普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学物理方法

邵惠民 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学物理方法

邵惠民　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材、普通高等教育“十五”国家级规划教材.

本书系统地阐述了数学物理方法的基础理论及其在物理学、工程技术上的应用.重点不是一味追求数学的严格性和逻辑性，即纯粹数学理论的完整性，而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念、基本定理和解题的各种方法和技巧.本书涉及的尽管是一些传统的内容，但在取材的深度和广度上都比以往教科书有所加强；同时书中也增添了不少反映学科前沿的内容，从而使学生不仅能获得相关学科的比较系统的科学知识，也能引导学生进入当代科学的前沿.此外，本书的另一特色是：读者不仅可以从本书的逻辑结构中获得简化和统一的数学基础知识，而且可以从书内的例题上看到独特的、简洁的、实用性很强的解题方法.

本书可作为高等学校理工科非数学专业的本科教材，也可供有关专业的研究生、教师和广大科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/邵惠民编著.—北京：科学出版社，2004.1

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-03-012173-2

Ⅰ.数… Ⅱ.邵… Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第085997号

责任编辑：张邦固 / 责任校对：宋玲玲

责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年1月第一次印刷 印张：32

印数：1—4 000 字数：610 000

定价：40.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

数学物理方法在物理学、工程技术和其他科学的许多领域都有着十分广泛的应用. 主要原因是,在上述研究领域中经常出现很多描述某些物理规律的数学物理方程,通过对这些方程的求解,一方面可以得到极有实用价值的结论,另一方面又可以促进这些领域的发展.

数学物理方法既可以作为一门纯数学学科来研究,也可以作为一门应用数学学科来研究. 显然,对广大科技工作者及理科学生来说,学习数学物理方法的目的在于应用. 因此,本书为了适应这些读者的需要,从选材上就有侧重,主要涉及的不是一般数学理论,而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念,基本原理和解题的各种方法和技巧.

数学物理方法涉及到的数学基础知识面较广,如果将所涉及到的基础知识分别插入到相应的解法中去叙述,这样的结构安排松散,零乱. 但是,如果将它们统统集中安排在前面叙述,这样学起来又感到枯燥无味. 为此,在内容安排上,本书既保持了各章节的独立,又顾及到它们之间的前后呼应与关联,力争做到层次清晰,结构紧凑.

本书的正确使用方法是,先大体浏览,以求获得一般概念,然后逐章研读. 如果对某些概念,需要详细了解时,再回过头来仔细阅读那一章的内容.

本书的前五章对复变函数理论及其应用作了清晰而简明的阐述,它主要为了以后学习提供必要的复变函数的概念和定理.

为了与现代数学理论及应用相衔接,即用现代数学分析的观点审视、选择和组织好传统的教学内容,就必须引入广义函数,Hilbert 函数空间,以及斯特姆-刘维(Sturm-Liouville S-L)本征值问题等等概念. 第六章,第七章和第八章正是为此安排的.

学生通过对这三章的深入了解之后,在以后第九章的 Fourier 分析中遇到三角函数系的正交完备性,就可以很方便地自行证明了. 这一点在以往的教科书中是不给出证明的. 另一方面通过对 S-L 本征值问题的透彻阐明,今后学生学习按勒让德多项式展开和按贝塞尔函数的展开就显得轻而易举了.

第九章、第十章和第十一章也是为了今后数章做准备的. 但 Fourier 分析和第四章的幂级数展开法都是函数分析的重要手段,特别是在第九章中从 Fourier 分析的思想演变出了现代实用性很强的小波分析,从而为学生进一步学习现代数学展示了窗口和延伸发展的接口. 这三章的安排也体现了本书的宗旨是加强应用,侧重

方法的原则，着重介绍了常用的应用数学方法及其在实际中的应用.所以级数解法，渐进展开，最陡下降法等内容也收入在内.

第十二章以后数章是本书的重点.第十二章阐述了如何建立描述物理现象的数学模型，并导出三类基本方程——波动方程，输运方程与稳恒方程，导出这些方程仅起一个示范作用.

第十三章阐述了两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类及特征.以后数章着重阐述求解数学物理方程的几个常用的解析解法.第十四章阐述了一类比较简单的方程的通解解法，并突出在行波问题上的应用.通解法中有一种特殊情形——行波解(即依赖于自变量的线性组合的解)，它特别适用于波动问题，甚至解一些非线性偏微分方程也很奏效.

分离变量法是求解数学物理方程最简单而且应用最广泛的方法之一，第十五章阐述了分离变量法的基本概念及应用这个方法所必须的、可分离的条件，并强调指出了这个方法的理论依据是以本征问题为核心，以本征函数展开为解题的关键.第十六章和第十七章是围绕分离变量法中常用的特殊函数——勒让德函数、贝塞尔函数来阐述的，这两章内容可以和第十五章穿插起来学，分开编排是为了给学生对这些特殊的函数有一个完整的、系统的概念.

第十八章阐述了积分变换在求解中的特点和技巧.对半无界非稳态问题，拉普拉斯变换可获得在短时间内能很快收敛的解.

第十九章介绍的变分法是一种很重要、很有用的数学物理方法，已被广泛用于科学研究和工程计算.今天变分法的应用范围，不仅限于经典物理和工程技术的领域，而且在现代量子场论、现代控制理论和现代信息理论等高新技术领域都有十分广泛的应用.

第二十章阐述求解边值问题的格林函数法，而对非稳态问题，应用格林函数可把第十五章分离变量法得到的各种解，表达成更一般、更紧凑的形式.但格林函数本身的求得又与第十五章介绍的各种解的形式息息相关.

第二十一章阐述保角变换法.对于平面场的拉普拉斯方程或泊松方程的边值问题的解析求解，它是一种最为有效的方法.因为与其他解析方法相比，保角变换法能够处理边界形状复杂得多的问题，所以这种方法具有较大的实用价值.

对于一个给定问题，可以有很多种求解方法，但若想选用一种最直接、最简便的方法，读者就得熟悉各种求解方法.为此，除了要理解课文内容之外，更重要的是多练习、多思考、多总结，这样才能达到得心应手的程度.

本书中含有大量的与物理问题有关的应用例题，由于这些例题密切联系实际，所以颇能激发学生的学习兴趣，有利于提高学生的科学素质和能力.

由于教材内容较多，公式又多，所以不能要求学生对每一部分内容的细节都掌握得很清楚，应该把学生的精力引导到全面和系统地对基本理论概念和方法的理解和应用上面来.因此，教师在教学中应始终贯彻这一思想.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

本书广泛吸收了当今国际上优秀“数学物理方法”教材的长处，同时又参考了国内很多同类教材和参考书，作者从中受到很大的启发，所蒙受的教益匪浅；而对于所有在本书编著过程中，曾给与帮助和鼓励的人们；特别是在成书的最后过程中，我的博士生（刘胜利、吴高建、徐锡斌诸君）在文字加工，绘图等方面作了大量的工作，付出了大量辛勤劳动，为此作者一并表示衷心的感谢.

书中不妥及疏漏之处在所难免，恳请专家和广大读者指正.

作 者

2003 年立冬于南京大学

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　复变函数

§1.1　复数的概念

在解代数方程时,我们知道 i 是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根,即 $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,称 i 为虚数单位.

此外,以前我们在解二次方程 $x^2=1$ 时,通常定义它有两个根,即 $x=\pm 1$ 或 $x_1=1, x_2=-1$ 两个根.若解高于二次以上的方程 $x^n=1(n>2)$;一般来说应有 n 个根.如果我们不引入复数,连这类简单的问题也无法解决.

下面我们介绍与复数概念有关的几个定义:

1.1.1　复数的定义

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数.其中 x,y 均为实数,i 为虚数单位,$\mathrm{i}^2=-1$,而实数 x 与 y 分别称为复数 z 的实部及虚部,并记为

$$x=\mathrm{Re}z \tag{1.1.1}$$

$$y=\mathrm{Im}z \tag{1.1.2}$$

务必注意:按上述定义,复数的虚部是一个实数.

1.1.2　复数的相等

若两个复数,$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,有 $x_1=x_2$ 及 $y_1=y_2$,则我们称

$$z_1=z_2 \tag{1.1.3}$$

特别是一个复数等于零,不是意味着一个条件,而是意味着两个条件,即所给复数的实部与虚部两者都为零.

1.1.3　复数的共轭

若两个复数仅当它们的虚部相差一个正负号时,那么其中任何一个称为另一个的共轭,一个复数 z 的共轭通常记作 $\bar{z}$ 或 z^*,在物理学中常用 z^* 表示,所以

$$z=(x+\mathrm{i}y)^*=x-\mathrm{i}y \tag{1.1.4}$$

这样定义之后,复数的算术满足实数算术运算的一般规律,并且复数的运算法则施于实数时(因为实数是复数的特例),能够和实数运算的结果相符合.

复数没有大小之分,因此两个复数不能比较大小.但复数的实部及虚部均为实

数,因此复数的实部和虚部可以比较大小.

§1.2 复数的几何表示法

复数一般可采用两种几何表示法,即采用复数平面(用平面上的点来表示复数,这个平面称为复数平面)或复数球面(用球面上的点来表示复数,这个球面称为复数球面).

1.2.1 复数平面

1. 直角坐标表示法(或称代数表示法)

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用直角坐标系平面中的坐标 (x,y) 的点来表示,因此复数平面上每一个点都与一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应;反过来,也成立.所以全部复数与平面上的点构成一一对应的关系[图 1.1(a)].

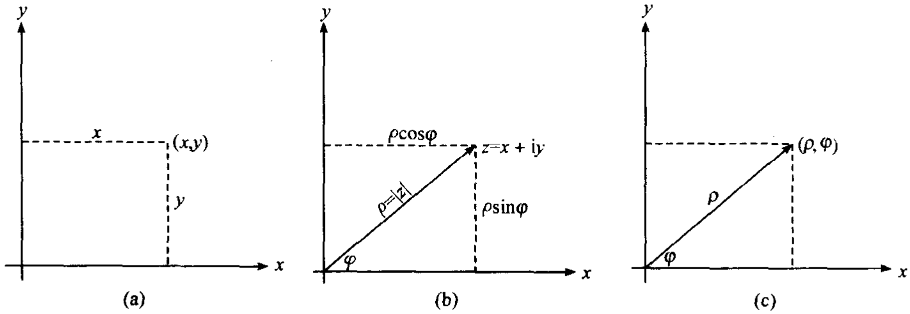

图 1.1

必须注意:不可用符号 $(x,\ \mathrm{i}y)$ 来表示复数.

2. 矢量表示法

在复数平面上可引入一个从原点出发指向点 (x,y) 的矢量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,如图 1.1(b)所示.矢量的长度称为复数 z 的模,记为 $|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.显然 $x\leqslant|z|$,$|y|\leqslant|z|$,而 $|z|\leqslant|x|+|y|$;矢量与 x 轴的夹角称为复数的辐角,记为 $\arg z=\varphi$.

3. 三角表示法(或称极坐标表示法)[图 1.1(c)]

因为

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \tag{1.2.1}$$

则复数 z 可以表示为

$$z = x + \mathrm{i}y = \rho\cos\varphi + \mathrm{i}\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.2.2}$$

其中 ρ 为复数的模,即

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2.3}$$

φ 称为复数的辐角,即

$$\varphi = \arg z \tag{1.2.4}$$

当复数 $z=0$ 时,则$|z|=0$,但它的辐角 $\arg z$ 没有确定值(或者说没有意义,因而不能说 $z=0$ 的辐角等于多少).

当复数 $z\neq0$ 时,则$|z|$是惟一确定的,但其辐角 $\arg z$ 可以取无穷多个值,而这些值之间可相差 2π 的整数倍,因此任何一个非零的复数 z 都有无穷多个辐角值.设 φ_0 是其中的一个,则下面公式

$$\varphi = \arg z = \varphi_0 + 2k\pi \qquad (k \text{ 为任意整数}) \tag{1.2.5}$$

给出复数 z 的全部辐角.在复数 z 的辐角中,若取 φ_0 满足

$$0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi \tag{1.2.6}$$

则 φ_0 称为辐角的主值,记为 $\varphi_0 = \arg z$,并可表示成

$$\varphi_0 = \underset{z\neq0}{\arg z}\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在 Ⅰ 象限} \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{当 } z \text{ 在第 Ⅱ 象限} \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{当 } z \text{ 在第 Ⅲ 象限} \\ \arctan\dfrac{y}{x} + 2\pi & \text{当 } z \text{ 在第 Ⅳ 象限} \end{cases} \tag{1.2.7}$$

其中,主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$定义为

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2} \tag{1.2.8}$$

4. 指数表示法

$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$的形式称为 z 的指数表示式.利用欧拉(Euler)公式

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \tag{1.2.9}$$

就可将复数 z 的三角表示式化为指数形式,因此欧拉公式是它们之间的纽带.这一定义自然导致今后约定 e^z 为指数函数,即 $e^z = \exp(z)$,$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$特别是 $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\pi/2}$, $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$, e 与 π 是超越实数,i 是虚数,而 e、π、i、1 这四个似乎毫无关系的数,却极其美妙地结合在一起.因此,这公式反映了欧拉公式的深刻内涵意义.

1.2.2 复数球面

复数球面上的点也可以与复数构成一一对应关系,因而也可采用复数球面(又称黎曼球面)上的点来表示.

取一个球心在原点,半径为 1 的单位球面(图 1.2 所示),作竖直轴,使得它与平面上已给出的直角坐标平面 Oxy 相垂直,且构成右手直角坐标系.竖直轴的正方向与此单位球面的交点记作 N,称为北极;竖直轴的负方向与此单位球面的交点记作 S,称为南极.考虑起点在北极 N,通过球面上任意一点 $P(z)$的射线,与 Oxy 平面相交于一点,记作 z;反之,起点在北极 N,通过 Oxy 平面上的任一点 z'的射线与单位球面也只交于一点,记作 $Q(z)$.这样 Oxy 平面上所有点与单位球面上所有点(除了北极 N 以外)建立了一一对应关系.此外,单位球面与 Oxy 平面的交线显然是圆周$|z|=1$,它自己对应着自己;而上半球面(除了北极 N 以外)对应着圆外($|z|>1$)的所有点;下半球面对应着圆内($|z|>1$)所有点;南极对应着原点.因此我们完全可以用球面上的点来表示复数,这球面就称为复数球面.在地图制图学上,就是用平面上的点通过这样的方法来表示球面上的点,称为测地投影.

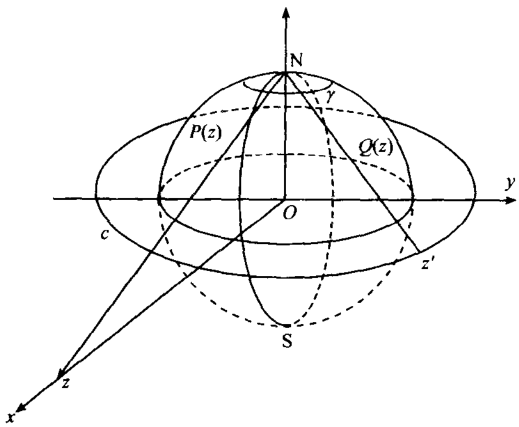

图 1.2

1.2.3 无穷远点

在实变函数微积分学中的 $+\infty$,只是一个符号而已,而复球面上的无穷远点∞却是一个完全确定的点,并且只有一个无穷远点.

下面我们来说明引入无穷远点的合理性.在图 1.2 上考虑在 z 平面(Oxy 平面)上以原点为中心的圆周 c,在球面上对应的也是一个圆周 γ(即纬线).当圆周 c 的半径越大时,在球面上的圆周 γ 就越向北极 N 靠拢.因此北极 N 可以看成与 z

平面上的一个模为无穷大的假想点相对应.这个假想点称为无穷远点,并记为∞,复平面加上点∞后称为扩充复平面,它与整个复球面构成一一对应关系.

无穷远点∞的辐角、实部及虚部都没有意义,无穷远点∞的模,是可以大于任何正整数,并记作$|\infty| = +\infty$.

归纳起来,无穷远点∞具有如下几个性质:

(1) 运算$\infty \pm \infty, 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$无意义.

(2) $a \neq \infty$时,$\dfrac{\infty}{a} = \infty, \dfrac{a}{\infty} = 0, \infty \pm a = a \pm \infty = \infty$.

(3) $b \neq 0$(但可为∞)时,

$$\infty \cdot b = b \cdot \infty, \frac{b}{0} = \infty.$$

(4) ∞的实部、虚部及辐角都无意义

$|\infty| = +\infty$

(5) 复平面上每一条直线都通过点∞;同时,没有一个半平面包含点∞.

§1.3 复数的运算

复数的基本运算遵循两条规则:(a)代数运算规则;(b)$i^2 = -1$.

(1) 加法 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (1.3.1)

(2) 减法 $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ (1.3.2)

(3) 乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ (1.3.3)

特别是

$$z_1 \cdot z_2^* = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$
$$z_2 \cdot z_2^* = x_2^2 + y_2^2$$

(4) 除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.3.4}$$

(5) 共轭

$$(z^*)^* = z, (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$
$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*, \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \tag{1.3.5}$$
$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

(6) 乘幂

利用复数的指数表示式及欧拉公式来进行乘幂运算是非常方便的.

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1.3.6}$$

特别是当 $\rho=1$ 时,我们就得到著名的棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{1.3.7}$$

(7) 开方

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= [\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}]^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \\ &= \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

所以当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,由上式就可得出 n 个不同的根,其中系数 $\rho^{\frac{1}{n}}$是指ρ 的实 n 次根.

例 1.3.1 求 -1 的开平方根.

解 因为 -1 的辐角为 π,而模为 1,所以按公式(1.3.8)有

$$\sqrt{-1} = (e^{i\pi})^{1/2} = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)}$$

因此$\sqrt{-1}$的两个根为

$$k=0,\quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$k=1,\quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

必须注意,$\sqrt{-1}$有两个根 i 和 $-$i,也就是说 $i=\sqrt{-1}$,但$\sqrt{-1}$可以等于 i,也可等于 $-$i.

例 1.3.2 求$\sqrt[3]{-8}$的根.

解 因为 -1 的辐角为 π,而模为 8,所以按公式(1.3.8)有

$$\sqrt[3]{-8} = 8^{1/3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$$

因此$\sqrt[3]{-8}$的三个根为

$$k=0,\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k=1,\quad z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$k=3,\quad z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

例 1.3.3 将 $\cos 4\varphi$ 与 $\sin 4\varphi$ 表达为 $\cos\varphi$ 与 $\sin\varphi$ 的幂.

解 利用棣莫弗公式及二项式展开定理,得

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com