代 数 学

I

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

科 学 出 版 社

代 数 学

I

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

丁石孙 曾肯成 郝钢新 译

万 哲 先校

科 学 出 版 社

1 9 7 8

内 容 简 介

全书共分两卷，涉及的面很广，可以说概括了1920—1940年左右代数学的主要成就，也包括了1940年以后代数学的新进展，是代数学的重要著作之一．本书是第一卷，分十章：前三章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知识，即有关(1)集合，(2)群，(3)环、理想和域的最基本的概念；其余各章主要讲述交换域的理论．

B. L. Van der Waerden

ALGEBRA

I

Springer-Verlag, 1955

代 数 学

I

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

丁石孙 曾肯成 郝钢新 译

万 哲 先 校

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1963年7月第一版 开本：850×1168 1/32

1978年9月第四次印刷 印张：12 插页：2

印数：10,601—78,000 字数：272,000

统一书号：13031·783

本社书号：1126·13—1

定价： 1.50 元

中譯本序言

代数学是数学的一个重要的基础的分支，历史悠久．我国古代在代数学方面，有光輝的成就．一百多年来，尤其是本世紀以来，随着数学的发展以及应用的需要，代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革．一系列的新的代数領域被建立起来，大大地扩充了代数学的研究范围，形成了所謂近世代数学．它与以代数方程的根的計算与分布为研究中心的古典代数学有所不同，它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的規律及各种代数結构——羣、环、代数、域、格等——的性質为其中心問題的．由于代数运算貫串在任何数学理論和应用問題里，也由于代数結构及其中元素的一般性，近世代数学的研究在数学中是具有基本性的．它的方法和結果滲透到那些与它相接近的各个不同的数学分支中，成为一些有着新面貌和新內容的数学領域——代数数論、代数几何、拓扑代数、Lie 羣和 Lie 代数、代数拓扑、泛函分析等．这样，近世代数学就对于全部現代数学的发展有着显著的影响，并且对于一些其它的科学領域（如理論物理学、計算机原理等）也有較直接的应用．

历史上，近世代数学可以說是从 19 世紀之初发生的，Galois 应用羣的概念对于高次代数方程是否可以用根式来解的問題进行了研究并給出徹底的解答，他可以說是近世代数学的創始者．从那时起，近世代数学由萌芽而成长而发达．大概由 19 世紀的末叶开始，羣以及紧相联系着的不变量的概念，在几何上、在分析上以

及在理論物理上，都发生了重大的影响. 深刻研究羣以及其它相关的概念，如环、理想、綫性空間、代数等，应用于代数学各个部分，这就形成近世代数学更进一步的演进，完成了以前独立发展着的三个主要方面——代数数論、綫性代数及代数、羣論——的綜合. 对这一步統一的工作，近代德国代数学派起了主要的作用. 由 Dedekind 及 Hilbert 于上世紀末叶的工作开始，Steinitz 于1911 年发表的論文对于代数学抽象化工作貢献很大，其后自 1920 年左右起以 Noether 和 Artin 及她和他的学生們为中心，近世代数学的发展极为灿烂.

Van der Waerden 根据 Noether 和 Artin 的講稿写成“近世代数学”(Moderne Algebra)，綜合近世代数学各方面工作于一书. 书分上下两册，第一版于 1930—1931 年分别出版. 自出版后，这本书对于近世代数学的传播和发展起了巨大的推动作用. 到1959—1960 年，上下两册已分别出到第五版和第四版. 时至今日，这本书仍然是在近世代数学方面进行学习和开展科学研究的一部好书.

当然，近世代数学是不断向前发展的. 本世紀三十年代当时所謂近世代数学的一些基本內容已經逐漸成为每个近代数学工作者必备的理論知識，所以本书由五十年代第四版起就去掉“近世”两字而改名为“代数学”，同时做了較大的增补和改写，但仍保持着原来的基本內容和风格. 至于 Jacobson 的“抽象代数学講义”和 Bourbaki 的“代数学”等书，則出版較后而风格和內容亦有异.

本书的第二版曾有武汉大学故教授蕭君絳先生譯本，流传不广，文字亦較艰澀. 华罗庚先生于 1938—1939 年在昆明西南联合大学講授近世代数課程时，曾以本书上册为参考編写講义，变动較

大而非全文照譯. 1961 年 9 月国内代数学工作者于北京頤和园举行座談会时，皆認为此书新版有迅速譯出之必要. 經过一年，由曹錫华、万哲先、丁石孙、曾肯成、郝鈵新諸同志集体合作譯出第一、二卷. 今后当能对代数学的教学及科学研究起較大的推动作用. 更希望国内代数学工作者在教学和科学研究实践中有自著的书籍写成出版.

段学复

1962 年 10 月 11 日序于
北京大学数学力学系

第三版前言的一部分

在第二版中，我已經严格地建立了賦值論．賦值論在数論与代数几何中日益表現了它的重要性，因之我把賦值論的一章写得更加詳細与淸楚了．

根据許多人的要求，我把在第二版去掉了的关于良序与超限归納的两节又加了进来，在这个基础之上，又把 Steinitz 的域論以最一般的形式写了出来．

按照 Zariski 的意見，多項式概念的引入变得容易理解了．范数与迹的理論也有改进之必要，这是 Peremans 先生向我友好地指出的．

B. L. 范德瓦尔登

Laren (Nordholland), 1950 年 7 月

第四版前言

最近完全出乎意外去世的代数学家与数論专家 Brandt 在德国数学会的协会年报 55 卷中对本书第三版写了如下的評論："关于书名，如果在第四版能够改为更簡单的，但是更确切的书名'代数学'，我将感到很高兴．象这样一部过去、現在以及将来都是最好的数学书，书名不应該引起人們如此的疑惑，似乎它是追随一种时髦的式样，它在昨天还不被人們知道，可是明天可能将被忘掉．"

根据这个意見，我把书名改成了"代数学"．

按照 M. Deuring 的建議，“超复数”概念的定义改得更为合适，同时分圓域的 Galois 理論在它对于循环域理論的应用中显得更加完整.

基于各地来信，还作了許多小的修改，我在这里对所有来信的人表示感謝.

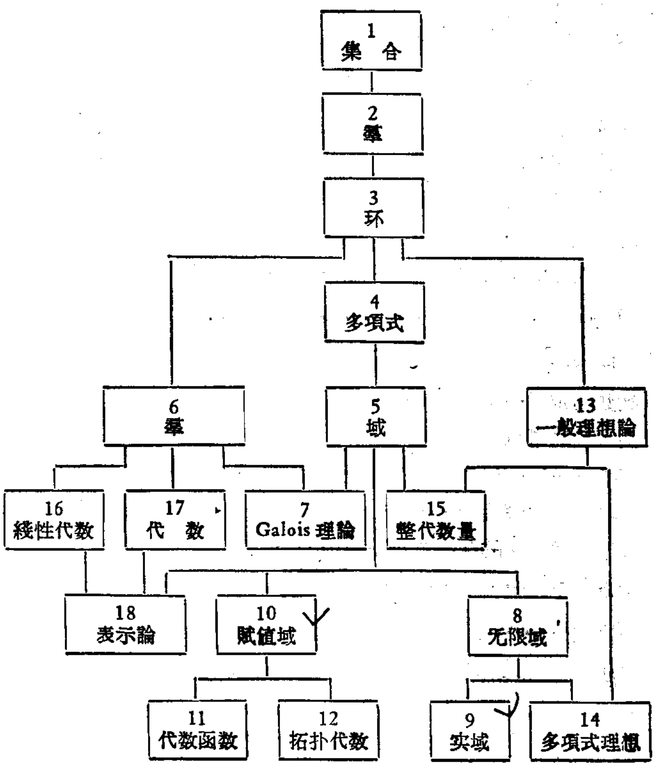
B. L. 范德瓦尔登

Zürich 1955 年 3 月

目　　录

全书綜覽图

I，II 两卷中各章总覽及其邏輯关系



Λ'n
R

引　　言

本书的目的　“抽象的”、“形式的”或“公理化的”方向在代数学的領域中造成了新的高涨，特别在羣論、域論、賦値論、理想論和超复系理論等部門中引起了一系列新概念的形成，建立了許多新的联系，并导致了一系列深远的結果．本书的主要目的就是要将讀者引入整个这一概念世界．

以这样一些一般的概念和方法作为前导，古典代数学中的个别結果也将要在近世代数的范围之內获得适当的地位．

材料的分配．对讀者的指示　为了充分明晰地展示統治着抽象代数的許多普遍观点，有必要在开头将羣論和初等代数中的基本知識重新作一叙述．

由于最近一个时期出現了羣論、古典代数和域論方面的許多出色的表述，現在已有可能将这些导引性的部分紧湊地（但是完整地）写出来[1]．

另外一个指导原则，就是希望尽可能地作到使每个个别的部

1）羣論方面参看：

Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. Berlin, Springer, 1927.

域論方面：

Hasse, H.: Höhere Algebra I, II 及 Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Sammlung Göschen, 1926/27.

Haupt, O.: Einführung in die Algebra I, II, Leipzig, 1929.

古典代数方面：

Perron, O.: Algebra I, II, 1927.

綫性代数方面：

Dickson, L. E.: Modern algebraic Theories, Chicago, 1926.

分都能独立地讀懂. 只希望了解一般理想論或超复数理論的讀者,就沒有必要去讀 Galois 理論,反之亦然; 想要参考消去法或綫性代数的讀者,就可以不必被許多复杂的理想論的概念所吓倒.

材料的分配是这样来安排的: 最初三章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知識,卽有关 1. 集合; 2. 羣; 3. 环、理想和域的最基本的概念. 第一卷中其余各章主要从事于講述交換域的理論,且主要以 Steinitz 在 *Crelles Journal*, **137** (1910) 发表的奠基性著作为基础. 第二卷在尽可能地作到彼此不相依賴的各章中討論了模、环和理想的理論,以及对代数函数、初等因子、超复数和羣表示的应用.

Abel 积分和連續羣的理論不得不从本书中略去, 因为对此二者作适当的討論都有必要用到一些超越的概念和方法. 其次,由于內容庞大之故,不变量理論也被略去. 行列式假定是已知的,并且只用到很少几次.

为了对本书內容作更进一步的了解,可以查看目录,特别是前面所附的那个綜覽图. 从这个图中可以清楚地看到, 每一章要利用到前面哪些章.

分插在全书中的許多习題是这样选择的, 就是要使讀者能够通过它們来检驗自己是否懂得正文的內容. 它們之中也包括了一些在后面有时要用到的例子和补充. 解这些习題不需要特别的技巧,要用到的在方括号內也作了提示.

取材来源 这本书部分地是由几次講演发展而成的,这就是:

E. Artin 的代数学講演(汉堡, 1926 年夏季).

E. Artin, W. Blaschke, O. Schreier 和作者所主持的理想論討論班(汉堡, 1926/27 冬季).

E. Noether 关于羣論和超复数理論的两次讲演(哥庭根, 1924/

25冬季，1926/27冬季）[1].

本书中的一些新的証明或証明的新的安排，大部分都来自这些讲演和討論班，即使沒有明确指出其来源者也是如此。

---

1) E. Noether 的后一讲演的整理稿发表在 *Math. Zeitschrift*, **30** (1929), 641—692.

第一章　数与集合

因为在这本书里要用到某些邏輯的和一般数学的概念，对于这些概念初学数学的人很可能还不熟悉，所以在前面我們用較短的一章来介紹一下．在这里我們不打算接触数学基础中的困难問題[1]：我們一直采取“朴素的观点”，当然，我們避免引起詩論的循环定义．有經驗的讀者在这一章只要了解一下符号 $\in$，$\subset$，$\supset$，$\cap$，$\cup$ 与 $\{\cdot\cdot\}$ 的意义，可以略去其余的部分．

§1. 集　　合

作为所有数学討論的起点，我們总是考虑某些确定的对象，譬如数字，字母或者它們的組合．　每个单个元素具有或者不具有的性質就定义一个集合或者类；这个集合的元素就是全体具有这个性質的对象．記号

$$a \in \mathfrak{M}$$

表示：a 是 $\mathfrak{M}$ 的元素．　我們也几何形象地說：a 在 $\mathfrak{M}$ 中．　一个集合称为空的，如果它不包含任何元素．

我們也可以把数(或者字母等)的序列和集合看作对象和集合(我們有时称为第二层集合)的元素．第二层集合又可以是更高层集合的元素，等等．但是在概念形成中，如“所有集合的集合”这类

1) 对于这些問題参看 A. Fraenkel, Einfuhrung in die Mengenlehre (集合論引論), 3. Aufl. (Berlin 1928), 以及 Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik (数学基础), Berlin I (1934), II (1939) 和在那里所引的文献．

概念是不允許的，因为它們是造成矛盾的原因；我們常常只从一类预先規定的对象中来造新的集合（新的集合本身不属于这一类对象）。

如果集合 $\mathfrak{N}$ 的全部元素同时是 $\mathfrak{M}$ 的元素，那么 $\mathfrak{N}$ 就称为 $\mathfrak{M}$ 的**子集合**，記为

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}.$$

这时，$\mathfrak{M}$ 也称为 $\mathfrak{N}$ 的**包集合**，記为

$$\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}.$$

由 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ 推出 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

空集合包含在每个集合之中.

如果 $\mathfrak{M}$ 的所有元素全在 $\mathfrak{N}$ 中，同时 $\mathfrak{N}$ 的所有元素全在 $\mathfrak{M}$ 中，那么集合 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 称为**相等**：

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

因之，集合相等就表示关系

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$$

同时成立. 或者：如果两个集合包含相同的元素，它們就相等.

如果 $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$，但不 $= \mathfrak{M}$，那么 $\mathfrak{N}$ 就称为 $\mathfrak{M}$ 的**眞子集合**，$\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的**眞包集合**，記为

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}.$$

因此 $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ 表示，$\mathfrak{N}$ 的元素全在 $\mathfrak{M}$ 中，而在 $\mathfrak{M}$ 中至少有一个元素不在 $\mathfrak{N}$ 中.

設 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 是任意的集合. 由所有既属于 $\mathfrak{A}$ 又属于 $\mathfrak{B}$ 的元素組成的集合 $\mathfrak{D}$ 称为集合 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 的**交**，写为

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{D}$ 既是 $\mathfrak{A}$ 的又是 $\mathfrak{B}$ 的子集合，并且每个具有这个性質的集合都包含在 $\mathfrak{D}$ 中.