任意次的代数方程

原著者 A. Г. 庫羅什
譯者 趙根榕

上海 中外書局 出版

任意次的代數方程

原著者 A. Г. 庫羅什
譯者 趙根榕

上海 中級書局 出版

任意次的代數方程

原書名	Алгебраическое уравнение произвольных степеней
原著者	А. Г. Курош
原出版者	Гизтех или Гостехиздат
原出版版次	1952年(初版)
譯者	趙根榕
出版者	中外書局
發行者	上海中山東一路18號
印刷者	東南印書館 上海新聞路566弄24號

書號: 0020　開本: 787×1092, 1/32　印張: 1 1/2

字數: 21千字　定價: 二角五分

1953年6月至1954年4月第一版第一次至第四次印刷

累計印數0001— 8000册

1955年4月第一版第五次印刷　印數8001—10000册

序

這本小册子，是以作者在莫斯科國立 M.B. 勞莫諾索夫大學，給數學比賽會的參加者——中學第九與第十年級的學生所作的講演爲基礎而寫成的。 在它裏面，假設讀者已經通曉中學第九年級的教科書，我們祇簡單地敍述一下代數方程的一般理論的結果與方法。 至於證明，完全不寫出來，因爲要不這樣的話，那就非把大學高等代數學教科書抄下來小半本不可。 卽就是在這種條件下，這本小册子讀起來，顯然也並不是輕鬆愉快的。因爲，所有的數學書，甚至於連普及的也算上，都要求讀者聚精會神、深思熟慮所有的定義與公式、驗證各種例題的算法、將所敍述的方法應用於讀者自己想出來的別的例題上去、等等。

目　　錄

序

§1.　引論……………………………………………1

§2.　複數……………………………………………3

§3.　開方　二次方程……………………………10

§4.　三次方程……………………………………14

§5.　論方程的根式解法與方程的根的存在…………18

§6.　實根的個數…………………………………22

§7.　方程的近似解法……………………………25

§8.　體…………………………………………30

§9.　結論…………………………………………36

參考書

§1. 引　　論

中學代數教程包含各種各樣的材料，但是關於方程的問題是它的中心。如果祇就一元方程來說，我們還記得，在中學裏所談到的關於它們的那些並不多的材料。

每個中學生首先都會解一次方程：給出方程

$$ax + b = 0,$$

其中 $a \neq 0$，則數

$$x = -\frac{b}{a}$$

是它的唯一的根。其次，中學生也知道解二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的公式，這兒 $a \neq 0$。即就是

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

如果方程的係數是實數，則當根號下的數是正的時候，即當 $b^2 - 4ac > 0$ 的時候，這個公式給出兩個不相等的實根。但當 $b^2 - 4ac = 0$ 的時候，我們的方程就祇有一個根；這時它叫做重根；當 $b^2 - 4ac < 0$ 的時候，方程根本沒有實根。

最後，中學生也會解某幾種型的三次與四次的方程，即就

是會解解法容易化爲二次方程的解法的那些方程。例如，三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

就是這樣的方程，它有一個根 $x = 0$，消去 x 後，就變爲二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0。$$

四次方程

$$ay^4 + by^2 + c = 0$$

（叫做雙二次方程）也可以化爲二次方程；祇要在這個方程中命

$$y^2 = x,$$

求出所得二次方程的根，然後再開平方就可以了。

我再強調一次，這祇不過是三次與四次方程的幾種極特別的型式而已。在中學代數學中，沒有給出這麼多次的任意方程的任何解法，更不要說更高次的任意方程的解法了。然而，在技術、力學與物理學的各項問題中，時常不得不與很高次的代數方程發生關係。任意次的，例如 n 次的(這兒，n 是某一個正整數)代數方程的理論曾經過好幾世紀的研究，而且現在還是大學與師範學院中所研究的高等代數學教程的主要部分之一。

§2. 複　數

代數方程的理論，實質上是依賴於複數理論的，複數理論的基礎在中學高年級中研究。但是，中學生對於這些數的規律性與它們的眞實存在始終懷疑着。這種懷疑，幾世紀以前，當複數剛成爲數學的慣例的時候，在學者們之間也發生過。這由於從那時一直保留到現在的"虛數"這個名稱，就可以反映出來。但是，對於現代科學來說，在複數裏什麼祕密也沒有了，而且它們與負數或無理數一樣的，一點也不"虛"。

複數的需要是由於負實數在實數域中不能開平方而發生的。正像我們所知道的，負實數在實數域中不能開平方，一定會使得某些二次方程沒有實根；方程

$$x^2+1=0$$

就是這種方程中最簡單的一個。那麼，不能擴張數的倉庫，以便這樣的方程也都有根嗎？

中學生已經有好幾次遇見他所擁有的數的倉庫的擴張了。他在初等算術中，開始研究正整數。很快地就出現了分數。在代數學教程裏又補充上了負數，也就是得到了所有有理數的系。最後，加上無理數，就得到了所有實數的系。

數的倉庫的這種逐步地擴張，每次都使以前在那次擴張之先，沒有根的那些方程中的某一些方程，能以求出根來。例

如，方程

$$2x - 1 = 0$$

祇在引入了分數後，才有根；方程

$$x + 1 = 0$$

祇在引入了負數後，才有根；而方程

$$x^2 - 2 = 0$$

祇在添加了無理數，才有根。

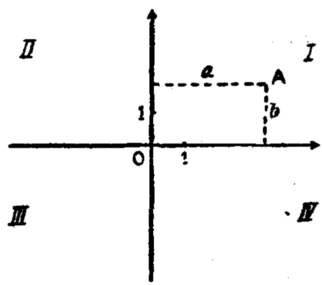
所有這些都證明，在豐富數的倉庫的過程中，再進一步是正當的。我們現在就大略地來看看，這最後的一步怎樣地實現。

大家都知道，如果已知一條直線，在它上面給出來一個正向，標劃出一個點 0，並選擇一個長度單位（第 1 圖），那麽，就能使這個直線上的每個點 A 對應於它的坐標，如果 A 在點 0 的右邊，A 的坐標就是表示用所選擇的長度單位，量由 A 到 0 所得到的距離的實數；如果 A 在點 0 的左邊的話，就是表示取負號的距離的實數。直線上的所有點，用這種方法，都有不同的實數與之對應，而且，可以證明：這時每個實數都被用過。因此，可以認為：我們直線上的點是與它對應的實數的表象，卽就是，這些數好像放在直線上了一樣。我們的直線叫數直線。

第 1 圖

能不能把數的倉庫擴充，使新數以同樣自然的方法，用平面上的點來表示呢？一直到現在，我們還沒有這樣的比實數系更廣的數系，它尚需建造。

建造開始，應當說明：新數系用什麽"材料"來"建造"，卽就是什麽東西扮演新數的角色。然後，還必須要定義：在這些東西上，卽在這些未來的數上，應當怎樣來施行代數運算——加法與乘法，減法與除法。因爲我們所想建造的數，要能用平面上所有的點來表示，所以最簡單的方法是：就把平面上點的本身看成新數。要使這些點實際眞能看成數，祇需要定義：怎樣在它們上面施行代數運算，卽就是，什麽樣的點應當叫做平面上兩個已知點的和，什麽樣的點應當叫做它們的積，等等。



第 2 圖

直線上點的位置由一個實數——它的坐標，可以完全確定。與此類似，平面上每個點的位置可用一雙實數來確定。爲了這個目的，在平面上，取兩條相交於 0 點的互相垂直的直線，在這兩條直線上各給出一個正向，並且標劃出長度單位(第 2 圖)。把這兩條直線叫做**坐標軸**，特別把水平的直線叫做**橫坐標軸**，把垂直的叫做**縱坐標軸**。全平面被坐

標軸分成了四個象限，把它們記上號碼，如圖所示。

第一象限內，任意點 A 的位置（見第2圖）由下列兩個正實數可以完全確定：數 a— 表示用所選擇的長度單位量得的，由這個點到縱坐標軸的距離（A 點的橫坐標），與數 b— 表示用所選擇的長度單位量得的，由它到橫坐標軸的距離（A 點的縱坐標）。反之，對於任意正實數對 (a,b)，可以在第一象限內，指出一個完全確定的點，以 a 為它的橫坐標，而以 b 為它的縱坐標。也可以類似地給出別的象限內的點。但是，為了保證平面上所有的點與它們的坐標對 (a,b) 間對應關係的一意性，也就是為了避免同一個坐標對 (a, b) 對應於平面上幾個不同的點，我們把 II 及 III 象限內的點的橫坐標與 III 及 IV 象限內的點的縱坐標看成負的。注意，在橫坐標軸上的點由形式 $(a,0)$ 的坐標給出來，而縱坐標軸上的點由形式 $(0,b)$ 的坐標給出來，這兒 a 與 b 是實數。

我們已經研究了，用實數對怎樣給定平面上的所有點。這使我們以後可以不說，坐標 (a,b) 所給定出來的點 A，而祇簡單地說，點 (a,b)。

現在來定義平面上點的加法與乘法。這些定義，開頭兒雖然很像是人為的，但可以證明：祇用這些定義就能達到我們的目的，就是有可能開負實數的平方根。

假設在平面上給出點 (a,b) 與 (c,d)。直到現在，我們

還不知道，這兩個點的和與積應該怎樣來理解。 現在取以 $a+c$ 爲橫坐標，而以 $b+d$ 爲縱坐標的點爲它們的和，即

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)。$$

另一方面，取橫坐標爲 $ac-bd$，而縱坐標爲 $ad+bc$ 的點爲已知點的積，即

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)。$$

容易證明：我們所定義的這兩種施算於平面上點的運算有施於數的運算的所有平常的性質：平面上點的加法與乘法是可交換的（即可交換被加項的位置與交換諸因子的位置）與可結合的（即三個點的和及積與括號的打開無關），並受分配律（即去括號的規則）的約束。 注意，平面上點的加法與乘法的可結合性能使一意地求出平面上任意有限個點的和與積。

現在，對於平面上的點也可以施行跟加法與乘法相反的運算：減法與除法。 所謂反運算的意思是：在任何數系中，兩個數的差可以定義爲這樣的一個數，它與減數的和等於被減數；而兩個數的商，則可以定義爲這樣的一個數，它乘上除數等於被除數，即

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,\ b-d),$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)。$$

讀者不難驗證，上列第二個等式右邊的點與點 (c,d) 的積（積，

當然理解為上面定義中所說的那個意思)事實上等於點(a, b)。比這更簡單地可以證明，第一個等式右邊的點與點(c, d)的和實際上等於點(a,b)。

將我們的運算施於橫坐標軸上的點，則得

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$

$$(a,0)(b,0)=(ab,0)。$$

就是說，這些點的加法與乘法化成為它們的橫坐標的加法與乘法。這對於減法與除法也正確：

$$(a,0)-(b,0)=(a-b,0),$$

$$\frac{(a,0)}{(b,0)}=\left(\frac{a}{b},\ 0\right)。$$

如果我們認為橫坐標軸上的每個點$(a,0)$為實數a—它的橫坐標——的表象，就是把點$(a,0)$與數a本身看成相同的，那麼，橫坐標軸就簡單地變成數直線了。我們現在可以認為，我們用平面上的點所建造成的新數系包含着所有的實數，實質上也就是橫坐標軸上的點。

縱坐標軸上的點卻不能看成與實數相同的。例如，來考察一下縱坐標軸上，在點0上方與它距1的點$(0,1)$吧。用字母i來表示這個點：

$$i=(0,1),$$

並按平面上點的乘法的意義，來求它的平方：

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)。$$

但是點 $(-1,0)$ 並不在縱坐標軸上，而在橫坐標軸上，所以它表示實數 -1，即

$$i^2=-1。$$

因之，我們在新數系中已找到了平方等於實數 -1 的數，就是說，現在已經能夠開 -1 的平方根了。這個根的另外一個值是點 $-i=(0,-1)$。注意，我們用 i 表示的點 $(0,1)$ 是平面上完全確定的點，而且，縱使平常把它叫做"虛單位"，怎樣也不影響它在平面上的眞實存在。

我們所建造的數系，比實數系更廣，叫做**複數**系，而平面上點的本身（具有我們上面所定義的施於它們的運算），則叫做**複數**。容易證明，利用這些運算，用實數與數 i 可以表示所有的複數。事實上，假設點 (a,b) 已知。按加法定義，等式

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

正確。被加數 $(a,0)$ 在橫坐標軸上，所以是實數 a。但第二個被加數可以寫爲形式

$$(0,b)=(b,0)(0,1)。$$

這個等式右邊的第一個因子與實數 b 相同，而第二個因子等於 i。這樣，

$$(a,b)=a+bi,$$

其中加法與乘法的意思必須理解爲施於平面上點的運算。

既已得到複數的平常寫法，我們立刻可以對應地改寫上面所導出的複數的運算公式：

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+bi)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i。$$

注意，我們以前所下的那個平面上點的乘法的定義，服從分配律：如果在上面所寫的第二個等式的左邊，按由分配律所得出來的二項式乘二項式法則以求積，然後用等式 $i^2=-1$，再合併同類項，就恰好得到這個等式的右邊。

§ 3. 開方。 二次方程。

有了複數，我們就不僅能開數 -1 的平方根，也能開任何負實數的平方根，而且我們得到兩個相異的值。 卽就是，如果 $-a$ 是負實數，卽 $a>0$，那麽

$$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i,$$

其中 $\sqrt{a}$ 是正數 a 的平方根的正值。

如果返回來看看在引論中所考察的實係數二次方程的解法，那麽我們現在就可以說，在 $b^2-4ac<0$ 的場合，這個方

程有兩個不同的根，但是已經是複的了。

有複數，不祇足夠開實數的平方根，也足以開複數的平方根。即如果複數 $a+bi$ 已知，則

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}$$
$$+i\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})},$$

其中兩回都取根式 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的正值。讀者當然可以看出來，對於任意的 a 與 b，右邊第一個被加數與 i 的係數都是實數。這兩個根式中的每一個都有兩個值，依上列規則結合之：如果 $b>0$，則一個根式的正值與另一根式的正值結合在一塊兒，而負值與負值結合在一塊兒；但如 $b<0$，則一個根式的正值與另一根式的負值結合在一塊兒。

例：試開 $21-20i$ 的平方根。這兒

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(21+29)}=\pm 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(21+29)}=\pm 2.$$

因為 $b=-20$，即 $b<0$，故上列最後兩個根式符號不同的值結合在一起，就是，

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i).$$

學會了複數開平方，我們就能解係數爲任意複數的二次方程。事實上，二次方程解法公式的結論在複係數的情形仍然有效，而這個公式中平方根的計算，像上面所已指明的，可以化爲兩個正實數的開平方。任意複係數的二次方程因而有兩個根，它們偶然間可以相等，就是變爲一個重根。

例：試解方程

$$x^2-(4-i)x+(5-5i)=0。$$

用公式，得

$$x=\frac{(4-i)\pm\sqrt{(4-i)^2-4(5-5i)}}{2}$$

$$=\frac{(4-i)\pm\sqrt{-5+12i}}{2}。$$

用上面所說的方法，開這兒的平方，就得到

$$\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i),$$

由此，

$$x=\frac{(4-i)\pm(2+3i)}{2}。$$

因而，數

$$x_1=3+i,\qquad x_2=1-2i$$

是我們的方程的根。容易驗證，這兩個數，事實上都滿足方程。