[苏]
A·Б·瓦西里夫斯基著

中学数学
解题训练

四川人民出版社

中学数学解题训练

〔苏〕А·Б·瓦西里夫斯基 著

黄 元 正 译

四 川 人 民 出 版 社

一九八三年·成都

中学数学解题训练

四川人民出版社出版　　　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　　　绵阳地区印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张10　字数211千
1983年12月第一版　　1983年12月第一次印刷
印数：1—62000册

书号：7118·719　　　　定价：0.80　元

内容提要

本书系统讲述了代数、几何、三角、高考和数学竞赛题的解法。强调近代数学概念和方法在解初等数学问题中的作用；重视解题的探索法和各种方法的综合应用。第7章非标准题的解法，实际而有趣，这在一般教材中是难于找到的。部分习题附有答案或提示。本书是一本富有启发性的解题著作，适于高中学生阅读，也可供中学数学教师参考。

前　　言

师范学院数学专业教学大纲规定开设解题实习课程．本书就是学生学习这门课程的教学参考书．它包括代数，几何，三角习题以及高考和数学竞赛题的解法等四部分．

高等师范院校的代数，数学分析和几何课程的内容许多都与中学数学直接相关．因此，代数，几何和三角的解题实习课程应只包括上述课程中未曾充分讲述，并且在中学数学里占有重要地位的课题．书中叙述的理论知识也侧重于大学生在上述课程已学过，而且对于解题是必不可少的知识．

本书既研究解数学题的一般方法，也讨论特殊方法；学生不仅在中学里，而且在高考和数学竞赛中都经常要用到这些方法．在教学方法上本书特别强调教会解难度各异的习题的探索方法．

现行中学数学教学大纲要求中学生熟悉一些重要的数学概念，如导数，积分，几何变换，向量方法和坐标法等等．这些概念的引进就使中学数学的研究方法起了实质上的变革．中学数学教学采用了集合论的术语，十分强调函数的研究，从而使中学生熟悉了更一般的解题方法，大大扩充了他们的解题范围．因此，本书在十分重视用函数分析法解代数题的同时，也相当注意用函数分析法解几何题；不仅指出了在哪些情形使用导数能简化恒等式和不等式的证明，简化不等式的解法；而且也说明了如何用导数简化有关含参数的方程的根的讨论过程；对于一些十分复杂的方程和不等式，特别是某些含参数

的方程和不等式，还广泛地采用函数图象以便使解法简捷。

让学生通过解题学会数学思维是数学教学的重要任务。所以我们相当重视各种方法(作图法、图象法和解析法)的综合应用，极其强调如何提出假设，怎样发现各种集合的性质等等，以便学生在解题实践中掌握解题的各种一般方法和特殊方法，获得使用这些方法来探索解题途径的经验和技巧。因此，书中的练习按如下原则选编：某些习题仅给出特殊情况，但是研究这些特例就能找到它的一般情况的解题方法。

书中不少例题解法的叙述都带有提示的性质，而且还格外重视论述解非标准题的教学法。

每节都附有独立练习题．由于书中已讲述了检验各种代数，几何题解法正确与否的基本方法，所以多数练习题都未给答案。我们认为，应当通过解题来获得自我验证的经验和技巧．但是，比较复杂的习题给有提示，给有合理解题的建议。练习中含参数的习题，记有＊号（用＊代替＝，<，>等三个符号）的习题可供程度不同的大学生练习。

§7.8 的习题虽然不太难，但都是非标准题，适于用作代数，三角和几何的系统解题实习课，也适于用作低年级的数学作业。

书中选用了我的《解题方法》（明斯克，高等教育出版社 1974年）一书的部分材料。

本书既可用作解题教学进修班的教材，也可供中学课外活动和进修用。

作者诚挚地感谢格鲁达诺娃和卡普兰，他们审阅了原稿，提出不少有益的改进意见。

作　　者

基本符号表

$[D—ABC]$——底面为ABC的棱锥$DABC$；

$[D—ABC]^{\Pi}$——底面为ABC的正棱锥$DABC$；

$S(\phi)$——图形ϕ的面积；

$S(ABC)$，$S(ABCD)$——三角形ABC，四边形$ABCD$的面积；

$[ABCD—A_1B_1C_1D_1]$——底面为$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$的四棱柱；

$[ABC—A_1B_1C_1]^{\Pi}$——正三棱柱；

$[ABCD—A_1B_1C_1D_1]^{\perp}$——直棱柱；

Σ，Γ——平面；

$|A,(DBC)|$——点A到平面DBC的距离；

$(AB,\widehat{\ }MCD)$——直线AB与平面MCD所成的角度；

$(ABC,\widehat{\ }MDE)$——平面ABC与平面MDE所成的角度；

$(AB,\widehat{\ }CM)$——直线AB和CM所成角度；

$|A,(BC)|$——点A到直线BC的距离；

补充：$[AB]$——线段AB；

$[AB)$——以A为端点的射线AB；

(AB)——直线AB；

圆$(O;R)$——以O为圆心，R为半径的圆；

$O_1=S_{(BK)}(O)$——O_1是点O关于直线(BK)的轴对称点；

$A_1=S_M(A)$——以M为对称中心，A_1为A点关于M点的中心对称点；

R_O^{α}——以O为旋转中心，旋转角度α的旋转变换，例，$[BP]=R_O^{\theta}([CM])$，线段CM绕O点旋转角度θ后，变为$[BP]$；

H_O^K——以O为位似中心，位似比等于K的位似变换，例，$\omega_1=H^2_K(\omega)$，以K为位似中心，位似比等于2的位似变换将圆ω变在ω_1；

(ABC)——平面ABC。

目　　录

第7章　非标准题的解法

答案　提示　解答

第1章　整数性质的研究方法

§1.1.　数的整除性*

因式分解法　分解变量式为因式，然后证明，原式与除式之间有公因式。用这方法解题经常都要利用下面的公式：

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}),\quad(1.1)$$

其中n为自然数；

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1}),\quad(1.2)$$

其中$n=2k+1$，k为任意自然数。

只须将括号内的式子相乘，就能证明公式(1.1)和(1.2)。

例1.　证明：当n为任意自然数时，17^n-11^n能被6整除。

根据公式(1.1)，$17^n-11^n=(17-11)(17^{n-1}+$ $+17^{n-2}\cdot 11+\cdots+11^{n-1})$，这就证明了习题的结论。

例2.　证明：当n为任意自然数时，$2\cdot 7^n+1$能被3整除。

因为$2\cdot 7^n+1=2(7^n-1)+3$，由公式(1.1)可推得7^n-1能被3整除，所以习题得证。

例3.　证明：当n为任意自然数时，$3^{2n+1}+2^{n+2}$能被7整除。

显然，$3^{2n+1}+2^{n+2}=9^n\cdot 3+2^n\cdot 4=3(9^n-2^n)+3\cdot 2^n+$

---

*仅讨论在其思想方法上与中学数学密切相关的整除论习题的解法。

$+4\cdot2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot2^n$. 由公式(1.1)，数$9^n-2^n$能被7整除，习题得证.

数学归纳法 数学归纳法是基于如下原理的证明方法：1)当$k=1$时，某性质x成立；2)假设某自然数$k>1$具有性质x，并由此推导出$k+1$也具有这一性质，则对一切自然数n都具有性质x.

例4. 证明：对任何$n\geqslant1$的整数，8^n+6都是7的倍数.

当$k=1$时，习题的结论成立. 设$n=k(k>1)$时，命题成立，即

$$8^k+6=7m \quad (m为自然数). \tag{1.3}$$

现在证明，当$n=k+1$时，习题的结论成立，即

$$8^{k+1}+6=7t \quad (t是自然数). \tag{1.4}$$

由等式(1.3)得，$8^k=7m-6$. 因此，

$$8^{k+1}+6=8\cdot8^k+6=8(7m-6)+6=7\cdot8m-42$$

$$=7(8m-6),$$

即 $t=8m-6$.

t是自然数，所以，由等式(1.4)，习题得证.

例5. 证明：对任何自然数n，$3^{2n+2}+2^{6n+1}$都能被11整除.

当$k=1$时，习题的结论成立. 设当$n=k\ (k>1)$时，这命题成立，即

$$3^{2k+2}+2^{6k+1}=11m, \tag{1.5}$$

其中m为自然数.

我们证明，当$n=k+1$时，习题的结论成立，即

$$3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}=11p, \tag{1.6}$$

其中p为自然数.

由等式(1.5)知,

$$3^{2k+2}=11m-2^{6k+1}. \tag{1.7}$$

注意到等式(1.7),就能将和式

$$3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}$$

变形为

$$3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}=3^2\cdot3^{2(k+1)}+2^{6(k+1)+1}=$$
$$=3^2(11m-2^{6k+1})+2^{6(k+1)+1}$$
$$=3^2\cdot11m-3^2\cdot2\cdot2^{6k}+2^7\cdot2^{6k}$$
$$=3^2\cdot11m+2^{6k}(2^7-2\cdot3^2)$$
$$=3^2\cdot11m+2^{6k}\cdot110=11(9m+10\cdot2^{6k}).$$

这就证明了等式(1.6)成立;$p=9m+10\cdot2^{6k}$.

余数法

设N_1和N_2是自然数,且$N=N_1+N_2$.如果$N_1=qn_1+$ $+p_1$,$N_2=qn_2+p_2$(q,n_1,n_2,p_1,p_2 都是自然数),那么$N=(qn_1+p_1)+(qn_2+p_2)=q(n_1+n_2)+(p_1+p_2)$.因此,如果用$q$除$N_1$和$N_2$,所得余数$p_1$与$p_2$之和,也能被$q$整除,即当$p_1+p_2=qk$时,($k$为自然数),那么$N=N_1+$ $+N_2$能被q整除.

例6:证明:对任意自然数n,$2\cdot7^n+1$都是3的倍数.

显然,$2\cdot7^n+1=2(6+1)^n+1$. 用牛顿二项式定理展开$(6+1)^n$就能明显看出,用3除$(6+1)^n$余数为1,于是用3除$2\cdot7^n$余数为2.所以,$2\cdot7^n+1=(3m+2)+1=3(m+1)$.

例7:证明:无论n为什么自然数,$21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$都不能被19整除.

显然，$21^{2n+1}+17^{2n+1}+15=$

$$=(19+2)^{2n+1}+(19-2)^{2n+1}+15.$$

将 $(19+2)^{2n+1}$ 和 $(19-2)^{2n+1}$ 按牛顿二项式定理展开，就能证明，用19除 $(19+2)^{2n+1}$ 余式为 2^{2n+1}，用19除 $(19-2)^{2n+1}$余式为$(-2)^{2n+1}$. 而 $2^{2n+1}+(-2)^{2n+1}=$ $=0$. 因此，用19去除 $21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$余数为15. 这就证明了习题的结论.

反证法

假设习题的结论不成立，即是说，设给定变量的表达式并非某已知自然数的倍数，根据此假设推导出矛盾，从而证明习题的结论成立.

例8:证明：无论n为什么整数，表达式 n^2+3n+5 都不能被121整除.

设习题的结论不成立，即存在整数m，使得

$$n^2+3n+5=121m. \qquad (1.8)$$

解关于n的方程(1·8)得，

$$n_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-3\pm\sqrt{11(44m-1)}\right].$$

根据习题的条件，n应为整数，因而必有$11(44m-1)=(11k)^2$，即 $44m-1=11k^2$ （k为整数）. 无论m为什么整数，等式的左端都不是11的倍数，所以，方程 (1·8)没有整数解. 所得的矛盾就证明了习题的结论.

练　　习

1. 证明（k为自然数）：

$a)\ 4\cdot6^k+5^k-4$是5的倍数；

$b)\ 4^{2k+1}+3^{k+2}$是13的倍数；

$c)\ 5^{2k+1}+4^{k+2}$ 是 21 的倍数；

$d)\ 5^{6k+5}+7^{6k}+6$ 是 9 的倍数；

$e)\ 5^{2k-1}\cdot2^{k+1}+3^{k+1}\cdot2^{2k-1}$ 是 19 的倍数.

2. 确定，当k为什么自然数时，

$a)\ 11^k+7^k$ 能被 9 整除；

$b)\ 13^k+k$能 被 12 整除.

§1.2. 方程和方程组的整数解

对变量之一解方程　已知含若干变量的方程$F(x、y、z、\cdots，u、v)=0$，关于这些变量之一，例如 v 解方程，然后研究函数 $v=f(x,\ y,\ z\cdots,\ u)$.

例1. 求方程

$$17(xyzt+xy+xt+zt+1)-54(yzt+y+t)=0$$

的正整数解.

关于x解方程得：

$$17x=54-\frac{17(zt+1)}{yzt+y+t}.$$

由此得

$$54-17x=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}. \qquad (1.9)$$

因为 y，z，t，x 都是自然数，所以方程(1.9)右边是正整数，于是 $x\leqslant 3$．当 $x=1$ 时，方程(1.9)左边等于37；当 $x=2$ 时，左边等于 20；当 $x=3$ 时，左边为3．于是需要在自然数中解方程：

$$37=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}; \qquad (1.10)$$

$$20=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}; \qquad (1.11)$$

$$3=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}. \qquad (1.12)$$

由方程(1.10)得

$$\frac{37t}{zt+1}=17-37y. \qquad (1.13)$$

因为当 $y\geqslant 1$ 时，方程(1.13)的右边为负数，所以，这方程无正整数解．

类似地可证明，方程(1.11)没有正整数解。

由方程(1.12)知，$17-3y=\dfrac{3}{z+\dfrac{1}{t}}$．显然有

$0<\dfrac{3}{z+t^{-1}}<3$，其中z和t都是自然数．因而 $0<17-3y<3$．