高等学校经济管理学科 数学基础辅导丛书

□ 主编 刘书田

# 线性代数学习辅导与解题方法

■ 王中良 编



高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书

主编　刘书田

# 线性代数学习辅导与解题方法

王中良　编

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习辅导与解题方法／王中良编．—北京：
高等教育出版社，2003.12
（高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书／刘书田
主编）
ISBN 7-04-012937-X

Ⅰ.线…　Ⅱ.王…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教
学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 093491 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 高等教育出版社印刷厂 | | |
| 开　　本 | 850×1168　1/32 | 版　　次 | 2003 年 12 月第 1 版 |
| 印　　张 | 7.75 | 印　　次 | 2003 年 12 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 190 000 | 定　　价 | 10.10 元 |

## 内容提要

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习“线性代数”课程的辅导丛书，内容包括行列式，矩阵，线性方程组和向量，向量空间，矩阵的特征值和特征向量，二次型。

本书注重解题思路，解题方法，提高解题技巧，提高逻辑推理和分析能力。每章有小结并配有自测题，自测题有解题提示和答案。

本书是经济类、管理类学生学习和报考研究生的必备读物，对工科院校的学生同样适用，它是一本颇具特点的教学参考书。对参加自学考试，专升本考试和成人教育的读者是一本无师自通的自学指导书。

# 前　言

《高等学校经济管理学科数学基础》系列辅导丛书包括三个分册:《微积分学习辅导与解题方法》、《线性代数学习辅导与解题方法》和《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》,它们是财经类、管理类本科生学习《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》时起到辅导教材作用的用书。本系列辅导教材适应高等教育新形势下教改的精神,以教育部颁布的《经济数学基础》大纲为准,紧密结合经济类、管理类面向21世纪的课程教材,是编写者数十年教学经验的积累。

本系列辅导丛书选题广泛、典型,并有针对性。例题编排以内容为准,以题型归类,用"讲思路举例题"与"举题型讲方法"的思维方式,揭示具有共性题目的解题思路;概括题型特征,归纳解题方法,讲述例题,着重分析题目条件与结论之间的逻辑关系;着重讲述解题思路的源头;注意讲述解题技巧,还通过例题指出在运用解题方法时和解题过程中易犯的错误,使读者达到融会贯通、举一反三的境地;提高逻辑推理和分析判断能力,使读者实现掌握解题思路、解题方法由继承性向创造性跃进。阅读本系列辅导教材,可以深入理解、巩固提高和灵活运用所学知识,可以思路畅通,实现纵向深入、横向跨越,提高解题能力。

学习数学就必须解题,解题要以自己的实践过程来实现,书中有些例题解题步骤书写得简略,望读者在阅读这些例题时,要边看、边思索、边推导。思索由前一式如何过渡到后一式,推导后一式的结果如何由前一式而得。特别是本系列辅导丛书,每章之后都配有自测题,(书后附有参考答案与解法提示,)望读者能独立完

成自测题，并能有新的解题方法和捷径。本系列辅导丛书以小结形式概括本章的知识点、重点、难点以及掌握本章内容需要特别注意的方面，还阐明本章内容与前后各章内容的联系，以使知识科学化、系统化。

本系列辅导丛书，可作为非数学类专业本科生学习大学数学用书，可作为报考硕士研究生经济类、管理类应试复习大学数学用书，可作为授课教师的教学参考书，也可作为参加自学考试、专升本考试和成人教育读者的学习指导书。

本系列辅导丛书，经统一策划，集体讨论，分工执笔，相互审阅书稿的反复推敲而成的。系列辅导教材由刘书田任主编，其中，《微积分学习辅导与解题方法》由冯翠莲，刘书田主笔，由高旅端，王中良审阅书稿；《线性代数学习辅导与解题方法》由王中良主笔，由高旅端、冯翠莲、刘书田审阅书稿；《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》由高旅端主笔，由王中良、冯翠莲、刘书田审阅书稿。

在辅导丛书的编写过程中，汲取了同行专家提出的许多宝贵建议，得到了高等教育出版社的有关领导和负责同志的协助和支持，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，望读者指正。

编　者

2003 年 7 月

策划编辑　李艳馥
责任编辑　李　陶
封面设计　王凌波
责任绘图　郝　林
版式设计　陆瑞红
责任校对　朱惠芳
责任印制　韩　刚

# 郑重声明

# 目　录

# 第一章　行　列　式

## §1.1　$n$ 阶行列式

### 一、基本概念

$n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

简记为$|a_{ij}|$.其中数 $a_{ij}$ 称为行列式的第 $i$ 行第 $j$ 列的元($i,j=1,2,\cdots,n$),$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元 $a_{ij}$ 的代数余子式,$M_{ij}$ 为元 $a_{ij}$ 的余子式.由此可见,$n$ 阶行列式$|a_{ij}|$是一个数值.

### 二、几个特殊的行列式

1．上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

2．下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

3．对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

4．$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}.$$

5．范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

**例 1**　计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$.

**解** (1) 将行列式记为 $D$,把 $D$ 按第 5 行展开,得

$$
\begin{aligned}
D &= a_{51}A_{51}+a_{52}A_{52}+a_{53}A_{53}+a_{54}A_{54}+a_{55}A_{55}\\
&= a(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & b & a\\ 0 & b & a & 0\\ b & a & 0 & 0\\ a & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+b(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & b & a\\ 0 & b & a & 0\\ b & a & 0 & 0\end{vmatrix}\\
&= a^5+b^5.
\end{aligned}
$$

(2) 本题为 4 阶范德蒙德行列式,故有

$$D=(2-1)\times(3-1)\times(4-1)\times(3-2)\times(4-2)\times(4-3)=12.$$

**例 2** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{vmatrix}.$$

**解** 将第一行的$(-1)$倍分别加到下面各行上,得行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1\end{vmatrix},$$

所以当 $n\geqslant 3$ 时,$D$ 中至少有两行的元成比例,则行列式 $D=0$.

当 $n=1$ 时,$D=a_1-b_1$;

当 $n=2$ 时,$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2\\ a_2-b_1 & a_2-b_2\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(b_2-b_1)$.

综上可得

$$D=\begin{cases} a_1-b_1, & n=1;\\ (a_2-a_1)(b_2-b_1), & n=2;\\ 0, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

## §1.2 行列式的性质

**一、行列式性质**

1. 行列式与它的转置行列式相等.

2. 若交换行列式的某两行(或某两列),行列式的值变号.

3. 如果用数 $k$ 乘行列式的某一行(或某一列),等于用 $k$ 乘行列式.换句话说,行列式某行(或某列)的公因子可以提到行列式外.

4. 如果行列式的某一行(或某一列)的每个元均表为两个数的和,则该行列式等于两个行列式的和.

5. 将行列式某行(或某列)的 $k$ 倍加到另一行(或另一列)上,行列式的值不变.

6. 行列式的某一行(或某一列)元与另一行(或另一列)元的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \quad (k\neq i).$$

$$a_{1j}A_{1l}+a_{2j}A_{2l}+\cdots+a_{nj}A_{nl}=0 \quad (l\neq j).$$

利用行列式性质,还可以得到下述三个使行列式为零的充分条件:

1. 若行列式中有一行(或一列)元全为零,则行列式等于零.

2. 若行列式中有两行(或两列)元相同,则行列式等于零.

3. 若行列式中有两行(或两列)元对应成比例,则行列式等于零.

**二、拉普拉斯(Laplace)定理**

设 $n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|$,在 $D$ 中任意取定 $k$ 行($1\leqslant k\leqslant n$),由这 $k$ 行元组成的所有 $k$ 阶子式 $M_i$($i=1,2,\cdots,t$)与它们的代数余子式 $B_i$($i=1,2,\cdots,t$)的乘积之和等于 $D$,即

$$D=M_1B_1+M_2B_2+\cdots+M_tB_t \quad (t=C_n^k).$$

利用拉普拉斯定理,可得

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kr} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$