



高等学校经济管理学科 数学基础辅导丛书

□ 主编 刘书田

# 线性代数 学习辅导与解题方法

■ 王中良 编



高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书

主编 刘书田

# 线性代数学习辅导 与解题方法

王中良 编

高等教育出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习辅导与解题方法 / 王中良编. —北京:  
高等教育出版社, 2003. 12

(高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书 / 刘书田  
主编)

ISBN 7-04-012937-X

I. 线... II. 王... III. 线性代数 - 高等学校 - 教  
学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 093491 号

---

|      |                |      |                                                           |
|------|----------------|------|-----------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社        | 购书热线 | 010-64054588                                              |
| 社 址  | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598                                              |
| 邮政编码 | 100011         | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> |
| 总 机  | 010-82028899   |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a> |
| 经 销  | 新华书店北京发行所      |      |                                                           |
| 印 刷  | 高等教育出版社印刷厂     |      |                                                           |
| 开 本  | 850×1168 1/32  | 版 次  | 2003 年 12 月第 1 版                                          |
| 印 张  | 7.75           | 印 次  | 2003 年 12 月第 1 次印刷                                        |
| 字 数  | 190 000        | 定 价  | 10.10 元                                                   |

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 内 容 提 要

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习“线性代数”课程的辅导丛书,内容包括行列式、矩阵、线性方程组和向量,向量空间,矩阵的特征值和特征向量,二次型。

本书注重解题思路、解题方法、提高解题技巧,提高逻辑推理和分析能力。每章有小结并配有自测题,自测题有解题提示和答案。

本书是经济类、管理类学生学习和报考研究生的必备读物,对工科院校的学生同样适用,它是一本颇具特点的教学参考书。对参加自学考试,专升本考试和成人教育的读者是一本无师自通的自学指导书。

# 前 言

《高等学校经济管理学科数学基础》系列辅导丛书包括三个分册:《微积分学习辅导与解题方法》、《线性代数学习辅导与解题方法》和《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》,它们是财经类、管理类本科生学习《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》时起到辅导教材作用的用书。本系列辅导教材适应高等教育新形势下教改的精神,以教育部颁布的《经济数学基础》大纲为准,紧密结合经济类、管理类面向 21 世纪的课程教材,是编写者数十年教学经验的积累。

本系列辅导丛书选题广泛、典型,并有针对性。例题编排以内容为准,以题型归类,用“讲思路举例题”与“举题型讲方法”的思维方法,揭示具有共性题目的解题思路;概括题型特征,归纳解题方法,讲述例题,着重分析题目条件与结论之间的逻辑关系;着重讲述解题思路的源头;注意讲述解题技巧,还通过例题指出在运用解题方法时和解题过程中易犯的错误,使读者达到融会贯通、举一反三的境地;提高逻辑推理和分析判断能力,使读者实现掌握解题思路、解题方法由继承性向创造性跃进。阅读本系列辅导教材,可以深入理解、巩固提高和灵活运用所学知识,可以思路畅通,实现纵向深入,横向跨越,提高解题能力。

学习数学就必须解题,解题要以自己的实践过程来实现,书中有些例题解题步骤书写得简略,望读者在阅读这些例题时,要边看、边思索、边推导。思索由前一式如何过渡到后一式,推导后一式的结果如何由前一式而得。特别是本系列辅导丛书,每章之后都配有自测题,(书后附有参考答案与解法提示,)望读者能独立完

成自测题,并能有新的解题方法和捷径。本系列辅导丛书以小结形式概括本章的知识点、重点、难点以及掌握本章内容需要特别注意的方面,还阐明本章内容与前后各章内容的联系,以使知识科学化、系统化。

本系列辅导丛书,可作为非数学类专业本科生学习大学数学用书,可作为报考硕士研究生经济类、管理类应试复习大学数学用书,可作为授课教师的教学参考书,也可作为参加自学考试、专升本考试和成人教育读者的学习指导书。

本系列辅导丛书,经统一策划,集体讨论,分工执笔,相互审阅书稿的反复推敲而成的。系列辅导教材由刘书田任主编,其中,《微积分学习辅导与解题方法》由冯翠莲,刘书田主笔,由高旅端,王中良审阅书稿;《线性代数学习辅导与解题方法》由王中良主笔,由高旅端、冯翠莲、刘书田审阅书稿;《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》由高旅端主笔,由王中良、冯翠莲、刘书田审阅书稿。

在辅导丛书的编写过程中,汲取了同行专家提出的许多宝贵建议,得到了高等教育出版社的有关领导和负责同志的协助和支持,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,望读者指正。

编 者

2003年7月

|      |     |
|------|-----|
| 策划编辑 | 李艳馥 |
| 责任编辑 | 李 陶 |
| 封面设计 | 王凌波 |
| 责任绘图 | 郝 林 |
| 版式设计 | 陆瑞红 |
| 责任校对 | 朱惠芳 |
| 责任印制 | 韩 刚 |

## 郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581698/58581879/  
58581877

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街 4 号  
高等教育出版社法律事务部

**邮 编：**100011

**购书请拨打电话：**(010)64014089 64054601 64054588

# 目 录

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 第一章 行列式 .....             | 1  |
| § 1.1 $n$ 阶行列式 .....      | 1  |
| 一、基本概念 .....              | 1  |
| 二、几个特殊的行列式 .....          | 1  |
| § 1.2 行列式的性质 .....        | 4  |
| 一、行列式性质 .....             | 4  |
| 二、拉普拉斯(Laplace)定理 .....   | 4  |
| § 1.3 行列式的计算 .....        | 10 |
| § 1.4 克拉默(Cramer)法则 ..... | 25 |
| 小结 .....                  | 27 |
| 自测题 .....                 | 28 |
| 第二章 矩阵 .....              | 32 |
| § 2.1 矩阵及其运算 .....        | 32 |
| 一、矩阵的概念 .....             | 32 |
| 二、几种特殊的矩阵 .....           | 32 |
| 三、矩阵的运算 .....             | 33 |
| 四、矩阵与行列式的联系 .....         | 34 |
| 五、矩阵与线性方程组的联系 .....       | 35 |
| § 2.2 可逆矩阵 .....          | 42 |
| 一、基本概念与性质 .....           | 42 |
| 二、伴随矩阵 .....              | 43 |
| 三、矩阵可逆的条件与求逆矩阵的方法 .....   | 43 |
| § 2.3 分块矩阵 .....          | 57 |
| 一、分块矩阵的概念 .....           | 57 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 二、分块对角矩阵 .....              | 58  |
| § 2.4 矩阵的初等变换 .....         | 62  |
| 一、初等变换的概念 .....             | 62  |
| 二、矩阵的初等变换对方阵的行列式的影响 .....   | 63  |
| 三、初等矩阵 .....                | 63  |
| § 2.5 矩阵的秩 .....            | 66  |
| 一、矩阵的秩的定义 .....             | 66  |
| 二、矩阵的秩的性质 .....             | 66  |
| 三、矩阵的秩的求法 .....             | 67  |
| 小结 .....                    | 73  |
| 自测题 .....                   | 74  |
| <b>第三章 线性方程组和向量</b> .....   | 77  |
| § 3.1 线性方程组的消元法 .....       | 77  |
| 一、线性方程组的解及有解的判定 .....       | 77  |
| 二、线性方程组的消元法 .....           | 78  |
| § 3.2 $n$ 维向量及其线性运算 .....   | 85  |
| 一、 $n$ 维向量 .....            | 85  |
| 二、向量的线性运算 .....             | 86  |
| 三、向量与矩阵及线性方程组的联系 .....      | 86  |
| 四、线性组合与线性表出 .....           | 87  |
| § 3.3 向量组的线性相关与线性无关 .....   | 90  |
| 一、线性相关性的概念 .....            | 90  |
| 二、有关线性相关性的结论 .....          | 91  |
| § 3.4 向量组的极大无关组与向量组的秩 ..... | 101 |
| 一、两个向量组等价的概念与性质 .....       | 101 |
| 二、向量组的极大线性无关组 .....         | 102 |
| 三、向量组的秩与矩阵的秩 .....          | 102 |
| 四、求向量组的秩与极大无关组的方法 .....     | 103 |
| 五、关于满秩矩阵的等价条件 .....         | 103 |
| § 3.5 线性方程组解的结构 .....       | 116 |
| 一、线性方程组解的性质 .....           | 116 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 二、齐次线性方程组解的结构 .....                       | 116 |
| 三、非齐次线性方程组解的结构 .....                      | 117 |
| 小结 .....                                  | 131 |
| 自测题 .....                                 | 133 |
| <b>第四章 向量空间</b> .....                     | 136 |
| § 4.1 向量空间 .....                          | 136 |
| 一、 $n$ 维向量空间及其子空间的概念 .....                | 136 |
| 二、 $n$ 维向量空间 $R^n$ 的基与坐标 .....            | 136 |
| 三、基变换公式和坐标变换公式 .....                      | 137 |
| 四、子空间的维数和基 .....                          | 137 |
| § 4.2 实向量空间中向量的度量性 .....                  | 140 |
| 一、向量的内积 .....                             | 140 |
| 二、向量的长度 .....                             | 140 |
| 三、向量的正交 .....                             | 141 |
| 四、施密特(Schmidt)正交化 .....                   | 141 |
| § 4.3 正交矩阵 .....                          | 145 |
| 一、正交矩阵的定义 .....                           | 145 |
| 二、正交矩阵的性质 .....                           | 145 |
| 小结 .....                                  | 149 |
| 自测题 .....                                 | 149 |
| <b>第五章 矩阵的特征值和特征向量</b> .....              | 152 |
| § 5.1 矩阵的特征值和特征向量 .....                   | 152 |
| 一、特征值和特征向量的概念及计算 .....                    | 152 |
| 二、特征值和特征向量的性质 .....                       | 152 |
| § 5.2 相似矩阵与矩阵的可对角化 .....                  | 162 |
| 一、相似矩阵的概念 .....                           | 162 |
| 二、相似矩阵的性质 .....                           | 162 |
| 三、矩阵可对角化的条件 .....                         | 163 |
| § 5.3 实对称矩阵的对角化 .....                     | 175 |
| 一、实对称矩阵的特征值和特征向量的性质 .....                 | 175 |
| 二、求正交矩阵 $Q$ , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵的步骤 ..... | 175 |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| 小结 .....                   | 183        |
| 自测题 .....                  | 184        |
| <b>第六章 二次型</b> .....       | <b>187</b> |
| § 6.1 二次型的基本概念 .....       | 187        |
| 一、二次型及其与对称矩阵的关系 .....      | 187        |
| 二、可逆线性替换与矩阵的合同 .....       | 188        |
| § 6.2 二次型标准形与规范形 .....     | 192        |
| 一、化二次型为标准形的方法 .....        | 192        |
| 二、二次型的规范形 .....            | 193        |
| § 6.3 实二次型与实对称矩阵的正定性 ..... | 206        |
| 一、正定性的概念 .....             | 206        |
| 二、正定二次型或正定矩阵的判定 .....      | 207        |
| 小结 .....                   | 220        |
| 自测题 .....                  | 221        |
| <b>自测题答案与解法提示</b> .....    | <b>224</b> |

# 第一章 行列式

## § 1.1 $n$ 阶行列式

### 一、基本概念

$n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

简记为  $|a_{ij}|$ . 其中数  $a_{ij}$  称为行列式的第  $i$  行第  $j$  列的元 ( $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ),  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  为元  $a_{ij}$  的代数余子式,  $M_{ij}$  为元  $a_{ij}$  的余子式. 由此可见,  $n$  阶行列式  $|a_{ij}|$  是一个数值.

### 二、几个特殊的行列式

#### 1. 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

#### 2. 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

### 3. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

$$4. \begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ * & a_{2,n-1} & \\ \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

### 5. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

例 1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 将行列式记为  $D$ , 把  $D$  按第 5 行展开, 得

$$\begin{aligned} D &= a_{51}A_{51} + a_{52}A_{52} + a_{53}A_{53} + a_{54}A_{54} + a_{55}A_{55} \\ &= a(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & a \\ 0 & b & a & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + b(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & b & a & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^5 + b^5. \end{aligned}$$

(2) 本题为 4 阶范德蒙德行列式, 故有

$$D = (2-1) \times (3-1) \times (4-1) \times (3-2) \times (4-2) \times (4-3) = 12.$$

例 2 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

解 将第一行的  $(-1)$  倍分别加到下面各行上, 得行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \end{vmatrix},$$

所以当  $n \geq 3$  时,  $D$  中至少有两行的元成比例, 则行列式  $D = 0$ .

当  $n = 1$  时,  $D = a_1 - b_1$ ;

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } D = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1).$$

综上所述可得

$$D = \begin{cases} a_1 - b_1, & n = 1; \\ (a_2 - a_1)(b_2 - b_1), & n = 2; \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

## § 1.2 行列式的性质

### 一、行列式性质

1. 行列式与它的转置行列式相等.
2. 若交换行列式的某两行(或某两列),行列式的值变号.
3. 如果用数  $k$  乘行列式的某一行(或某一列),等于用  $k$  乘行列式.换句话说,行列式某行(或某列)的公因子可以提到行列式外.
4. 如果行列式的某一行(或某一列)的每个元均表为两个数的和,则该行行列式等于两个行列式的和.
5. 将行列式某行(或某列)的  $k$  倍加到另一行(或另一列)上,行列式的值不变.
6. 行列式的某一行(或某一列)元与另一行(或另一列)元的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (k \neq i).$$

$$a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \cdots + a_{nj}A_{nl} = 0 \quad (l \neq j).$$

利用行列式性质,还可以得到下述三个使行列式为零的充分条件:

1. 若行列式中有一行(或一列)元全为零,则行列式等于零.
2. 若行列式中有两行(或两列)元相同,则行列式等于零.
3. 若行列式中有两行(或两列)元对应成比例,则行列式等于零.

### 二、拉普拉斯(Laplace)定理

设  $n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$ , 在  $D$  中任意取定  $k$  行 ( $1 \leq k \leq n$ ), 由这  $k$  行元组成的所有  $k$  阶子式  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) 与它们的代数余子式  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) 的乘积之和等于  $D$ , 即

$$D = M_1 B_1 + M_2 B_2 + \cdots + M_t B_t \quad (t = C_n^k).$$

利用拉普拉斯定理,可得

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \\
 (2) \quad & \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kr} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$