

SHUXUE DASHI DE
CHUANGZAO YU SHIWU

吴振奎

吴健 著

吴旻

数学大师 创造与失误 的



天津教育出版社

TIANJINJIAOYUCHUBANSHE

数学大师 创造与失误



吴振奎
吴健
吴旻 著

SHUXUE DASHI
DE
CHUANGZAO
YU
SHIWU

天津教育出版社

TIANJIN JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目 (CIP) 数据

数学大师的创造与失误 / 吴振奎著. — 天津: 天津教育出版社, 2004. 1

ISBN 7-5309-3759-6

I. 数… II. 吴… III. ①数学 - 普及读物②数学家 - 生平事迹 - 世界 IV. ①01-49 ②K816. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 120593 号

数学大师的创造与失误

出版人 肖占鹏

作者 吴振奎 吴健 吴昱

责任编辑 董刚

装帧设计 董建

出版发行 天津教育出版社

天津市和平区西康路 35 号

邮政编码: 300051

经销 新华书店

印刷 天津美术印刷厂

版次 2004 年 1 月第 1 版

印次 2004 年 1 月第 1 次印刷

规格 32 开 (850 × 1168 毫米)

字数 267 千字

插页 2

印张 11.75

印数 1 - 3000

书号 ISBN 7 - 5309 - 3759 - 6/G · 3193

定价 16.00 元

前 言

科学的发现往往经历准备、酝酿、领悟和完成这四个阶段，其中首末两个阶段是有意识的，而中间的两个阶段则相反，数学也不例外。

数学家的发明、发现，往往是他们阅读演算、观察分析、归纳总结、开拓创新的结果。当然，前期的准备与铺垫，也使得他们的某些发现（或许不是全部）竟出现在瞬间，或出现于偶然。有人称之为“灵感”，有人说它是“运气”，其实是“灵犀点通”、“水到渠成”所然。或许正是这些瞬间、偶然，才使得数学家把我们带入别开生面的另一番天地，去领略数学花园中的奇葩异草，体味数学的神奇与魅力，发现数学美，认识数学美，理解数学美，欣赏数学美。

1

纵然“事事留心皆学问”，但别忘了你仍须留心在意、观察捕捉，此外还要记住冰冻三尺非一日之寒的道理。

金无足赤，人无完人。

人既皆可为舜尧，人也都会犯错误，纵然是学界泰斗，哪怕是科坛巨匠，数学家们当然也不例外。

俗称“老虎也会打盹”，数学大师们的失误原非本意，只是不够小心。他们的失误常涉及两个方面：一是他们对某些未知结论的冒然引申与判断；二是对他人正确思想的非议与否定（他们或许是无意中、或许是不理解、或许……），这其中有些是令人痛心

的,原因在于他们有着大师的声望,故往往也使其错误更具欺骗性,也更难被人识认与道破,因而更具杀伤力,代价也更加沉重。这是一种悲哀,又是一种无奈。

但另一方面,正如美国数学家哈莫斯(Halmos, P. R.)所言:“数学家 X 的一个漏失或一个误述,正好是数学家 Y 所需要用以发现真理的东西。”

数学有时真的是借此东风. 这样的例子数学史上还少吗?

我们将上述两方面资料汇集,无非是想从中学习一些道理与方法——做学问的道理与方法;再者我们也许可从中体味数学的魅力与美妙,悟出数学乃至整个科学发展的坎坷与艰辛,品鉴数学的严谨与纯真,容不得半点差错与丝毫瑕疵的缘由。

“敏于事而慎于言”,“大胆的假设,小心的求证”,在数学研究中亦应如此。

顺便讲一句:本书某种意义上讲应是拙作《名人·趣题·妙鲜》的姊妹篇。

2003 年初春

目 录

分形问题的思考(代序)	1
1. 数的扩充	2
2. 分数阶积分与微分	6
3. 连续统假设	8
4. 模糊数学的产生	11
5. 分形	12
6. 思考	16
上篇 数学家的发现与创造	21
一、数论不败	23
1. 多角数引发的课题	23
2. 自然数表为平方和问题	27
3. 素数个数的估计	33
4. 谈素(质)数表达式	38
5. 费尔马素数与尺规作图	44
6. 费尔马大定理获证	46
7. 哥德巴赫猜想	50
8. 角谷猜想	53
9. 乌兰现象	56
二、慎微设问	60
1. 奇妙的蜂房结构	60
2. 兔生小兔问题引发的数列	64
3. “算”出来的行星	70

4. 杜西现象	72
5. 柳维尔公式	73
6. 莫比乌斯带	74
7. $V + F - E = 2$ ——欧拉公式	78
8. 四色问题	80
9. 孤立波的由来	83
10. 四元数的产生	85
11. 阿贝尔公式的发现	88
三、追求完美	91
1. 海伦公式	91
2. 完美长方体	96
3. 完美矩形	99
4. 完美正方形	102
5. 完美三角形	113
6. 铺地问题	118
7. 植树问题	123
8. 省刻度的尺子	128
9. 完美标号	131
10. 巧证	137
11. “梵塔”与新奇解法	140
12. 投针计算 π 值	142
四、常数探幽	147
1. 黄金数 0.618...	147
2. 圆周率 π	155
3. 数 e	165
4. 欧拉常数 0.577 215 6...	172
5. 兰德尔数、史密斯数、威廉姆斯数、.....	178

6. 几种剖分数与组合数	187
7. 数字三角形	199
五、数学创造	209
1. 自然数方幂和伯努利数	209
2. 调和级数、幂级数与黎曼猜想	222
3. 斯坦纳比猜想	231
4. 等差数列的范·德·瓦尔登定理	235
5. 货郎担问题解法	239
6. 漫话分形	245
7. 混沌平话	254
 下篇 数学大师的失误	 275
一、老虎打盹	277
1. 费尔马素数公式	280
2. 哥德巴赫的另一个猜想	285
3. 正交拉丁方猜想	286
4. 欧拉方程猜想	292
5. 堆球问题	294
6. 分圆多项式	296
7. 双随机阵猜想及拓广	298
8. 院士的失误	300
9. 波利亚问题	302
二、成功之母	304
1. 麦森素数与完全数	304
2. 失败,但留下了方法	309
3. 议员席位分配难题	310
4. 十三球问题	313

5. 方程 $x^x y^y = z^z$ 的整数解	315
三、瑕不掩瑜	318
1. 会徽上的失误	318
2. 挑战贝尔曼原理	320
3. 错了 66 年	322
4. 经典大作中的小瑕疵	323
5. 希尔伯特第三问题的否定	330
四、山雨欲来	337
1. 欧几里得几何的衍生及障碍	337
2. 一般代数方程求根公式的前前后后	342
3. 函数连续与可微的争论	348
4. 集合论诞生的风风雨雨	355
5. 斯坦纳三元系解决的坎坎坷坷	361
参考文献	365

分形问题的思考

(代序)

“分形”作为一门崭新的数学分支刚刚诞生,便呈现勃勃生机——它在诸多领域中的应用便是明证,它在展现其自身风采的同时,也流溢着它无尽的魅力。

“分形”的出现绝非偶然,它当然有着深刻的数学背景,但慧眼识金的发明者如何剥离砂石、觅得真宝?它又给我们什么启示?这一切正是我们所关心的。

刚刚过去的20世纪,数学的发展可谓突飞猛进。一项项崭新的概念被提出;一个个划时代的成果被掘拓,这其中为适应数学发展而创立的新学科,几乎影响着全部数学乃至人类生活。

模糊数学诞生的背景蕴含着计算机(确切地讲为人工智能)发展的需求,但它的出现却使得家电产品引发一场革命;分形理论的创立原本是想从大千世界中奇形怪状、扑朔迷离的纷杂事件中找到其隐蔽的内在规律,如今其研究已遍及诸多科技领域。

加之诸如集合论、解析数论(比如费尔马(Fermat, P. de)大定理的获证)、群论、拓扑……等等诸学科的发展使得数学乃至整个科学世界面貌为之一新。

20世纪上半叶科学在向纵深发展之际,使得分支越来越多、越来越细;而后半世纪,则是学科互相渗透、彼此结合地交叉发展。

试想,数学中某些貌似风马牛不相及的分支的诞生、发展过程有无内在渊源?它又能给人们何种启示?我们还是先来看一下事实(当然这儿述及的仅是冰山一角)。

1. 数的扩充

人们对于数的认识经历了漫长的历程。

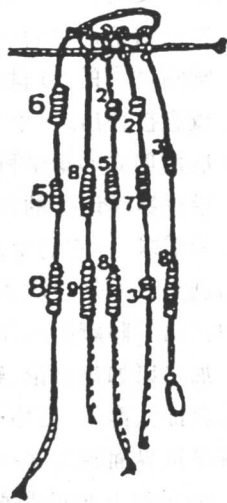
文字产生之前的远古时期,数的概念已经形成,当时人们用实物(石子、树棍、竹片、贝壳等)表示数,此外还用绳结记数,我国古籍《易经》上就有结绳记数的记载(上古结绳而治,后世圣人,易之以书契),在国外亦然。



我国古代甲骨文中的“数”字,
左边是打结的绳,右边是一只手,表
示古人用结绳记数



另一种绳结



现藏美国自然史博
物馆的印加记数基普



西班牙人描绘的秘鲁人结绳



藏于巴黎人类博物馆
的秘鲁印第安人绳法



现藏美国哥伦比亚大学图书馆的古代巴比伦的泥板文书(记数表格)

当然,人们还用泥板以及刻骨记数.



现藏布鲁塞尔博物馆的乌干达出土的刻痕记数的一根骨头



我国出土的一块甲骨及其上的数目字

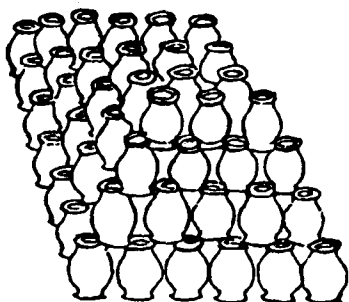
这些用数形结合去对抽象“数”的诠释或描述的做法,曾启发毕达哥达斯(Pythagoras)学派的学者们用“形数”概念去研究数的性质,且至今仍影响着人类的思维(比如代数性质的几何解释等正是这种思维的延伸).

三角数

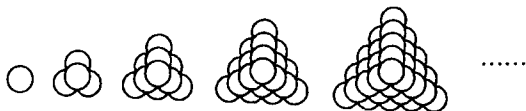


四角数





我国宋代沈括发明“隙积术”，考虑了平头楔形中有空隙的酒坛堆垛问题等的计算，其中正方垛给出相当于 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式



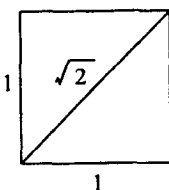
我国元代朱世杰精心分析了堆垛问题，给出底层每边由 $1 \sim n$ 个 n 只三角垛集合成的“撒星形”，积垛相当于今天的计算公式

$$\begin{aligned} s &= 1 + (1+3) + (1+3+6) + \cdots + \\ &\quad \left[1+3+6+\cdots + \frac{1}{2}n(n+1) \right] \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

由于分配（当一件或 n 件物品多人去分时）而引出了“分数”概念，它的出现是数学史上令人振奋的一件大事。

古埃及人就研究过分子是 1 的分数（单位分数）的诸多性质。

分数在我国出现的年代不详，但在不少古籍如《管子》、《墨子》等书中已有记载。



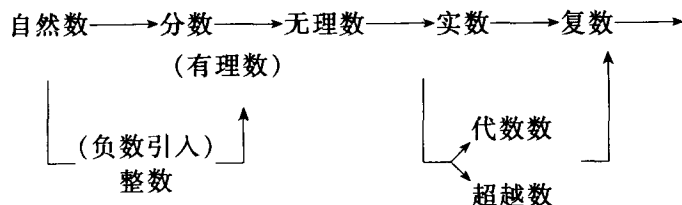
无理数的发现曾付出过沉重的代价。

古希腊毕达哥拉斯学派的学者们一致认为，数皆可表为两整数比的形式（即分数或有理数）。但学派成员希伯斯（Speusippus）却发现了边长为 1 的正方形（单位正方形）其对角线长无法用分数表达。他的发现不仅没能得到学派的肯定，反而招来杀身之祸（据传他被抛入大海葬身鱼腹）。

由于无理数的发现加之随后负数概念的引入，人们完成了对于数的一个阶段认识：

实数 { 有理数 { 整数（自然数，0，负整数），
分数（正、负分数）；
无理数（无限不循环小数）。

如今人们对数的认识在不断扩张。



多元数 → 向量 → 矩阵 → 张量 → ...

（它们不是数，但可运算）

当然，幂指数的扩张经历过同样的历程，只是在那儿拓展进程的时间缩短了。

2. 分数阶积分与微分

我们知道：函数微分、积分时，微分的阶数、积分的重数皆为

整数,如3阶导数(3次微分)、2重积分等等.在它们出现不久,柳维尔(Liouville, J.)等人已开始着手将微、积分阶数(重数)推广到分数情形的工作.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,设 $I_1^\alpha f(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上的积分,而 $I_\alpha^\alpha f(x)$ 为 $I_{\alpha-1}^\alpha f(x)$ 在 $[a, x]$ 上的积分, $\alpha = 2, 3, \dots$, 则

$$I_\alpha^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ 是 Γ 函数.

(1)式定义了 $f(x)$ 以 a 为始点的 α 阶分数阶积分,这是数学家柳维尔于1832年给出的,又称 Riemann - Liouville 积分.

对于复参数 z ,算子 I_z^α 黎曼(Riemann, B.)曾于1847年研究过,且该算子是线性的且有半群性质.

$$I_\alpha^\alpha [I_\beta^\alpha f(x)] = I_{\alpha+\beta}^\alpha f(x).$$

分数阶积分的逆运算称为分数阶微分:

若 $I_\alpha f = F$, 则 f 为 F 的 α 阶分数阶导数.

马尔采特(Marchaut)在 $0 < \alpha < 1$ 时给出公式:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left\{ \frac{F(x) - F(x-t)}{t^{1+\alpha}} \right\} dt.$$

1832年柳维尔特别研究了算子 $I_\alpha^{-\infty} = I_\alpha, \alpha > 0$:

$$I_\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

1917年魏尔(Weyl, H.), 对以 2π 为周期, 且在周期上是零均值的函数:

$$f(x) \sim \sum_{|n|>0} C_n e^{inx} = \sum' C_n e^{inx},$$

定义 f 的 $\alpha (\alpha > 0)$ 阶 Weyl 积分:

$$f_\alpha(\alpha) \sim \sum' \frac{C_n e^{inx}}{(in)^\alpha}; \quad (2)$$

及 f 的 $\beta(\beta > 0)$ 阶导数 f^β ,

$$f^\beta(x) = \frac{d^n}{dx^n} f_{n-\beta}(x), \quad (3)$$

这里 $n = [\beta]$, 即不超过 β 的最大整数.

在广义函数论中周期广义函数 $f \sim \sum' C_n e^{inx}$ 的分数阶积分 $I_\alpha f = f_\alpha$ 的运算仿(2)且对一切 $\alpha \in \mathbf{R}$ 实现.

黎茨(Riesz, F.)又将分数阶积分推广到 n 维空间 $X \subset \mathbf{R}^n$ 中, 且称 Riesz 位势型积分:

$$R_\alpha f(x) = \pi \frac{\alpha - n}{2} \Gamma\left(\frac{n - \alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \int_x \frac{f(t)}{|x - t|^{n-\alpha}} dt.$$

且 R_α 的逆运算称为 α 阶 Riesz 导数.

至此, 微分、积分阶数已由整数拓广到了实数情形(包括 n 维空间里的微分、积分).

3. 连续统假设

集合论(用公理化或朴素的直观方法研究集合性质的数学分支)是关于无穷集合和超穷数的数学理论, 它的产生是现代数学的一个重要标志.

由于数学分析的研究需要, 高斯(Gauss, C. F.)、傅里叶(Fourier, J.)等大师们为集合论产生做了大量铺垫.

1870 年德国数学家海涅(Heine, H. E.)证明了:

若 $f(x)$ 连续, 且其三角级数展式一致收敛, 则展式惟一.

当 $f(x)$ 有无穷个间断点时, 上述惟一性能否成立?

德国数学家康托(Cantor, M.)正是研究此问题时创立了集合论, 它是以 1874 年发表的《关于一切代数实数的一个性质》一