CONG GOUGU DINGLI TANQI

从勾股定理谈起

上海教育出版社

中学生文库

从勾股定理谈起

盛立人　严镇军

上海教育出版社

中学生文库　从勾股定理谈起

盛立人　严镇军　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
江苏南漕印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本 787×1092 1/32　印张 2.75　字数 54,000
1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷
印数 1–25,500本

统一书号：7150·3323　定价：0.29元

内容提要

本书从熟知的勾股定理出发，讨论了它在几何方面的简单推广和应用，并且导出了著名的勾股数公式，进而讨论了单位圆周上的有理点、整边三角形以及由勾股定理引伸出来的某些数论问题；然后又回到平面几何，详尽地讨论了一个有名的几何问题——平面图形的等组问题；最后简单地介绍了近代数学里著名的 Hilbert 第三问题。

本书内容新颖，题材多样，特别注重数形结合，文字生动、浅显。书中还配有许多经过启发易于解决的难题，并附有解答概要，是一本中学生值得一读的课外读物。

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

引　言

学过平面几何的人都知道一条古老的著名定理——勾股定理：在任一直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方．这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠①，而且在高等数学和其他学科中用途极广．

下面我们将从勾股定理开始，介绍一些著名而有趣的数学问题．现在先从这条定理的历史讲起．

① 中世纪的著名数学家和天文学家开普勒(Kepler)曾说过，几何学有两大宝藏：一个是毕达哥拉斯(Pythagoras)定理(即勾股定理)，另一个是黄金分割。

一、勾股定理及其历史

人们知道，勾股定理被发现到至今已有五千多年的历史了，从历史上说，东方的几个文明古国都先后研究过这条定理．远在公元前约三千年的古巴比伦（是现在伊拉克的一部分）人就知道和应用勾股定理，他们还知道许多勾股数组（如3，4，5等）．传说古代埃及人在建筑宏伟的金字塔和尼罗河泛滥后测量土地时，也应用过勾股定理．例如，他们曾用结绳的方法，即通过在地面上划出边长为3:4:5的三角形来确定直角，这就是勾股定理的逆定理——若一三角形一边的平方等于另外两边的平方和，则此三角形为直角三角形——的特殊形式．

我国也是较早发现勾股定理的国家之一．据我国一部古老的算书《周髀算经》（大约是西汉时代——公元前一百多年的作品）记载，商高（约公元前1120年）答周公曰："勾广三、股修四，径隅五．"这里勾是指直角三角形的两条直角边中较短者，股是指另一直角边，而径则是指斜边．因此，这句话的意思就是：在一个直角三角形中，若勾长为3，股长为4，则弦长必为5，也就是人们常说的"勾三，股四，弦五"．这当然是勾股定理的特殊情形．同一书还记载说，另一位中国学者陈子（公元前七——六世纪）与荣方在讨论测量问题时说的一段话："若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并以开方

除之，得邪至日."也就是说，把勾股分别平方后相加，再开平方，即得弦长(图1). 显然，陈子已经突破了"勾三、股四、弦五"这一特殊形式，得到了直角三角形三边间的普遍关系. 遗憾的是我们至今尚不知道陈子对勾股定理是否给出了证明. 此外，我国古书上还记载有夏禹(约公元前二十一世纪)治水时就已初步应用了勾股术的传说.

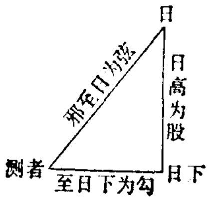

图 1

在欧洲，通常把这条定理称为**毕达哥拉斯定理**，以纪念约为公元前六世纪的古希腊时代杰出的思想家和科学家毕达哥拉斯氏. 史传当时的毕达哥拉斯学派，首先从理论上证明了勾股定理，他们把这一伟大成果归功于学派的代表毕达哥拉斯，并以他的名字命名. 据说毕氏为了表示感激，曾对神供献了一百头牛. 对此，古代诗人夏米梭写了如下的十四行诗赞美：

是他，一位病弱的人，
　　最早认识了永存的真理.
毕达哥拉斯定理，
　　它亘古及今，代代相继.

感谢神灵的启示，
　　您奉献了丰盛的圣祭.
把一百头活生生的公牛，
　　赶进了圣光祥云之颠.

自真谛出现之日，

从此，
　公牛不断的嘶叫.

嘶叫声无损真理的光明，
　面对着毕氏的出现，
　　公牛只能闭目颤栗.

公牛的传说给勾股定理的发现蒙上了一层神秘的色彩. 但是，从夏米梭的诗句的字里行间，我们还可以看到这条定理在当时人们(包括毕氏本人)心目中的地位. 这里还必须指出，这条定理的发现决不是神灵的启示，也不是一种偶然的巧合，而是人类生产实践发展到一定程度的产物.

勾股定理的证明，人们已创造了许许多多的证法. 据说，国外有一本书，罗列的勾股定理的证法竟有 370 种之多，可见这条定理是多么地吸引着人们. 毕达哥拉斯学派关于这条定理的证明已经失传，为了尊重历史，也为了引导到我们感兴趣的问题，下面我们只叙述由另一位古希腊几何大师欧几里得(Euclid，约公元前三世纪人)，写在他的数学名著《几何原本》中的证明. 它是现存的勾股定理的最早证明. 欧氏把勾股定理叙述成另一种形式：

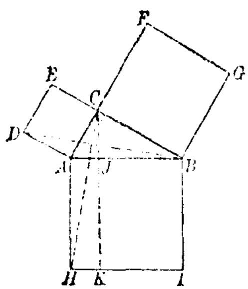

图 2

对于任一直角三角形，以其三边为一边分别向外作正方形，则斜边上所作正方形面积，等于两直角边上所作正方形面积之和.

如图 2, 设 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $ACED$, $AHIB$, $BGFC$ 分别是在其三边上所作的正方形, 求证

$$S_{AHIB}=S_{BGFC}+S_{ACED}.$$

证明 作 $CJ\perp AB$, 并延长交 HI 于 K,

$$S_{ACED}=AD^2=AD\cdot DE=2S_{ABD}.$$

又 $\because$ $AD=AC,\ AB=AH,\ \angle DAB=\angle CAH,$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle AHC.$

于是

$$S_{ACED}=2S_{AHC}=AH\cdot AJ=S_{AHKJ}.$$

同理可证 $$S_{BGFC}=S_{BJKI},$$

所以 $$S_{AHIB}=S_{AHKJ}+S_{BJKI}=S_{ACED}+S_{BGFC}.$$

定理证毕.

前面已经讲了, 古埃及人曾利用结绳定出直角, 其原理就是利用勾股定理的逆定理: 若一三角形一边的平方等于另外两边的平方和, 则此三角形必为直角三角形.

这条定理的证明方法极多, 其最简单的证明, 寥寥数字即可完成. 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c, 依题设条件 $c^2=a^2+b^2$, 由余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

于是 $$2ab\cos C=0,$$

$$\cos C=0.\quad (0<C<180^\circ)$$

所以 $\angle C$ 是直角.

有人会怀疑, 这个证明方法行吗? 是否有"循环论证"的弊病. 1979 年的全国高考数学试题中, 有一道题是证明勾股定理. 当时有不少考生对这道题的证明都犯了循环论证的错

误：有的直接用余弦定理；有的用了解析几何中两点距离公式；还有的用三角恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$．他们都忘记了余弦定理、距离公式及上述三角恒等式的证明和推导都是来自勾股定理．也就是说，使用了下面的推导顺序：

$$\text{勾股定理}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{余弦定理}\\ \text{距离公式}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{array}\right.\Rightarrow\text{勾股定理}.$$

这就出现了循环论证的错误．

但是，对于逆定理的上述证明方法，不存在循环论证的问题，这是因为逆定理和定理本身是两个彼此独立的命题，我们所依据的推导顺序是

$$\text{勾股定理}\Rightarrow\text{余弦定理}\Rightarrow\text{勾股逆定理}.$$

下面再讲一下欧几里得在《几何原本》中所给出的证明．

如图 3，设 $\triangle ABC$ 的三边长满足关系

$$AC^2+BC^2=AB^2.$$

作 $CD\perp AC$ 且等于 BC．连结 AD，$\triangle ACD$ 为直角三角形．

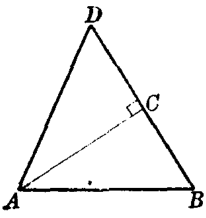

图 3

$$\therefore\quad AC^2+CD^2=AD^2.$$

因而 $AB=AD$．

$$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC.$$

$$\therefore\quad \angle ACB=\angle ACD.$$

$\angle ACB$ 为直角．

勾股定理及其逆定理同时成立，说明 $a^2+b^2=c^2$ 这个条件既是一个三角形为直角三角形的必要条件，又是它的充分条件．

勾股定理的特征是把三角形中有一个角是直角的几何性质和代数关系式

$$a^2+b^2=c^2$$

联系起来. 这个代数式给出了直角三角形中三边长度的依赖关系. 因而,对于一个直角三角形,如果给定其中任意两条边长,则第三边长由上式唯一确定. 这样,勾股定理不仅在理论上有特定的意义,而且在许多实际计算中起着重要的作用. 为了显示这一特点,这里先介绍由勾股定理推导出用已知三角形三边的长计算三角形面积的海伦公式.

如图 4, 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c. CD 为 AB 边上的高. 记 $h_c=CD$, $q_1=AD$, $q=BD$. 由勾股定理得

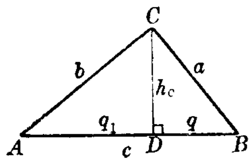

图 4

$$b^2=h_c^2+q_1^2=a^2-q^2+q_1^2$$
$$=a^2-q^2+(c-q)^2=a^2+c^2-2cq.$$
$$\therefore\quad q=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c},$$

或
$$q^2=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

上面是就高 CD 在三角形内的情形讨论的, 当 CD 在三角形外时(图 5), 同理可得

$$q=\frac{b^2-a^2-c^2}{2c},$$
$$q^2=\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2,\qquad (1)$$

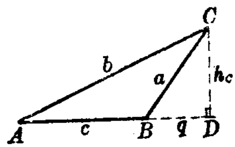

图 5

于是
$$h_c^2=a^2-q^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4c^2}[(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2]$$
$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{4c^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

为使公式简便，习惯上令$\triangle ABC$的半周长为p，即$a+b+c=2p$，因而

$$a+c-b=a+c+b-2b=2(p-b),$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2(p-c),$$
$$b+c-a=a+b+c-2a=2(p-a).$$

这就得
$$h_c^2=\frac{4}{c^2}p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

同理，a边、b边上的高为

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

三角形的面积公式

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ch_c=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

这里$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，这个公式叫做海伦(Heron)公式.

三角形中的其他主要线段，如中线、角平分线等，也可通过勾股定理用三边a、b、c表示出来. 下面举几个利用勾股定理解题的例子.

[例1] 设P为等边$\triangle ABC$内一点，且$PA=5$, $PB=4$, $PC=3$(图6)，求此三角形的边长?

解 以PC为一边作正$\triangle PCD$,

$$\because\quad \angle PCA=60^\circ-\angle BCP=\angle BCD.$$

又
$$CD=CP,\ AC=BC,$$

$$\therefore\quad \triangle ACP \cong \triangle BCD.$$

于是 $BD=AP=5$, 再作 $BE\perp CP$.

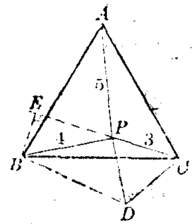

图 6

$\because\quad \triangle BPD$ 的边长为 3, 4, 5,

$\therefore\quad \angle BPD=90°$,

$\angle BPE=180°-90°-60°=30°$,

$$BE=\frac{1}{2}BP=2.$$

$$\therefore\quad PE=\sqrt{BP^2-BE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

在直角 $\triangle BEC$ 中,

$$BC^2=BE^2+EC^2=2^2+(3+2\sqrt{3})^2=25+12\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad BC=\sqrt{25+12\sqrt{3}}\approx 6.77.$$

[例 2]　设 M 为 $\triangle ABC$ 内任一点, $MD\perp AB, ME\perp BC$, $MF\perp CA$, 又 $BD=BE$, $CE=CF$(图 7). 求证 $AD=AF$.

证明　连结 AM, BM, CM, 如图依次对各直角三角形, 用勾股定理, 并利用所设条件, 得

$$\begin{aligned}AD^2&=DD_1^2+AD_1^2\\&=BD^2-BD_1^2+AM^2-MD_1^2\\&=AM^2+BE^2-(BD_1^2+MD_1^2)\\&=AM^2+BE^2-BM^2\\&=AM^2+BE^2-(ME_1^2+BE_1^2)\\&=(AM^2-ME_1^2)+(BE^2-BE_1^2)\\&=AM^2-ME_1^2+EE_1^2.\end{aligned}$$

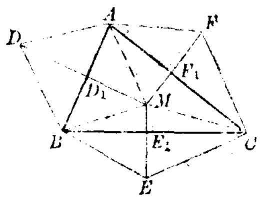

图 7

同理证得　　$AF^2=AM^2-ME_1^2+EE_1^2$.

$$\therefore\quad AD=AF.$$

这道题构思很巧妙, 1979 年中国科技大学曾用它作为招考少年大学生的复试题, 当时却没有一个学生能完整地解出

这道题．如果他们知道勾股定理的下述变形的话，这道题也就容易证明了．

定理 $MD\perp AB$ 的充分必要条件是

$$AM^2-BM^2=AD^2-BD^2.$$

证明 必要性由勾股定理即可得出．下面证明充分性(图 8)，先将所设条件改写成

$$AM^2+BD^2=AD^2+BM^2. \tag{1}$$

记 $\angle AOM=\alpha$, $\angle AOD=\beta$, 由(1)式，应用余弦定理有

$$AO^2+MO^2-2AO\cdot MO\cos\alpha+BO^2+DO^2-2BO\cdot DO\cos\alpha$$
$$=AO^2+DO^2-2AO\cdot DO\cos\beta$$
$$+BO^2+MO^2-2BO\cdot MO\cos\beta.$$

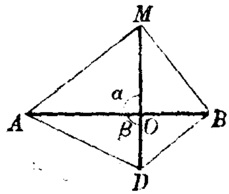

图 8

即 $(AO\cdot MO+BO\cdot DO)\cos\alpha$

$$=(AO\cdot DO+BO\cdot MO)\cos\beta$$
$$=-(AO\cdot DO+BO\cdot MO)\cos\alpha.$$

要使上式成立，必须 $\cos\alpha=0$.

又 $0<\alpha<180°$，所以 $\alpha=90°$，这就证得 $MD\perp AB$.

利用这个定理，例 2 的证明可简单地写出．

因为 $AB\perp MD$, $BC\perp ME$, $AC\perp MF$(参看图 7)，根据上述定理可得

$$AD^2-AM^2=BD^2-BM^2,$$
$$BE^2-BM^2=CE^2-CM^2,$$
$$CF^2-CM^2=AF^2-AM^2,$$
$$AD^2-AM^2+BE^2-BM^2+CF^2-MC^2$$
$$=BD^2-BM^2+CE^2-CM^2+AF^2-AM^2.$$
$$\because\quad BD=BE,\ CE=CF,$$
$$\therefore\quad AD=AF.$$

从上述证明不难看出，例2的结果还可以推广到多边形的情形.

设 M 为多边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 内一点(图9)，$MB_1\perp A_1A_2$，$MB_2\perp A_2A_3$，$\cdots$，$MB_{n-1}\perp A_{n-1}A_n$，$MB_n\perp A_nA_1$，并且$B_1A_2=A_2B_2$，$B_2A_3=A_3B_3$，$\cdots$，$B_{n-1}A_n=A_nB_n$，求证：

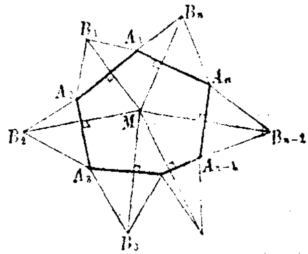

图 9

$$B_1A_1=A_1B_n.$$

证明请读者自己完成.

[例3] 已给一长、宽、高分别为a、b、c($a\geqslant b\geqslant c$)的长方体，如果要从一个顶点沿表面到达对角的顶点画线，问怎样画法才能获得最短的线路，其长为多少？

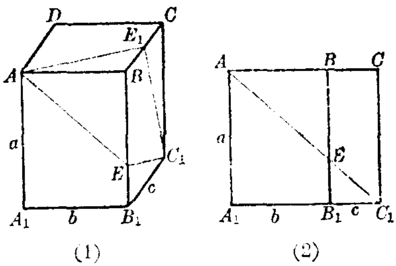

图 10

解 为了从A点到达C_1点[图10(1)]，先设在表面AA_1B_1B和BB_1C_1C上画线，如果折线AEC_1是最短线路. 设想把这两个表面展平，如图10(2). 为使左图中折线AEC_1最短，在展开图中A、E、C_1三点应共线. 由勾股定理，得

$$AC_1=\sqrt{a^2+(b+c)^2}.$$

考虑到从A到C_1沿表面画线，还可以画在上底面和东边的面上(图10中的折线AE_1C_1)，也可以画在西边的面和下底面

上．由对称性可知，这样两种折线中最短的，其长分别是$\sqrt{b^2+(c+a)^2}$和$\sqrt{c^2+(a+b)^2}$．由所设条件$a\geqslant b\geqslant c$，有

$$c^2+a^2+b^2+2ab\geqslant c^2+a^2+b^2+2ac\geqslant c^2+a^2+b^2+2bc,$$

即
$$c^2+(a+b)^2\geqslant b^2+(a+c)^2\geqslant a^2+(b+c)^2.$$

这就是说，上面求得的三个根式中，以$\sqrt{a^2+(b+c)^2}$最小，它就是要求的最短线路的长度，这条折线应画在表面AA_1B_1B和BB_1C_1C上（显然，也可以对称地画在西边那个面和后面那个面上），利用$\triangle AA_1C_1\backsim\triangle EB_1C_1$[图10(2)]，容易求得

$$EB_1=\frac{ac}{b+c}.$$