K·A·基托維尔著

圓形薄板

建築工程出版社

圓 形 薄 板

軸心对称的荷載和集中力下的靜定計算

陳 应 洲 譯

建 築 工 程 出 版 社 出 版

·一九五六·

內容提要 本書係研究在軸心对称荷載下，以及在沿同心圓圓周对称分佈为一系列相等力（或力偶）的形式的荷载下，關於各向同性的圓形和环形薄板的变形和力的確定問題。

应用初等參变數方法，以及应用本書中所列举的表格和便於实际应用的公式，大大地簡化了圓形板在剛性和彈性支座上的計算，以及簡化了与圓柱形殼体（貯蓄器）彈性連接的板，或以剛性环形肋梁加勁的板的計算。

本書可供工程師、建築結構工程師、專門的机械工程師和科学工作者应用。

原本說明

書　名	КРУГЛЫЕ ТОНКИЕ ПЛИТЫ
編 著 者	К. А. Китовер
出 版 者	Государственное Издательство Литературы По Строительству и Архитектуре
出版地點及日期	Ленинград—1953—Москва

圓 形 薄 板

陈 应 洲 譯

*

建築工程出版社出版(北京市阜成門外南禮士路)

(北京市書刊出版業營業許可證出字第052號)

外文印刷廠印刷·新華書店發行

書號254 91千字 850×1168公 印張3千 插頁

一九五六年四月第一版 一九五六年四月第一次印刷

印數：1—3,000冊 定價(9)0.98元

目　　錄

緒　言

建築結構構件計算方法的完善——是建築力学上的一个迫切問題。由於苏联共產党第十九次代表大会在發展苏联第五个五年計劃的指示中，制定了巨大的綱領，这个問題更具有特别重大的意义。

在最近的年代中，苏联学者們曾經進行了一系列的大規模的工作，使許多建築力学上的困难問題能够大大的簡化。

为了減少設計工作者的困难，最重要的是確定新的計算方法，該計算方法，係建立在充分的应用表格材料的最新方法上。

提供讀者注意，以及用來說明圓形与环形板的合理計算方法的專論並不很多。

圓形与环形板，在实用上作为建築結構的構件是經常遇到的。只要提到樓層間的樓板、貯蓄器、或鍋爐的底板和盖板，便足以使人相信，这類構件在工程中有廣大的应用範圍。

大多數的圓形板，係在僅沿半徑方向变化的軸心对称荷載下工作的。如果这類板的支座構造，对於所有的由中心導引的半徑矢量是相同的，那麼板將受到軸心对称的变形，这時位移和应力僅由半徑決定。

这样形式变形的彈性薄板的弯曲理論，是早为众所週知的，在許多彈性理論教程、材料力学以及特别的專論中(文献2,13,15)均有叙述。

这个理論应用在具体問題的解決上，並不引起原則上的困难，但在很多情况下，需要花費較多的劳動力，在組成和解为確定積分常數的綫性方程式組上。这些積分常數的數量，主要是依环的區段數量而定，而區段的劃分是依荷載和支座構造等情况而決定的。

为了便於支座構造和荷載的最簡單方案的計算，制定了容許直接求出板的任一點的变形和应力的公式。这种類型的公式，列举在許多技術参考書和文献中（文献 21、22）。綜合了不同方案的公式，便可以解决關於各种不同支座構造時，具有相当複雜荷載的板的弯曲問題，

可惜的是，發生在板內的变形和力的公式，虽然是最簡單的荷載時，仍舊具有極为複雜的形式，以致在相当大的範圍內，难於將它們应用在实际工作上。此外仍需考慮，在实用上所遇見的某些問題，是不可能应用現成的公式來解，而要求制定新的公式。

大家知道，類似的情况，有相似梁的彈性綫的確定問題。其实，由 A.H. 卡雷洛夫院士（文献 9）所制定的關於梁在彈性地基上的初等参变數方法和由 A. A. 烏孟斯基（文献24）以及其他学者所研究出的關於建築力学上的一系列問題，完滿地消除了關於梁的劃分成为很多區段的困难問題。

很自然的，初等参变數方法，可以有成效地推廣在關於圓形和环形板弯曲問題的解决上。第一个这样的圓形和环形板的方法，於1939年由作者制定（文献 6），那時曾得到五个函數的公式，該公式容許在任意对称荷載和支座構造時，將板的弯曲問題簡化为確定兩个未知數。在以後的年代中，在 П. Ф. 巴博柯維契（文献 15）和 B. Л. 比傑尔曼（文献 18）的著作中曾採用初等参变數方法在圓形板上。应当指出，在 П. Ф. 巴博柯維契的書中所考慮的僅係四个函數，而在 B. Л. 比傑尔曼的著作中僅係兩个函數，这难於將它們应用在某些問題的解决上。終於在最近，这个方法完全適用於圓形和环形板的弯曲和平面应力狀态（幅向拉伸）的問題上，这个方法敍述於 Д. B. 瓦依貝尔加（文献 1）的專論中。

虽然經过了比較長的時間，与制定軸心对称荷載作用下的圓形板的初等参变數方法，但是仍舊应該承認，到現在为止，它在实际的工程結構計算上，还沒有得到足够廣泛的应用。这种現象的根本原因，在於表示基本函數和其微商公式的複雜。

第一次企圖將未知函數列成表格的是参考書（文献 15），該書

中列举了由 A. A. 庫尔裘莫夫和 A. C. 索科洛夫所編制的兩个函數和其微商的表格。該表的主要缺點在於独立变數間的間隔較大，这將失去了用直綫補插法的可能性。以後，B. Л. 比傑尔曼曾編制了圖解，但僅僅是採用在他的著作中的兩个函數和其微商的圖解。

因为直至現在还沒有發表过足够詳細的所有必須函數的表格。这种情况促使在本書中列入了詳細的表格。本書適用於在实际的工程計算中，当計算圓形和环形板時，採用初等参变數方法。

圓形板經常傳遞荷載在連續的地基上，这时反力係依板的变形而定。直至 1922 年，这類板的計算，僅僅是在任一點上地基反力与板的撓度成比例的假定基礎上進行的。在上述假定基礎上，關於板的軸心对称变形問題的第一次精確解，曾由 A. H. 定尼卡(文献3)於 1912 年得到。这种板的精確解(文献 3、15)，由於和前面所指出的对於一般板的原因一样，在实际的应用上是困难的。初等参变數方法的应用在原則上虽屬可以(文献 6、8)，但是因为缺乏特殊的表格，很明顯，在实用上不能得到廣泛的应用。这种表格的制定是非常困难的問題，因为列表的數值是以貝塞尔函數表示的。

考慮了叙述的情况，我們可以設想，为了实用的目的，可以应用板的近似計算方法，这种方法，係基於 Б. H. 捷摩契金所提出的板在彈性半無限体上的計算方法(文献 4)。如果地基服从於簡單的比例法則，那麼近似的計算方法，可以把沿一系列的同心环作用的地基反力的合力式子，簡化为以板的兩个初等参变數來表示。如果应用本書中的表格，則計算这祥板的所有手續是很簡單的。

最近在工程計算的实踐中，所謂廣义彈性地基的方法得到了应用，其反力係由沿板表面分佈的力和力偶組成。假定在板上，由於地基而產生的力和力矩的荷載分佈集度，係与相应的撓度和与板相切的傾斜角成比例的。關於在这样地基上的板的弯曲問題的精確解，曾由 C. И. 索柯洛夫求得(文献 23)。板在廣义彈性地基上的近似解，同样可以根据本書中所列举的表而得到簡化(見第四

章)❶

關於板在彈性各向同性的地基上的計算問題，於 1922 年，第一次被提供在 Г. Э. 博罗克托尔的論文中。从那時起，在彈性半無限体上的梁和板的計算，由於苏联研究工作者的努力，基本上得到了很廣泛的發展。在这种地基上的端部剛硬的圓形板，在均佈荷載下的精確解，曾由 А. Г. 伊什柯娃求得（文献 5）。但是对於其他的荷載情况下，目前在实用上，只能採用 1935 年第一次發表的 Б.Н. 捷摩契金（文献 4）的專門論文中的近似計算方法。这个方法是以一系列的环形力，來代替实际的地基反力，这些环形力的集度，由一般的变形法則方程式來確定。这些方程式的係數計算和由單位力与荷載所產生的板和地基撓度的確定方法有關。如果地基的变形計算，係按照最簡單的公式進行，則板的撓度確定便是繁雜的問題了。当根据某些原因，在不可能採用 Б. Н. 捷摩契金的表格的情况下，初等參变數的方法，是可以大大地簡化这个問題的。

1937 年，В.И.烈烏特（文献19）提供了新的鋼筋混凝土結構形式——用剛性的环形肋梁加勁的板。正如 В. И. 烈烏特所指出的，这种板容許跨越較大的跨度，而不必採用中間的支點。这類板在計算上的基本困难，在於確定肋梁与板連接处所產生的力。当軸心对称的变形時，这些力可以簡化为环形的輻向力和力矩。这样，对於具有 n 个肋梁的板，必須解 $2n$ 个方程式。但是，採用了初等參变數方法，便可完全以板的初等參变數，來表示肋梁与主要結構連接处所產生的力。

应当考慮到，这样構造的板，不僅承受彎曲，而且承受由輻向环形力的作用而生的拉伸。当產生平面变形的軸心对称荷載時，板內的力和位移，可以以一个初等參变數表示之。对於这样的手續所要求的函數數值，可藉助於板的彎曲問題而制定的基本表格來確

---

❶ 在最近發表的 П.И. 卡盧丙的論文（苏联科学院力学研究所工程論文集第XII卷 1952 年）[在彈性地基上梁与圓形板的計算]中，談到在彈性半無限体上实心圓形板的新的計算方法。当適当地研究時，这个方法可能較在第五章叙述的 Б.Н. 捷摩契金的方法更为有效。

定。这样，用肋梁加劲板的計算，除了与肋梁的數量有關外，可以簡化为確定三个參变數。应当指出，对於实心板和具有自由內緣的环形板，为確定其參变數的方程式，由於只需要解具有二个未知數的方程式組，因此可以分为兩類。

在許多的場合下，肋梁不僅加强了板，但也常常就是基本結構。作为例子的可以引証樓盖中的前後肋梁，不在同一水平标高的樓板和具有底板和頂盖的短形圓柱体和貯蓄器等。

对於这种結構物的計算，可以根据端截面的变形和力來確定肋梁任意截面的（沿其高度）位移和力。这当藉助於 A.H. 卡雷洛夫（文献9）的函數時，是可以做到的。在第三章中，卡雷洛夫的函數被表示为容許不应用表格便能很容易進行計算精密的公式形式。

应当指出，以肋梁加勁的板的計算，必須具有为確定肋梁端截面变形和作用在同一截面上的力之間的關係的公式。这些公式及其相应的表格，在第二和第三章中敘述。

貯蓄器的壁，可以考慮为高的肋梁。因此關於確定貯蓄器的底板和頂盖中的应力問題与用肋梁加勁的板的計算問題，原則上毫無不同之处。这類結構物的計算，在第二章中研究。

在实用上最常碰見的是承受或傳遞接近於集中力或力偶荷載的板。如果这样的荷載，分佈在沿圓周同一距离上，是彼此相等的，則造成具有 n 个对称平面的变形（n——引起板变形的力和輻向力的數量）。在第五章中，列举了能够確定这類板中的变形和应力的基本資料。

当不是軸心对称荷載時，板的彈性表面的基本確定方法，是把位移的方程式，表示为三角級數的形式，其係數的確定僅决定於半徑。

这些係數的確定与積分常數的尋求有關，積分常數的數目决定於區段的數量。作者在 1937 年所制定出的軸心对称荷載的初等参变數方法（文献7），可以使計算得到很大的簡化。应当指出，提供同样方法的尙有 П.Φ. 巴博柯維契（文献 15）和 Д.В. 瓦依貝尔加（文献 1）。

当集中的力或力矩作用在实心板上時，可以得到为完备形式的彈性表面方程式。例如，大家知道米切耳（文献12）關於位於圓心外集中力的作用下，具有固定边緣的板的計算方法，曾由А.И.盧尔也（文献12）求得在这样的荷載作用下，具有支承的板或具有不受力边緣的板的解法。

沿边緣各點支承的板的解法，在Д.В.瓦依貝尔加（文献1）中叙述。

环形板，以及以剛性肋梁加勁的板，或与蓄水池壁連接的板和承受集中力作用的板，暫時还不能成功地得到完备形式的解。僅有的是由Н.В.庫特良符采夫（文献10）所得到的關於环形板为級數形式的解。

表示彈性表面級數的收斂性的增加，可以应用作者在1939年所指出的方法（文献7）得到。实际上，類似的改善級數收斂性的方法，也發表在Д.В.瓦依貝尔加（文献1）的專論中。应当指出，沿圓周上具有不少相等的力或輻向力矩時，其本身已相当地改善了確定彈性表面級數的收斂性，因为这時由於对称的關係，所保留的只是其指數为力的數目的倍數的級數項。

有了可能性与相当簡便的計算由於集中力的作用而產生的变形和力，即可以近似地解决这样的問題。例如，由於一系列的柱子傳遞压力在彈性半無限体上的板的計算，或者不僅以环肋加勁的板，同样以剛性輻向肋梁加勁的板的計算。

从上面的叙述可以看出，本書中所研究的問題中的圍，是頗为廣泛的，因为有關的結論可以在我們的技術文献中找到，此处不再引述。

例如，我們省略了板弯曲的主要微分關係的詳細結論，而僅僅指明在理論基礎上規定的基本假定。在所有的場合下，類似这样的指示，在文献上做成了索引，讀者如不熟悉所引用的結論時，可以查閱文献便能得到詳細的叙述。在本書中列举了說明計算手續的數字例子。所有計算均可应用計算尺來進行（方程式組中具有四个未知數的解法除外）。

第一章　軸心对称变形板的初等参变數方法

（一）圓形板的弯曲理論基礎

以下所叙述的計算方法，係特殊的關於所謂彈性薄板和基於古典的板的弯曲理論。下列的假設为这个理論的基礎：

1．当弯曲時，板的变形不会使它的中間面伸長；

2．垂直於中間面的板的纖維当弯曲变形時，保持直綫和垂直於中間面；

3．与中間面相平行的面上的法向应力，与其他的应力相較，小到可以略去不計。

由各个不同作者（文献2、15）所進行的一系列計算証明了，这些基於上述假設的理論，在下列条件下獲得滿意的結果：

1．板的厚度 h 較它的半徑方向的尺寸 a 为小（$h<\frac{1}{5}a$）；

2．板的撓度 w 較它的厚度为小（$w<\frac{1}{5}h$）。

对於圓形和环形板，如果使座标原點和板的中心重合，便能很自然地採用圓柱座标系統（r,θ,z）。

我們提示關於作用在与座标面相切面上（$r=$常數；$\theta=$常數；$z=$常數）的分应力的符号，以及正負号的法則。法向应力 σ_r,σ_θ（指标决定於至該面的法綫方向），如果引起拉力，則作为正的，切綫应力以 $\tau_{r\theta},\tau_{\theta z},\tau_{zr}$ 表示（第一个指标字母为該面的法綫方向，而第二个为应力的方向），如果它們对於平行座标軸的方向与該面上的外法綫对於本身軸綫的方向一样時，則作为正的。

正方向的分应力，表示在圖 1，a 板單元的顯側面上。

如果以 w 表示中間面上點子沿 z 軸方向的位移，則由於任意荷

载下当弯曲時，板的中間面方程式將表示为：

$$w=f(r,\theta)。\qquad (1.1)$$

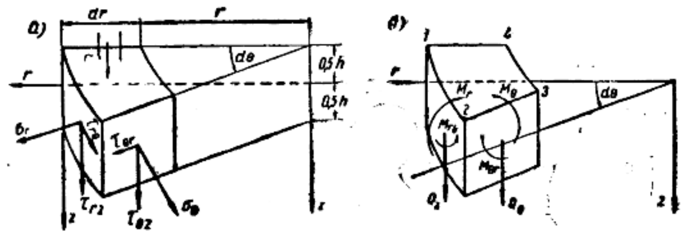

圖 1. 板內应力和力的符号

a)作用在板單元顯側面的分应力；б)作用在板單元顯側面的力

引用前面所述的假設和板單元体積的平衡方程式，(文献2、15)可以得到如下的關係：

$$\sigma_r=-\frac{Ez}{\lambda_1\lambda_2}\left[\lambda_1\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\mu\nabla^2 w\right];\ \tau_{rz}=-\frac{E(h^2-4z^2)}{8\lambda_1\lambda_2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w;$$

$$\sigma_\theta=-\frac{Ez}{\lambda_1\lambda_2}\left[\nabla^2 w-\lambda_1\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right];\ \tau_{\theta z}=-\frac{E(h^2-4z^2)}{8\lambda_1\lambda_2 r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w;\qquad (1,2)$$

$$\sigma_z\approx 0;\ \sigma_{r\theta}=-\frac{Ez}{\lambda_2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right),$$

式中：E——一般的彈性模數；μ——波桑係數；h——板的厚度；$\nabla^2 w$——微分算子。

$$\nabla^2 w=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w。\qquad (1,3)$$

为了書寫的簡化，在公式(1,2)中，以後採用如下的符号：

$$\lambda_1=1-\mu;\ \lambda_2=1+\mu;\ \lambda_3=3+\mu;\ \lambda_4=1+3\mu。\qquad (1,4)$$

当計算板時通常開始確定的不是应力，而是它的所謂單位面上的合力，即單位寬度的板面上的合力，从公式(1,2)得出板內的合力可以歸結为如下各力：

1. 彎矩：

$$M_r=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_r dz;\quad M_\theta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_\theta dz, \tag{1,5a}$$

2. **扭矩：**

$$M_{r\theta}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{r\theta} dz, \tag{1,5б}$$

3. **剪力：**

$$Q_r=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz;\quad Q_\theta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta z} dz。 \tag{1,5в}$$

M 和 Q 的正方向表示在圖 1,6 上。应用(1,2)和引用板的圓柱体剛度：

$$D=\frac{Eh^3}{12\lambda_1\lambda_2}, \tag{1,6}$$

即得：

$$\begin{aligned}
M_r&=-D\left(\lambda_1\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\mu\nabla^2 w\right);\quad Q_r=-D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w,\\
M_\theta&=-D\left(\nabla^2 w-\lambda_1\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right);\quad Q_\theta=-\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial_\theta}\nabla^2 w,\\
M_{r\theta}&=-D\lambda_1\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)。
\end{aligned} \tag{1,7}$$

如果力矩与剪力为已知，那麼应力便可由下列的關係確定：

$$\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{12zM_r}{h^3};\quad \sigma_\theta=\frac{12zM_\theta}{h^3};\quad \tau_{r\theta}=\frac{12zM_{r\theta}}{h^3},\\
\tau_{rz}&=\frac{3}{2h^3}(h^2-4z^2)Q_r;\quad \tau_{r\theta}=\frac{3}{2h^3}(h^2-4z^2)Q_\theta。
\end{aligned} \tag{1,8}$$

公式(1,7)和(1,8)很明顯地表示出，如果中間面的方程式(1,1)为已知時，板內应力的確定是不困难的。

組成了所有作用在板單元体積上(圖1,$б$)的力和考慮了由顯側面(1—2,2—3)轉移到背側面(3—4,4—1)力的变化的所有力,在z軸上的投影方程式後,即可求得(文献2、15)为以下的对於w的微分方程式:

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D} \tag{1,9}$$

或者为展開形式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{q}{D}, \tag{1,9'}$$

式中$q=q(r,\theta)$表示作用在所研究的板的單元外部表面上的荷載集度。

方程式(1,9)为已知的所謂双調和方程式,而任何滿足於它的函數均为双調和函數。

關於板的彎曲問題的基本困难,在於確定这种双調和函數,这函數滿足了板边緣上的支承的固定条件,而同样也滿足了被指定荷載破坏板的區段上的边界連結条件。

我們更詳細地研究,由支點構造所决定板的边緣上的边界条件。

1. 板的边緣($r=a$)自由地支承在剛性支座上

这样的支座不能防阻板边緣的轉動。因此边緣上的點当$r=a$時,应滿足於$w=0$和$\sigma_r=0$的条件。

这些条件相等於下式:

$$w=0\text{ 与 }M_r=0。 \tag{1,10}$$

2. 板的边緣为剛性固定

在这种情况下边界条件可以寫成为:

当$r=a$時

$$w=0\text{ 与 }\frac{\partial w}{\partial r}=0。 \tag{1,11}$$

3. 板的边緣为不受力

边緣上的點应当滿足於条件：$\sigma_r=0;\tau_{rz}=0;\tau_{r\theta}=0$。用合力代替应力後，即得 $r=a$ 的

(1) $M_r=0$；(2) $Q_r=0$；(3) $M_{r\theta}=0$。

但是微分方程式的級，表明沿一个边緣不可能滿足三个边界条件，因为(1,9)的任何解將保持4个任意常數，处理这些常數，应該保証在环形板的兩个边緣，或者在实心板的外緣和中心滿足於边界条件。因此必須使条件(2)与(3)合而为一，这可由下列方法達到。我們研究一些沿 $r=a$ 边緣弧上的單元帶 $rd\theta$（圖 2）。沿每一个帶的扭矩可以表示为如圖 2 上所示的力偶 H, H_1。考慮，如以 $M_{r\theta}$ 表示板單位寬度上的扭矩，則得：

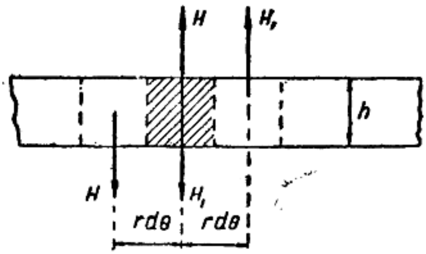

圖 2 代替了沿板的端部作用扭矩的竪向力的確定

$$H=\frac{1}{rd\theta}(M_{r\theta}rd\theta)=M_{r\theta},$$

同理，我們求得第二个板帶的：

$$H_1=M_{r\theta}+dM_{r\theta}=M_{r\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}(rd\theta)。$$

非常明顯，在寬度为 $rd\theta$ 的画有黑綫的帶上，將作用着如下的合力：

$$H_1-H+Q_r rd\theta=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}+Q_r\right)rd\theta。$$

这样，作用在單位帶上的 Q_r 与 $M_{r\theta}$，可以用称为反力的 V_r 代替，V_r 等於：

$$V_r=\frac{H_1-H}{rd\theta}+Q_r=\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}+Q_r。\qquad(1,12)$$

应用公式(1,7)，即求得：

$$V_r=-D\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w+\frac{\lambda_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right]。\qquad(1,12')$$

因而 $r=a$ 時，自由边緣的边界条件可以表示为下列形式：

$$M_r=0,\qquad V_r=0.\qquad(1,13)$$

应当指出，軸心对称变形的$V_r=Q_r$。

（二）軸心对称問題

当板弯曲時，如果荷載与支座的構造保証軸心对称的变形，則平間面的方程式確定問題便大大地簡化了，这時通过z軸的任何平面，都是对称平面。

在我們所研究的情况下，撓度僅决定於半徑。因而

$$w=f(r)。\qquad(1,14)$$

因为 $\frac{\partial w}{\partial\theta}=0$ 与 $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{dw}{dr}=w'$，前節的公式便大大地簡化了。

微分方程式(1,9)採用下列的形式：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=\frac{q}{D}。\qquad(1,15)$$

不难証明，这个方程式可以表示为下列的形式：

$$\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{qr}{D}。\qquad(1,16)$$

僅限於研究不变集度的荷載($q=$常數)和順次的將(1.16)積分四次，即可求得我們所研究問題的一般積分：

$$w=c_1+c_2r^2+c_3\ln r+c_4r^2\ln r+\frac{qr^4}{64D}。\qquad(1,17)$$

其次应用(1,7)，即容易从(1,17)求得为確定力和板的彈性表面在半徑方向的切綫傾斜角的公式：

$$w'=2c_2r+\frac{c_3}{r}+c_4r\,(2\ln r+1)+\frac{q}{16D}r^3,$$