—8】 如图 2—11 所示均质等截面简支梁，在梁中央放置一集中质量 $m_1$，梁本身的质量为 $m_2$。试求将梁本身质量简化到梁的中央的等效质量。

【解】 已知梁中央处的静载荷 $m_1 g$，在其作用下梁的挠度曲线为

$$y = \frac{m_1 g}{48EI}(3l^2 x - 4x^3) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{a}$$

$$y_m = y(x)|_{x=l/2} = \frac{m_1 g}{48EI}l^3 \tag{b}$$

注意到 $y$、$y_m$ 皆为时间函数。

由(a)、(b)式得

$$y = y_m \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3}$$

则

$$\dot{y} = \dot{y}_m \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3} \tag{c}$$

设梁的单位长度的质量为 $\rho$，则其动能为

$$T=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\rho\left(\dot{y}_m\frac{3l^2x-4x^3}{l^3}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{35}\rho l\right)\dot{y}_m^2=\frac{1}{2}m_e\dot{y}_m^2$$

故

$$m_e=\frac{17}{35}m_2$$

2．等效刚度

工程系统中，若弹性元件斜向布置或几个弹性元件(或弹簧)以不同方式连接在一起，则必须求得一个与之等效的弹性元件的刚度，称为等效刚度。

(1)并联弹簧

把图 2—12(a)作为并联弹簧是显而易见的，但对图 2—12(b)和图 2—12(c)有必要略加说明。

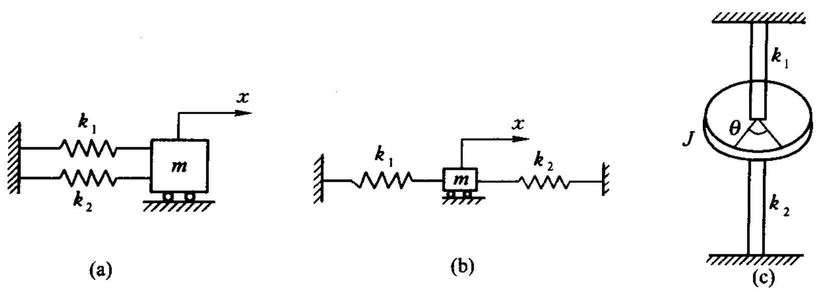


图 2—12

我们说图 2—12(b)和图 2—12(c)是并联的，是因为图 2—12(b)中 $k_1$ 和 $k_2$ 两弹簧的变形相同，而图 2—12(c)中两轴的扭角也相同。

如果 $F_1$、$F_2$ 分别表示图 2—12(b)中 $k_1$ 和 $k_2$ 弹簧所受到的力，$x$ 为质点 $m$ 的位移，则

$$x=\frac{F_1}{k_1}=\frac{F_2}{k_2}=\frac{F_1+F_2}{k_1+k_2}=\frac{F}{k_1+k_2}=\frac{F}{k_e}$$

故

$$k_e=k_1+k_2$$

(2)串联弹簧

串联弹簧中各弹簧所受力相等，但变形一般却不等(特殊情况下可能相等)。比较一下图 2—13 中的(a)、(b)与图 2—12 中的(b)、(c)，可看出串联弹簧与并联弹簧的差异。

若 $F$ 为各弹簧中所受到的力，$x_1$ 和 $x_2$ 分别表示图 2—13(a)中两弹簧的变形，则

$$x=x_1+x_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}=F\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=\frac{F}{k_e}$$

故

$$\frac{1}{k_e}=\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)\text{或 }k_e=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\qquad(2—1)$$

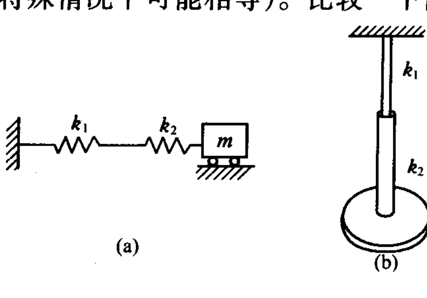


图 2—13

串联弹簧必须用刚度倒数相加，比较麻烦。可以借助图 2—14 所示的图解方法求得等效刚度 $k_e$。利用几何中的三角形比例关系不难证明作图法中的 $k_e$ 完全符合式(2—1)。

**【例 2—9】** 图 2—15 所示系统，已知 $k_1$、$k_2$、$a$、$b$ 及 $m$。求等效刚度。

**【解】** 由受力分析知

$$\sum F_y = 0, k_e x = k_1 x_1 + k_2 x_2 \tag{a}$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}) = 0,\text{有}$$

$$a k_1 x_1 - k_2 x_2 b = 0$$

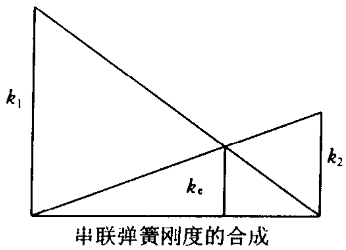


图 2—14

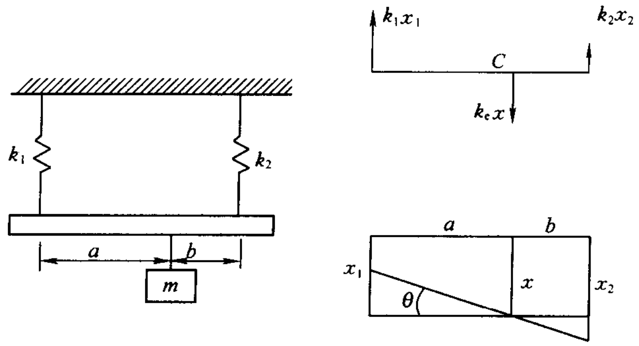


图 2—15

$$x_1 = \frac{k_2 b}{k_1 a} \tag{b}$$

由几何关系知

$$x_1 = x - a\theta \tag{c}$$

$$x_2 = x + b\theta \tag{d}$$

$$b x_1 + a x_2 = (a + b)x \tag{e}$$

将式(b)、(c)、(d)代入式(e)有

$$x_2 = \frac{k_1 a(a + b)}{k_2 a^2 + k_2 b^2} x \tag{f}$$

将式(e)、(b)代入式(a),有

$$k_e x = k_1 \frac{k_2 b}{k_1 a} x_2 + k_2 x_2 = \frac{(a + b)k_2}{a} \cdot \frac{k_1 a(a + b)}{k_1 a^2 + k_2 b^2} x$$

即
$$k_e = \frac{(a + b)^2}{\frac{1}{k_1 k_2}(k_1 a^2 + k_2 b^2)} = \frac{(a + b)^2}{\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}}$$

**【例 2—10】** 求图 2—16 所示系统的等效刚度 $k_e$。

**【解】** 设 $k_1$、$k_2$、$k_3$ 和圆盘在同一平面内。作用于固定轴的扭转力矩

$$M_t = \frac{k_{t1} k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}} \theta + k_{t3}\theta + k_1 a^2 \theta + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} a^2 \theta$$

故 $k_e = \dfrac{M_t}{\theta} = \dfrac{k_{t1} k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}} + k_{t3} + \left(k_1 + \dfrac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right) a^2$

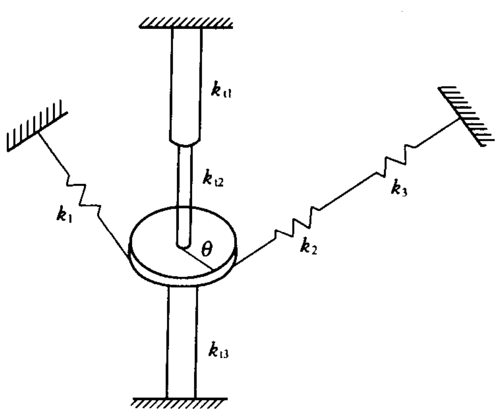


图 2—16

**【例 2—11】** 求图 2—17(a)、(b)的等效刚度。

**【解】** 图 2—17(a)中,悬臂梁的刚度为$\dfrac{3EI}{l^3}$。