青年数学叢書

談学习三角

張远达著

中国青年出版社

$(1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)$

$1-\cos^2\alpha+\cos\alpha-\cos^3\alpha$

$1-\cos^2\alpha$

$1-\cos^2$

談学习三角

張远达著

*

中国青年出版社出版

（北京东四12条老君堂11号）

北京市書刊出版業营業許可証出字第[illegible]号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华書店总經售

*

787×1092 1/32　4 3/8印張　[illegible],000字

1958年4月北京第1版　1958年4月北京第1次印刷

印数 1—55,000

統一書号 1[illegible]

定价(8)24[illegible]

青年数学丛書

談学习三角

張远达著

張远达

中国青年出版社

1958年·北京

內 容 提 要

本書的主要內容是講述三角学的基础知識。作者所采用的方法是从三角函数的产生說起，然后按照思想自然发展的規律逐步地把問題引出来，并紧紧地圍繞着三角函数和反三角函数这兩个最根本的問題，分别而又系統地加以論述，不仅使讀者知其然，而且还知其所以然。在講述的过程中，作者还注意到了讀者可能发生的疑难問題，并特地在每个章节和問題中，貫串了辯証地研究問題的思想方法，这样一方面能够使讀者抓住問題的实質，另方面也可使讀者逐漸学会辯証地看問題的科学态度。可作为高中同学的課外讀物。

写在前面

我写这本小册子的主要用意是想帮助高中同学学习三角时明了三角学的基本內容到底是什么，可以作为高中課外补充讀物．当然还想借这个小册子和中学的数学老师們談談教学法．因此，我写的方式就不象一般教科書上那样：凡是講一个公式或定理时，往往先把結果搬出来，然后再去証明它．因为这样就会使讀者只知其然，而不知其所以然，引不起讀者学习的兴趣，甚至于还会使讀者对数学产生畏惧厌惡的心情．所以我写的方式不是先把結果搬出来，而是对每个問題的怎样产生尽量地去找思想根源，也就是想从思想的自然发展过程中逐步地把問題引出来，使讀者不仅知其然，并知其所以然，这样不光是为了引起学习的兴趣，还有一个目的就是使讀者能牢記学过了的知識并把它消化．这种写法是貫穿到这小册子里面的每一个問題的．又为了使讀者明了三角学的中心問題，所以我把諸如正弦定律、余弦定律、二角和差的公式以及解三角方程等等都作为三角函数或反三角函数的应用，而以三角函数和反三角函数的概念作为突出的中心問題，这由第一章、第二章和第三章的标題就可以看得出来．总之，我是尽量地想尽一点棉薄之力使讀者能有所帮助，但由于个人的

学識肤淺，經驗又不够，虽心有余而力不足，辞不达意的地方一定很多，希望讀者提出批評，尤其是希望高中数学老师們以自己宝貴的教学經驗給我以严格的指示，是盼！

張远达

1957年于武汉大学

目　次

一　三角函数的意义、性質及其归化

1. 銳角三角函数的意义

我們知道在直角$\triangle ABC$中，如图1，C为直角，如令角A、B、C所对的边各以符号a、b、c来表示，那么在a、b、c中，取一为分子，一为分母，一般就得到六个不同的分数，它們是$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$。除了这六个分数之外，当然再沒有别的了。

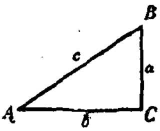

图 1

如果所考虑的不是直角$\triangle ABC$，而是另外一个直角$\triangle A'B'C'$，如图2，C'为直角，如令角A'、B'、C'所对的边各以符号a'、b'、c'来表示，那么同样也可得到六个不同的分数，它們是$\frac{a'}{c'}$、$\frac{b'}{c'}$、$\frac{a'}{b'}$、$\frac{b'}{a'}$、$\frac{c'}{b'}$和$\frac{c'}{a'}$。

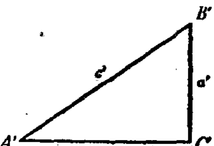

图 2

如果直角$\triangle ABC$和直角$\triangle A'B'C'$是相似形，也就是說$\angle A=\angle A'$（因而$\angle B=\angle B'$），那么在上面所得的諸分数之間，根据相似形的道理就显然有

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},\ \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\ \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\ \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},\ \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

这一串关系式．这些关系式启发了我們一个值得思考的問題，那就是当直角$\triangle ABC$（C是直角）中的銳角A固定，即它的大小不变（角B也随着不变），而三角形的大小可以改变时（也就是說面积变而形狀不变，即相似三角形），虽然a、b、c的長均有变化，可是六个比值$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$却固定不变，換句話說，这六个比值$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$只与角A（随之角B）的大小紧密相关，而与直角$\triangle ABC$的面积的大小沒有关系．因此，我們对仅与角A的大小有关的这六个比值$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$和$\frac{c}{a}$就有命名的必要．本来命名是人为的工作，随便怎样都可以，命名不过为的是表明意义，說話簡單，所以怎样方便我們就怎样命名．既然这些比值与角A有連系，当然命名的时候就把这些比值突出地用有A在內的某种詞句来表达（当然，換用与角B有关的比值来命名也可以，这不过是考慮問題的一种方法），例如我們叫$\frac{a}{b}$为A的正切，記作

$$\tan A=\frac{a}{b}\ (\text{或}\ tg A=\frac{a}{b}).$$

这也就是产生三角函数概念的由来．

可是直角$\triangle ABC$的三个边a、b、c中，c是斜边，a是角A的对边，b是角A的鄰边，而A的正切$=\frac{a}{b}$的几何意义是說：

$$\tan A=A\text{的正切}=\frac{A\text{的对边}}{A\text{的鄰边}}.$$

但A和B在直角$\triangle ABC$中的位置是相对的，換句話說，a是A的对边却是B的鄰边，b是A的鄰边却是B的对边，所以將A换为B时，相对地就应該有：

$$B\text{的正切}=\frac{B\text{的对边}}{B\text{的鄰边}}=\frac{b}{a},$$

即 $\tan B=\frac{b}{a}$. 又 A 和 B 互为余角，即 $\angle A+\angle B=90°$，因此將 B 的正切換为 A 的关系而来界說 $\frac{b}{a}$，很自然地就会想到余角的关系，想到用余字来表明这种关系，也就是說很自然地要叫 $\frac{b}{a}$ 为 A 的余切，記作

$$\cot A=\frac{b}{a}\ (\text{或}\ \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}),$$

即 $$\cot A=A\text{的余切}=\frac{b}{a}=\frac{A\text{的鄰边}}{A\text{的对边}}.$$

所以 $$\cot A=\tan B,\ \text{同样}\ \tan A=\cot B.$$

按照同样的道理，我們叫 $\frac{a}{c}$ 为 A 的正弦，記作

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

即 $$\sin A=A\text{的正弦}=\frac{a}{c}=\frac{A\text{的对边}}{\text{斜边}},$$

那么 $$\sin B=B\text{的正弦}=\frac{b}{c}=\frac{B\text{的对边}}{\text{斜边}};$$

若再回忆 A 和 B 是互为余角的关系，就說 B 的正弦为 A 的余弦，記作 $\cos A$，所以

$$\cos A=A\text{的余弦}=B\text{的正弦}=\sin B$$

$$=\frac{b}{c}=\frac{A\text{的鄰边}}{\text{斜边}}=\frac{B\text{的对边}}{\text{斜边}},$$

即 $$\cos A=\sin B,\ \text{同样}\ \sin A=\cos B.$$

于是剩下来的就是 $\frac{c}{a}$ 和 $\frac{c}{b}$ 的命名. 但

$$\frac{c}{a}=\frac{\text{斜边}}{A\text{的对边}}=\frac{\text{斜边}}{B\text{的鄰边}},\quad \frac{c}{b}=\frac{\text{斜边}}{A\text{的鄰边}}=\frac{\text{斜边}}{B\text{的对边}},$$

如果叫$\frac{c}{a}$为A的正什么，即

$$A\text{的正什么}=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜边}}{A\text{的对边}},$$

那么当然就应該界說

$$B\text{的正什么}=\frac{\text{斜边}}{B\text{的对边}}=\frac{c}{b};$$

再回忆A和B互为余角的关系，就說

$$A\text{的正什么}=B\text{的余什么}=\frac{\text{斜边}}{A\text{的对边}}=\frac{\text{斜边}}{B\text{的鄰边}}=\frac{c}{a},$$

$$B\text{的正什么}=A\text{的余什么}=\frac{\text{斜边}}{B\text{的对边}}=\frac{\text{斜边}}{A\text{的鄰边}}=\frac{c}{b}.$$

可是湊巧$\tan A=A$的正切$=\frac{a}{b}$和$\cot A=A$的余切$=\frac{b}{a}$互为倒数，即$\tan A\cdot\cot A=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$（对$B$角来說也是如此），也就是一角的正切与它的余切互为倒数；但是这个性質对正弦和余弦来講却不成立，因为A的正弦$\times A$的余弦$=\sin A\cdot\cos A=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\neq1$①. 而$A$的正弦$\frac{a}{c}$的倒数是$\frac{c}{a}$（$A$的余弦$\frac{b}{c}$的倒数是$\frac{c}{b}$），所以为了有与正余切互为倒数这一个湊巧之美，我們就叫A的正弦$\frac{a}{c}$的倒数$\frac{c}{a}$为A的余某，通常是叫做$\frac{c}{a}$为A的余割（当然余弦这一名詞在这里再不能用了，否則A的余弦就有兩个意义：一是前面已界說过的$\frac{b}{c}$，一是現在的$\frac{c}{a}$，兩者发生了混淆．用割字一字本来是人为的，不过旣已規定好了，当然我們也就用它），記作

$$\csc A=\frac{c}{a}(A\text{的余割});$$

① 因$c^2=a^2+b^2$（商高定理），如果$\frac{ab}{c^2}=1$，那么$ab=c^2=a^2+b^2$，$0=a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab$，这显然是不可能的，因为$(a-b)^2\geq0$和$ab>0$的緣故．

而叫 A 的余弦 $\frac{b}{c}$ 的倒数为 A 的正割 $=\frac{c}{b}$，記作

$$\sec A=\frac{c}{b}\ (A\text{ 的正割}).$$

于是

$$A\text{ 的正割}=\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜边}}{A\text{ 的鄰边}},$$

$$A\text{ 的余割}=\csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜边}}{A\text{ 的对边}},$$

所以相对地以 B 角而言，就界說

$$B\text{ 的正割}=\sec B=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜边}}{B\text{ 的鄰边}},$$

$$B\text{ 的余割}=\csc B=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜边}}{B\text{ 的对边}}.$$

因此

$$\sec A=\csc B,\quad \csc A=\sec B.$$

附注 1. 所謂正切、余切、正弦、余弦、正割、余割这六个名詞中的“正”、“余”二字，首先是从 A 和 B 互为余角这一个概念来界說的，并凑巧由 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{b}{a}$ 互为倒数（即某角的正切和余切互为倒数）这一点，就考虑到：有了正、余弦的意义之后，对誰为正割誰为余割，也可以适当地照顧到“正”、“余”有互逆的意义。如果事先將 A 和 B 互为余角这一个概念除掉，仅从 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{b}{a}$ 互为倒数这一点而界說一为正 X（例如），一为逆 X，再来解說 $\frac{a}{c}$ 为正 Y（例如），$\frac{c}{a}$ 为逆 Y，以及 $\frac{b}{c}$ 为正 Z（例如），$\frac{c}{b}$ 为逆 Z，也未始不可。不过这是舍本逐末的办法，因为在直角 $\triangle ABC$ 中，A 和 B 互为余角这一点是很自然的性質，而所謂 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{b}{a}$ 互为倒数，$\frac{a}{c}$ 和 $\frac{c}{a}$ 互为倒数，$\frac{b}{c}$ 和 $\frac{c}{b}$ 互为倒数就不必一定要限制 $\triangle ABC$ 为直角三角形，即令 $\triangle ABC$ 是任意的三角形也是如此。因此若把我們的思想仅局限在互为倒数这一点上，那又何必一定要从直角三角形来入手呢？这岂不是多余的嗎？当然，如果首先顧及到了 A 和 B 互为余角这一个自然的

性質以后，在我們討論的过程中，再能兼顧其他的性質(例如說$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$互为倒数，等等)，那当然更好，这是我們处理問題的一种方法.

附注 2. 在附注1里面曾經提到：如果不从直角三角形着手，設$\triangle ABC$是任意的三角形(即角C不必为直角)，那么所謂互为余角这一个性質就沒有了，而唯一具有的性質就是$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$互为倒数，等等. 当然若从任意$\triangle ABC$着手顧及到$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$互为倒数，等等，来界說如上所說的六个名詞，也未始不可. 不过这样研究毫无意义，因为一則除了$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$互为倒数等等之外，再沒有別的性質，再則当給了$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$等等以名詞后，再就沒有什么几何的意义了，譬如說a是A的对边，固然是有几何的意义，但是这时A的鄰边究竟是算作b呢？还是算作c呢？就无从依附. 所以从几何入手(因为从$\triangle ABC$入手)而又脫离几何的意义来研究，究竟能够达到怎样的結果，是頗值得怀疑的. 因此我們不采取这样的办法.

总結这节的內容：

設$\triangle ABC$为直角三角形，C为直角(图1).

定义：

$$\sin A=\frac{A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}\text{(讀作 }A\text{ 的正弦)},$$

$$\csc A=\frac{\text{斜边}}{A\text{ 的对边}}=\frac{c}{a}\text{(讀作 }A\text{ 的余割)},$$

$$\cos A=\frac{A\text{ 的鄰边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}\text{(讀作 }A\text{ 的余弦)},$$

$$\sec A=\frac{\text{斜边}}{A\text{ 的鄰边}}=\frac{c}{b}\text{(讀作 }A\text{ 的正割)},$$

$$\tan A=\frac{A\text{ 的对边}}{A\text{ 的鄰边}}=\frac{a}{b}\text{(讀作 }A\text{ 的正切)},$$

$$\cot A=\frac{A\text{ 的鄰边}}{A\text{ 的对边}}=\frac{b}{a}\text{(讀作 }A\text{ 的余切)}.$$

同理有

$$sinB(B\text{ 的正弦})=\frac{B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

$$cscB(B\text{ 的余割})=\frac{\text{斜边}}{B\text{ 的对边}}=\frac{c}{b},$$

$$cosB(B\text{ 的余弦})=\frac{B\text{ 的鄰边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$secB(B\text{ 的正割})=\frac{\text{斜边}}{B\text{ 的鄰边}}=\frac{c}{a},$$

$$tanB(B\text{ 的正切})=\frac{B\text{ 的对边}}{B\text{ 的鄰边}}=\frac{b}{a},$$

$$cotB(B\text{ 的余切})=\frac{B\text{ 的鄰边}}{B\text{ 的对边}}=\frac{a}{b}.$$

而 $sinA$、$cosA$、$tanA$、$cotA$、$secA$、$cscA$ 叫做角 A 的三角函数，共有六个．同理，角 B 的三角函数也有六个．

2. 銳角三角函数的基本性質

有了三角函数的定义之后，下一步就是要研究它們之間的关系，也就是說要求这些函数具有的性質．首先，还是从 A 和 B 互为余角这一点来看，也就是說 B 可以用 A 来表示，即 $B=90°-A$，于是 $sinB=sin(90°-A)$，$cosB=cos(90°-A)$，等等；但在第一节里面曾經說过，$sinB=cosA$，$cosB=sinA$，等等，所以

$$\left.\begin{aligned}
sin(90°-A)&=cosA,\\
cos(90°-A)&=sinA,\\
tan(90°-A)&=cotA,\\
cot(90°-A)&=tanA,\\
sec(90°-A)&=cscA,\\
csc(90°-A)&=secA.
\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I})$$

同理，將 A 換为 B 时，也可得到类似公式（I）的关于 B

的六个式子．这就是說：某角的函数等于它余角的余函数(所謂某角在这时当然指的是銳角，所謂余函数是指正弦和余弦，正切和余切，正割和余割，都是兩兩互为余函数)．

其次，再从$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$，等等，兩兩互为倒数这一点来看，又显然得到

$$\left.\begin{aligned} \sin A\cdot\csc A&=1,\\ \cos A\cdot\sec A&=1,\\ \tan A\cdot\cot A&=1. \end{aligned}\right\}\qquad(\text{II})$$

同理，將A換为B时，也可得到类似(Ⅱ)的关于B的三个式子．今后我們就只从A来討論，因为关于B可照样推出．

有了(Ⅱ)式，为了便于記忆起見，我們只須記忆(Ⅰ)的前三个式子就够了，因为由这三个式子和(Ⅱ)就可以馬上推得出后三个式子来，例如

$$\cot(90^\circ-A)=\cot B=\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\tan(90^\circ-A)}=\frac{1}{\cot A}=\tan A,$$

等等．

最后，因为$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，于是$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{(a/c)}{(b/c)}=\frac{a}{b}=\tan A$，取其倒数则有$\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$；又因$a^2+b^2=c^2$，所以用$c^2$除兩边得$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$，卽是$\sin^2 A+\cos^2 A=1$①，若將

① $\sin^2 A$表示$\sin A\cdot\sin A=(\sin A)^2$．讀者可能发生一个疑問，那就是为什么不把$(\sin A)^2$記作$\sin A^2$呢？因为$\sin A^2$的意义很自然的是指角$A^2$的正弦，这当然一般是不与角$A$的正弦的平方相等，若將$(\sin A)^2$記作$\sin A^2$，那就容易与角$A^2$的正弦相混淆．而且在目前，我們的定义都限制在$A$为銳角，但$A^2$可能不是銳角，至于非銳角的三角函数的意义，我們現在尙未予以定义，所以記$(\sin A)^2$为$\sin^2 A$的理由也就在此！

$a^2+b^2=c^2$ 再变一变形，就是用 a^2 除兩边或用 b^2 除兩边，又得$1+(\frac{b}{a})^2=(\frac{c}{a})^2$ 或 $(\frac{a}{b})^2+1=(\frac{c}{b})^2$，即 $1+\cot^2 A=\csc^2 A$ 或 $\tan^2 A+1=\sec^2 A$。故得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin A}{\cos A}&=\tan A,\\ \frac{\cos A}{\sin A}&=\cot A,\\ \sin^2 A+\cos^2 A&=1,\\ 1+\tan^2 A&=\sec^2 A,\\ 1+\cot^2 A&=\csc^2 A.\end{aligned}\right\}\qquad(\text{III})$$

公式(III)同时还告訴我們，$\tan A$、$\cot A$、$\sec A$、$\csc A$ 都可以用 $\sin A$ 和 $\cos A$ 这兩个函数来表出，因为公式(III)的前兩个式子已指出，$\tan A$ 和 $\cot A$ 能用 $\sin A$ 和 $\cos A$ 表出，至于 $\sec A$ 和 $\csc A$ 更不用說也可以用 $\sin A$ 和 $\cos A$ 来表出，因为 $\sec A=\frac{1}{\cos A}$ 和 $\csc A=\frac{1}{\sin A}$ 的緣故。这一点很重要，我們往往利用这个性質总可以驗算一个式子是否正确。例如要証恆等式

$$(\cot A+\tan A)\cdot\csc A\cdot\sec A=\csc^2 A+\sec^2 A,$$

我們分别計算等号的左右兩边：

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)\cdot\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}\\ &=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cdot\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sin^2 A\cdot\cos^2 A},\end{aligned}$$

$$\text{右边}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin^2 A\cdot\cos^2 A}=\frac{1}{\sin^2 A\cdot\cos^2 A},$$

这就說明了左右兩边的值是相同的，故得到証明。

当然，对于这个例子还用不着这么麻煩，我們可以直接从左边推得右边，因为实际上，