科学版

大学工科数学学习指导系列

工科数学分析

学习指导

白　红　吴勃英　刘　锐
王兴涛　王洪滨　编著

- 精心辅导课程学习
- 训练数学思想与技能
- 展示数学方法与技巧

科学出版社
www.sciencep.com

大学工科数学学习指导系列

工科数学分析学习指导

白　红　吴勃英　刘　锐
王兴涛　王洪滨　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为《大学工科数学学习指导系列》之一，主要介绍工科数学的函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微分学，多元函数积分学和无穷级数的基本内容，其中选编了大量例题及解答和适合各层次学生的练习题以供学习使用。

本书可作为非数学专业本科生的课外辅导教材，也可作为准备考研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析学习指导/白红等编著. —北京：科学出版社，2004
(大学工科数学学习指导系列)
ISBN 7-03-011185-0

Ⅰ. 工… Ⅱ. 白… Ⅲ. 数学分析-高等学校-解题 Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 009595 号

责任编辑：林　鹏　段博原/文案编辑：吴寅泰　吴伶伶/责任校对：朱光光
责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004 年 3 月第 一 版　开本：B5 (720×1000)
2004 年 3 月第一次印刷　印张：22 1/2
印数：1—5 000　字数：430 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

工科院校最重要的基础课之一——高等数学，它不仅仅是后续课程的基础，也是今后工作和继续深造的基础。近年来，随着硕士研究生教育的迅猛发展，报考研究生的人数逐年增多，为了使考生们更好地掌握和复习高等数学的内容，一本好的复习资料对他们来说是至关重要的。目前绝大部分考研复习资料都是在学完全部数学课程以后才能读得懂的教材，缺少一种与学习高等数学课程同步又包含考研所有内容特点的书。本教材就是为解决这一问题而写成的。本书严格遵循国家教委的教学大纲和硕士研究生入学考试大纲，内容顺序与教材同步。每章分三大部分：一是对大纲要求的重要概念、性质、定理、公式进行剖析和总结；二是针对所学内容总结出问题，给出解决问题的方法和技巧，并配有大量的例题；三是为使学习者了解自己学习的状况，配有一定量的练习题并附有提示和答案。

本书既是一本教学参考书又是一本考研辅导书，不仅适合考研的考生，也适合作为正在学习高等数学学生的期末复习参考书。

因编者水平和经验所限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请同行、专家及广大读者批评指正。

编　者

2003.12

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、基 本 内 容

(一) 函数

1. 函数的概念

设有两个变量 x 和 y，如果对变量 x 所能取的每一个值，按照一定的规律，总有惟一的变量 y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量。自变量 x 所能取值的全体称为函数的定义域，变量 y 所取值的全体称为函数的值域。

2. 具有特殊性质的函数

(1) 奇函数与偶函数

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若对 D 上任意 x 有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=-f(x) \quad 或 \quad f(-x)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的奇函数或偶函数。

(2) 周期函数

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在非零常数 T，对任意 $x\in D$ 有 $x+T\in D$，并且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为函数的一个周期。若函数有最小正周期，则称这个最小正周期为函数的周期。

(3) 单调函数

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若对 D 上任意 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad 或 \quad f(x_1)\geqslant f(x_2)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上单调增加或单调减少。

(4) 有界函数

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在一个常数 $M>0$，对任意的 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的有界函数。

(5) 复合函数

设 $u=g(x)$，$x\in D$，u 的值域为 E，又 $y=f(u)$，$u\in U$，若 $E\cap U\neq\varnothing$，则称

函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的复合函数。

(6) 初等函数

常量函数 $y=c$（常数），幂函数 $y=x^{\alpha}$，指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_{a}x\ (a>0,a\neq1)$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数，基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所形成的函数为初等函数。

(二) 极限

1. 极限的定义

(1) 数列的极限

设 $\{x_n\}$ 为一数列，A 为一常数，如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

(2) 函数（当自变量 $x\to\infty$ 时）的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(b,+\infty)$ 上有定义，A 为一常数，如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时有极限 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$。

(3) 函数（当自变量 $x\to x_0$ 时）的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，A 为一常数，如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处有极限 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

(4) 极限的等价形式

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

2. 极限的性质与运算

1) 如果一个函数或数列有极限，则其极限必惟一。

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，若 $f(x)<g(x)$ 或 $x_n<y_n$，则有 $A\leqslant B$；若 $A<B$，则在自变量的极限点附近有 $f(x)<g(x)$ 或 $x_n<y_n$；若数列 x_n 收敛，则其必有界。

2) $$\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$$
$$\lim(f(x)g(x))=AB\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}x_ny_n=AB$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}\qquad(B\neq0)$$

3. 无穷小的阶及其性质

若 α,β 都是无穷小且 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq0$,则称 α 是 β 的 k 阶无穷小。

当 $0<k<1$ 时,α 是比 β 低阶无穷小。

当 $k>1$ 时,α 是比 β 高阶无穷小,记为 $\alpha=0(\beta)$。

当 $k=1$ 时,α 与 β 为同阶无穷小。

当 $k=C=1$ 时,称 α 与 β 为等阶无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$。

当 $x\to0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}$。

有限个无穷小的和,积仍是无穷小。

有界量与无穷小的积是无穷小。

无穷大的倒数是无穷小。

若 $\alpha\sim\beta$,则 $\alpha-\beta=0(\alpha)$ 且 $0(\beta)$;若 $\alpha'\sim\alpha,\beta'\sim\beta$,则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$。

4. 收敛准则与重要极限

若数列 x_n 单调且有界,则数列 x_n 必收敛。

若在自变量的极限点附近有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$ 或 $y_n\leqslant x_n\leqslant Z_n$,且 $\lim g(x)=\lim G(x)=A$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=A$,则

$$\lim f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}x_n=A$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

(三) 连续

1. 函数的连续性的概念

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$,则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续。

若函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上每一点都连续,则称 $y=f(x)$ 为 D 上的连续函数,记为 $f(x)\in C_D$。

2. 函数的间断点及其类型

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域或含有 x_0 在内的单侧邻域内有定义,且 $f(x)$ 在 x_0 点不连续,则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点。

如果 x_0 是 $f(x)$的间断点，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类间断点，否则称 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点。

如果 x_0 是 $f(x)$的间断点，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类可去间断点。

3．连续函数的性质

连续函数的四则运算和复合是连续函数。

初等函数在其定义的区间内是连续的。

闭区间上的连续函数一定有最小值和最大值，并且介于最小值和最大值之间的数都是函数值。

二、问题与方法

（一）函数

1．函数定义域的求法及函数关系的确定

【例 1-1】 求下列函数的定义域：

1) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x}}$；　　2) $y=\dfrac{1}{2x-1}+\lg(1-\sqrt{1-x})$。

【解】 求初等函数的定义域即解关系式或关系组，使其运算有意义。

1) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)}{x(x-3)} \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases}(x-2)(x+1)\geqslant 0\\ x(x-3)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x-2)(x+1)\leqslant 0\\ x(x-3)<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 2\\ x<0 \text{ 或 } x>3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\ 0<x<3\end{cases} \Rightarrow x\leqslant -1$ 或 $x>3$ 或 $0<x\leqslant 3 \Rightarrow$函数的定义域为$(-\infty,-1]$和$(0,3)$和$(3,+\infty)$。

2) $\begin{cases}2x-1\neq 0\\ 1-\sqrt{1-x}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{1}{2}\\ 0<x\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow$函数的定义域为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$和$\left(\dfrac{1}{2},1\right]$。

【例 1-2】 已知 $f(x)=\arcsin x$，且 $f(\phi(x))=x$，求 $\phi(x)$及其定义域。

【解】 $f(\phi(x))=\arcsin\phi(x)=x \Rightarrow \phi(x)=\sin x$，且 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。

【例 1-3】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(f(x))$的表达式及其定义域。

【解】

$$f(f(x))=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$$

由 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}\Rightarrow x\neq -1$,再由 $f(f(x))=\dfrac{1}{1+f(x)}\Rightarrow f(x)\neq -1\Rightarrow \dfrac{1}{1+x}\neq -1\Rightarrow x\neq -2$,所以 $f(f(x))$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$。

【例 1-4】 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1-x, & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ e^x, & x<0\end{cases}$,求 $f(g(x))$和 $g(f(x))$的表达式。

【解】 $f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & |g(x)|\leqslant 1\\ 1-g(x), & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\text{ 且 }x\geqslant 0\\ e^{2x} & e^x\leqslant 1\text{ 且 }x<0\\ 1-x & |x|>1\text{ 且 }x\geqslant 0\\ 1-e^x & e^x>1\text{ 且 }x<0\end{cases}\Rightarrow$

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ e^{2x}, & x<0\\ 1-x, & x>1\end{cases}$$

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x) & f(x)\geqslant 0\\ e^{f(x)} & f(x)<0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x^2\geqslant 0\text{ 且 }|x|\leqslant 1\\ 1-x & 1-x\geqslant 0\text{ 且 }|x|>1\\ e^{x^2} & x^2<0\text{ 且 }|x|\leqslant 1\\ e^{1-x} & 1-x<0\text{ 且 }|x|>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$g(f(x))=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1-x & x<-1\\ e^{1-x} & x>1\end{cases}$$

【例 1-5】 设 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上,$f(x)\neq 0$ 且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$有 $f(xy)=f(x)f(y)$,求 $f(x)$。

【解】 取 $x=y=0\Rightarrow f(0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)=1$ 和 $f(0)=0$(不满足题意,舍去),所以,$f(0)=1$。

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$有 $f(x)=f(x)f(0)\Rightarrow f(0)=f(x)f(0)$,由于 $f(0)=1$,所以 $f(x)=1$。

【例 1-6】 设 $f(x)$定义在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$上,且对任意 $x\neq 1$ 有 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=x\sin x$,求 $f(x)$。

【解】 对 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=x\sin x$ (1)

将 x 换成$\dfrac{x+1}{x-1}$,得

$$f(x)+2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}\sin\frac{x+1}{x-1} \tag{2}$$

将式(1)×2－式(2),得

$$3f(x)=2x\sin x-\frac{x+1}{x-1}\sin\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{3}x\sin x-\frac{x+1}{3(x-1)}\sin\frac{x+1}{x-1}$$

2. 函数特性的鉴别

【例 1-7】 证明:定义在以原点为对称的数集上的函数都能惟一的表成一个奇函数和一个偶函数之和的形式。

【证明】 设 $g(x)$为偶函数,$H(x)$为奇函数,且

$$f(x)=g(x)+H(x)$$

则

$$f(-x)=g(x)-H(x)$$

由此可得

$$g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))\quad H(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

再证惟一性,假设 $f(x)=g_0(x)+H_0(x)$,这里 $g_0(x)$是偶函数,$H_0(x)$是奇函数,从而有

$$g(x)+H(x)=g_0(x)+H_0(x)\quad 和\quad g(x)-H(x)=g_0(x)-H_0(x)$$

由此得

$$g(x)=g_0(x)\quad 和\quad H(x)=H_0(x)$$

所以惟一性得以证明。

【例 1-8】 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且 $f(x)$为偶函数,又 $f(x)$的图形关于直线 $x=2$ 对称。证明:$f(x)$是周期函数。

【证明】 设 $x\in(-\infty,+\infty)$,则 x 关于直线$x=2$ 为对称点是 $4-x$,由已知条件有 $f(x)=f(4-x)$,又 $f(x)$是偶函数,即 $f(-x)=f(x)$,所以

$$f(4+x)=f(-x)=f(x)$$

即 $f(x)$是以 4 为周期的函数。

【例 1-9】 证明:函数 $f(x)$为周期函数⇔存在两个不等的实数 a,b 使 $f(a+x)=f(b+x)$成立。

【证明】 ⇒设 $f(x)$是以 T 为周期的函数,取 $T=a,b=0$,便有 $f(a+x)=f(b+x)$成立。

⇐ 由 $f(a+x)=f(b+x)$ ⇒

$$f((a-b)+x)=f(a+(x-b))=f(x-b)=f(b+(x-b))=f(x)$$

则 $f(x)$是以 $T=|a-b|$为周期的函数。

（二）极限的计算

(1) 求极限过程中的初等公式变形法

【例 1-10】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$。

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$

【例 1-11】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$。

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

【例 1-12】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)$。

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3}$$

【例 1-13】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$。

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=2$$

【例 1-14】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\dfrac{1}{3}(e^x+e^{-x})\right]$。

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\dfrac{1}{3}(e^x+e^{-x})\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln e^x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{3} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{3e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{3}{1 + e^{-2x}} = \ln 3$$

【例 1-15】 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right)$。

【解】 利用变量代换:令 $t = x - 1$,即 $x = 1 + t$,当 $x \to 1$ 时,$t \to 0$,则

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{m}{1 - (1 + t)^m} - \frac{n}{1 - (1 + t)^n} \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{-m}{mt + \frac{1}{2!}m(m-1)t^2 + \cdots + t^m} + \frac{n}{nt + \frac{1}{2!}n(n-1)t^2 + \cdots + t^n} \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{n\left[m + \frac{1}{2!}m(m-1)t + \cdots + t^{m-1} \right] - m\left[n + \frac{1}{2!}n(n-1)t + \cdots + t^{n-1} \right]}{t\left[m + \frac{1}{2!}m(m-1)t + \cdots + t^{m-1} \right]\left[n + \frac{1}{2!}n(n-1)t + \cdots + t^{n-1} \right]}$$

$$= \frac{m - n}{2}$$

【例 1-16】 设 $x_0 = 7, x_1 = 3$,且 $3x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} (n \geqslant 2)$,求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

【解】 可以利用递归公式求出 x_n。

由 $3x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$,得

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2}$$

从而有

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2})$$

由此可推出

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(\frac{-1}{3} \right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) = \cdots$$

$$= \left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} (x_1 - x_0)$$

即

$$x_n - x_{n-1} = -4\left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} \Rightarrow x_n = x_{n-1} - 4\left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1}$$

$$x_n = x_{n-1} - 4\left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} = x_{n-2} - 4\left(\frac{-1}{3} \right)^{n-2} - 4\left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} = \cdots =$$

$$= x_1 - 4\left[\left(\frac{-1}{3} \right) + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} \right]$$

$$= 3 - 4\left[\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}} - 1\right] = 4 + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[4 + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] = 4$$

(2) 利用重要极限$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}$ 求极限

【例 1-17】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$。

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right]^{\frac{3}{n+1}\cdot\frac{n}{3}} = \mathrm{e}$$

【例 1-18】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$。

【解】

$$\lim_{x\to 0}(1+x\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x\mathrm{e}^x}}\right]^{\frac{x\mathrm{e}^x}{x}} = \mathrm{e}$$

【例 1-19】 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$。

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}}\right]^{n\tan\frac{1}{n}}}{\left\{\left[1+\left(-\tan\frac{1}{n}\right)\right]^{-\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}}\right\}^{-n\tan\frac{1}{n}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^2。$$

(3) 利用夹逼定理求极限

【例 1-20】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}$。

【解】 因为$0<\frac{5^n}{n!}=\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{n}\leqslant\frac{5^4}{24}\cdot\frac{5}{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5^4}{24}\cdot\frac{5}{n}\right)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!} = 0$$