SHUXUE DASHI DE
CHUANGZAO YU SHIWU

数学大师的创造与失误

吴振奎
吴　健　著
吴　旻

天津教育出版社
TIANJINJIAOYUCHUBANSHE

数学大师的创造与失误

吴振奎
吴　健
吴　昊　著

SHUXUE DASHI
DE
CHUANGZAO
YU
SHIWU

天津教育出版社
TIANJIN JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目（CIP）数据

数学大师的创造与失误 / 吴振奎著．—天津：天津教育出版社，2004.1
ISBN 7-5309-3759-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．①数学－普及读物②数学家－生平事迹－世界　Ⅳ．①01-49②K816.11

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第120593号

数学大师的创造与失误

出版人　肖占鹏

作　　者　吴振奎　吴　健　吴　旻
责任编辑　董　刚
装帧设计　董　建

出版发行　天津教育出版社
天津市和平区西康路35号
邮政编码：300051
经　　销　新华书店
印　　刷　天津美术印刷厂
版　　次　2004年1月第1版
印　　次　2004年1月第1次印刷
规　　格　32开（850×1168毫米）
字　　数　267千字
插　　页　2
印　　张　11.75
印　　数　1－3000

书　　号　ISBN 7－5309－3759－6/G·3193
定　　价　16.00元

前　言

科学的发现往往经历准备、酝酿、领悟和完成这四个阶段，其中首末两个阶段是有意识的，而中间的两个阶段则相反，数学也不例外.

数学家的发明、发现，往往是他们阅读演算、观察分析、归纳总结、开拓创新的结果.当然，前期的准备与铺垫，也使得他们的某些发现(或许不是全部)竟出现在瞬间，或出现于偶然.有人称之谓"灵感"，有人说它是"运气"，其实是"灵犀点通"、"水到渠成"所然.或许正是这些瞬间、偶然，才使得数学家把我们带入别开生面的另一番天地，去领略数学花园中的奇葩异草，体味数学的神奇与魅力，发现数学美，认识数学美，理解数学美，欣赏数学美.

纵然"事事留心皆学问"，但别忘了你仍须留心在意、观察捕捉，此外还要记住冰冻三尺非一日之寒的道理.

金无足赤，人无完人.

人既皆可为舜尧，人也都会犯错误，纵然是学界泰斗，哪怕是科坛巨匠.数学家们当然也不例外.

俗称"老虎也会打盹"，数学大师们的失误原非本意，只是不够小心.他们的失误常涉及两个方面：一是他们对某些未知结论的冒然引申与判断；二是对他人正确思想的非议与否定(他们或许是无意中、或许是不理解、或许……)，这其中有些是令人痛心

的，原因在于他们有着大师的声望，故往往也使其错误更具欺骗性，也更难被人识认与道破，因而更具杀伤力，代价也更加沉重。这是一种悲哀，又是一种无奈.

但另一方面，正如美国数学家哈莫斯(Halmos，P.R.)所言："数学家X的一个漏失或一个误述，正好是数学家Y所需要用以发现真理的东西."

数学有时真的是借此东风.这样的例子数学史上还少吗？

我们将上述两方面资料汇集，无非是想从中学习一些道理与方法——做学问的道理与方法；再者我们也许可从中体味数学的魅力与美妙，悟出数学乃至整个科学发展的坎坷与艰辛，品鉴数学的严谨与纯真，容不得半点差错与丝毫瑕疵的缘由.

"敏于事而慎于言"，"大胆的假设，小心的求证"，在数学研究中亦应如此.

顺便讲一句：本书某种意义上讲应是拙作《名人·趣题·妙解》的姊妹篇.

2003年初春

目　　录

分形问题的思考
（代序）

“分形”作为一门崭新的数学分支刚刚诞生，便呈现勃勃生机——它在诸多领域中的应用便是明证，它在展现其自身风采的同时，也流溢着它无尽的魅力．

“分形”的出现绝非偶然，它当然有着深刻的数学背景，但慧眼识金的发明者如何剥离砂石、觅得真宝？它又给我们什么启示？这一切正是我们所关心的．

刚刚过去的20世纪，数学的发展可谓突飞猛进．一项项崭新的概念被提出；一个个划时代的成果被掘拓，这其中为适应数学发展而创立的新学科，几乎影响着全部数学乃至人类生活．

模糊数学诞生的背景蕴含着计算机(确切地讲为人工智能)发展的需求，但它的出现却使得家电产品引发一场革命；分形理论的创立原本是想从大千世界中奇形怪状、扑朔迷离的纷杂事件中找出其隐蔽的内在规律，如今其研究已遍及诸多科技领域．

加之诸如集合论、解析数论(比如费尔马(Fermat，P．de)大定理的获证)、群论、拓扑……等等诸学科的发展使得数学乃至整个科学世界面貌为之一新．

20世纪上半叶科学在向纵深发展之际，使得分支越来越多、越来越细；而后半世纪，则是学科互相渗透、彼此结合地交叉发展．

试想，数学中某些貌似风马牛不相及的分支的诞生、发展过程有无内在渊源？它又能给人们何种启示？我们还是先来看一下事实(当然这儿述及的仅是冰山一角)．

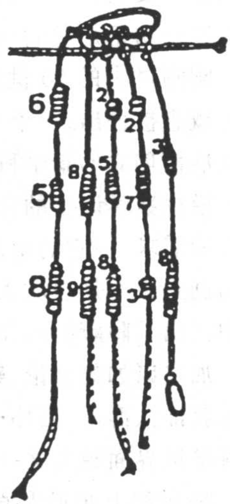
1.数 的 扩 充

人们对于数的认识经历了漫长的历程.

文字产生之前的远古时期,数的概念已经形成,当时人们用实物(石子、树棍、竹片、贝壳等)表示数,此外还用绳结记数,我国古籍《易经》上就有结绳记数的记载(上古结绳而治,后世圣人,易之以书契),在国外亦然.

我国古代甲骨文中的“數”字,左边是打结的绳,右边是一只手,表示古人用结绳记数

另一种绳结



现藏美国自然史博物馆的印加记数基普

西班牙人描绘的秘鲁人结绳

藏于巴黎人类博物馆
的秘鲁印第安人绳法

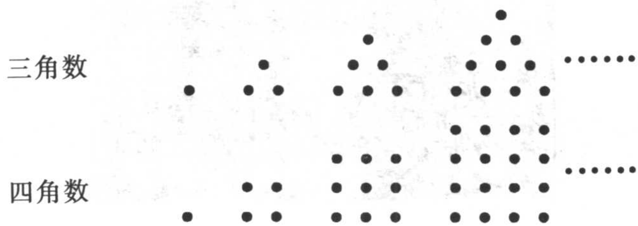
现藏美国哥伦比亚大学图书馆的古代巴比伦的泥板文书(记数表格)

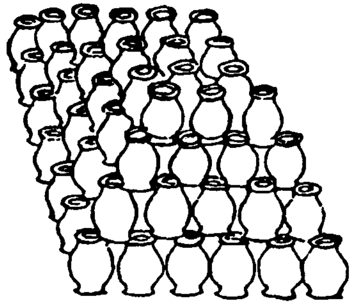
当然,人们还用泥板以及刻骨记数.

现藏布鲁塞尔博物馆的乌干达出土的刻痕记数的一根骨头

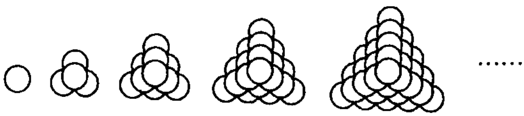
我国出土的一块甲骨及其上的数目字

这些用数形结合去对抽象"数"的诠释或描述的做法,曾启发毕达哥达斯(Pythagoras)学派的学者们用"形数"概念去研究数的性质,且至今仍影响着人类的思维(比如代数性质的几何解释等正是这种思维的延伸).





我国宋代沈括发明"隙积术",考虑了平头楔形中有空隙的酒坛堆垛问题等的计算,其中正方垛给出相当于 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$的公式



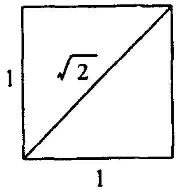
我国元代朱世杰精心分析了堆垛问题,给出底层每边由 $1\sim n$ 个 n 只三角垛集合成的"撒星形",积垛相当于今天的计算公式

$$
\begin{aligned}
s &= 1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+ \\
&\quad \left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right] \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}
$$

由于分配(当一件或 n 件物品多人去分时)而引出了"分数"概念,它的出现是数学史上令人振奋的一件大事.

古埃及人就研究过分子是1的分数(单位分数)的诸多性质.

分数在我国出现的年代不详,但在不少古籍如《管子》、《墨子》等书中已有记载.



无理数的发现曾付出过沉重的代价.

古希腊毕达哥拉斯学派的学者们一致认为，数皆可表为两整数比的形式(即分数或有理数).但学派成员希伯斯(Speusippus)却发现了边长为1的正方形(单位正方形)其对角线长无法用分数表达.他的发现不仅没能得到学派的肯定，反而招来杀身之祸(据传他被抛入大海葬身鱼腹).

由于无理数的发现加之随后负数概念的引入，人们完成了对于数的一个阶段认识：

实数 $\begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数(自然数,0,负整数),} \\ \text{分数(正、负分数);} \end{cases} \\ \text{无理数(无限不循环小数).} \end{cases}$

如今人们对数的认识在不断扩张.

自然数 ⟶ 分数 ⟶ 无理数 ⟶ 实数 ⟶ 复数 ⟶

(有理数)

(负数引入)

整数

代数数

超越数

多元数 ⟶ 向量 ⟶ 矩阵 ⟶ 张量 ⟶ …

(它们不是数，但可运算)

当然，幂指数的扩张经历过同样的历程，只是在那儿拓展进程的时间缩短了.

2.分数阶积分与微分

我们知道：函数微分、积分时，微分的阶数、积分的重数皆为

整数,如3阶导数(3次微分)、2重积分等等.在它们出现不久,柳维尔(Liouville,J.)等人已开始着手将微、积分阶数(重数)拓广到分数情形的工作.

若$f(x)$在$[a,b]$上可积,设$I_1^a f(x)$为$f(x)$在$[a,x]$上的积分,而$I_\alpha^a f(x)$为$I_{\alpha-1}^a f(x)$在$[a,x]$上的积分,$\alpha=2,3,\cdots$,则

$$I_\alpha^a f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,\ a\leqslant x\leqslant b, \tag{1}$$

其中$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ 是Γ函数.

(1)式定义了$f(x)$以a为始点的α阶分数阶积分,这是数学家柳维尔于1832年给出的,又称Rimann - Liouville积分.

对于复参数z,算子I_z^a黎曼(Riemann,B.)曾于1847年研究过,且该算子是线性的且有半群性质.

$$I_\alpha^a[I_\beta^a f(x)]=I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

分数阶积分的逆运算称为分数阶微分:

若$I_\alpha f=F$,则f为F的α阶分数阶导数.

马尔采特(Marchaut)在$0<\alpha<1$时给出公式:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \left\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\right\}\mathrm{d}t.$$

1832年柳维尔特别研究了算子$I_\alpha^{-\infty}=I_\alpha,\alpha>0$:

$$I_\alpha f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

1917年魏尔(Weyl,H.),对以2π为周期,且在周期上是零均值的函数:

$$f(x)\sim\sum_{|n|>0}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum{}'C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

定义f的$\alpha(\alpha>0)$阶Weyl积分:

$$f_\alpha(\alpha)\sim\sum{}'\frac{C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{(\mathrm{i}n)^\alpha}; \tag{2}$$

及 f 的 $\beta(\beta>0)$ 阶导数 f^{β},

$$f^{\beta}(x)=\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}f_{n-\beta}(x), \tag{3}$$

这里 $n=[\beta]$,即不超过 β 的最大整数.

在广义函数论中周期广义函数 $f\sim\sum{}'C_{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 的分数阶积分 $I_{\alpha}f=f_{\alpha}$ 的运算仿(2)且对一切 $\alpha\in\mathbf{R}$ 实现.

黎茨(Riesz,F.)又将分数阶积分推广到 n 维空间 $X\subset\mathbf{R}^{n}$ 中,且称 Riesz 位势型积分:

$$R_{\alpha}f(x)=\pi\frac{\alpha-n}{2}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_{X}\frac{f(x)}{|x-t|^{n-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

且 R_{α} 的逆运算称为 α 阶 Riesz 导数.

至此,微分、积分阶数已由整数拓广到了实数情形(包括 n 维空间里的微分、积分).

3.连续统假设

集合论(用公理化或朴素的直观方法研究集合性质的数学分支)是关于无穷集合和超穷数的数学理论,它的产生是现代数学的一个重要标志.

由于数学分析的研究需要,高斯(Gauss,C.F.)、傅里叶(Fourier,J.)等大师们为集合论产生做了大量铺垫.

1870 年德国数学家海涅(Heine,H.E.)证明了:

若 $f(x)$ 连续,且其三角级数展式一致收敛,则展式惟一.

当 $f(x)$ 有无穷个间断点时,上述惟一性能否成立?

德国数学家康托(Cantor,M.)正是研究此问题时创立了集合论,它是以 1874 年发表的《关于一切代数实数的一个性质》一