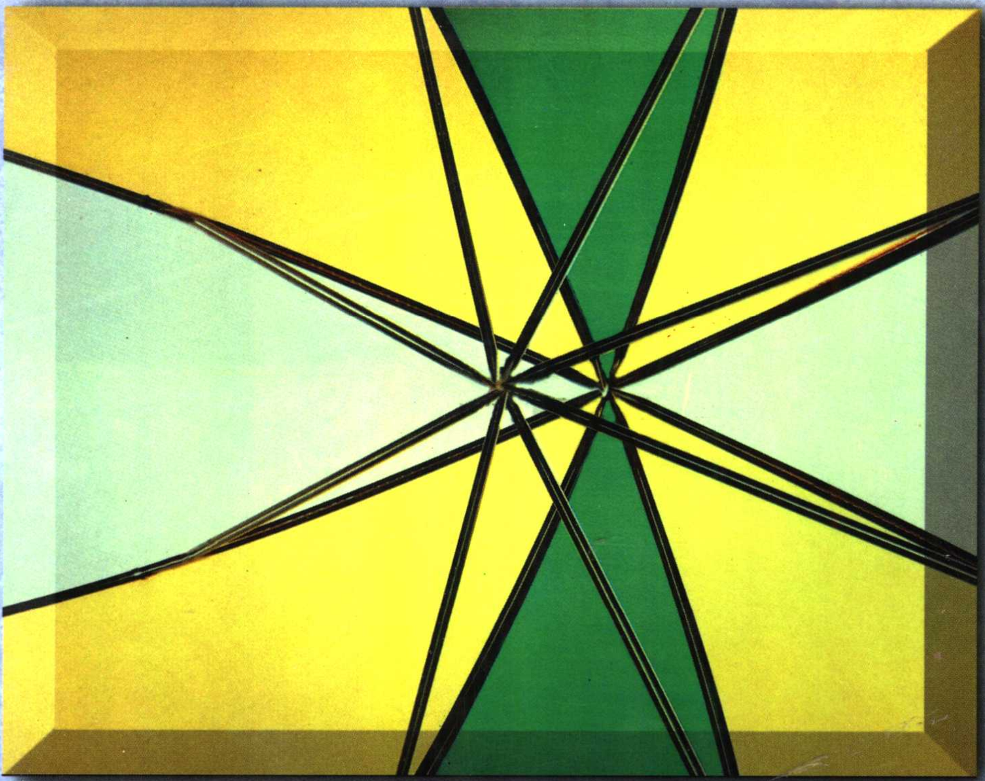
全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材

高等数学

（理科类）

丛书主编　郭光耀
本书主编　刘　晓



科学普及出版社

全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材

高 等 数 学
（理科类）

丛书主编　郭光耀
本书主编　刘　晓

科 学 普 及 出 版 社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：理科类/刘晓主编. －北京：科学普及出版社，1998. 10
(全国各类成人高等学校招生统一考试大专起点升本科考前辅导班教材
ISBN 7-110-04466-1

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-成人教育-高等学校-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13726 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号 邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京国防印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:13.375 字数:340 千字
1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷
印数:1－10000 册 定价:23.00 元

内 容 提 要

本书为专科升本科考前辅导教材之一。内容包括一元函数微积分,多元函数微积分,级数和常微分方程。本书精选了各类基本题型的例题,便于学生掌握相关内容。本书既是专科升本科应试者的复习用书,同时也是各类院校大专生和电大、夜大学生的参考书。

丛书主编　郭光耀
丛书编委　（按姓氏笔画排序）
于　一　仁　静　方　铭　王　奇　王小平
王爱萍　牛　辉　包　海　朱光贵　纪　浩
刘　晓　刘亚玲　刘　嘉　李寿山　何虎生
陈洪育　沈俊燕　国　炜　岳金波　周伯君
赵达夫　闻　跃　郭光耀　徐　刚　唐恒志
傅建国　魏发辰
本书主编　刘　晓
本书编者　刘　晓　赵达夫　龚漫奇　李思泽　黎传琦
吴灵敏　王秋媛

策划编辑　肖　叶
责任编辑　桂民荣
责任校对　张　燕
封面设计　曲　文
正文设计　孙　俐

前　言

近几年来，报考成人高等学校专科升本科的人数不断增加，为了帮助考生在短时间内系统地复习高等数学知识，掌握重点，熟悉报考命题的内容，应广大考生的要求，我们根据专科升本科高等数学考试大纲的要求，编写了这本书。

对每位考生来说，最关心的问题是怎样复习和备考，才能与考试要求相吻合，取得满意的考试成绩。要解决这个问题，首先必须理解考试大纲中所规定的内容，搞清楚哪些内容是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度与广度上要求到什么程度，以及在考试中经常出现的题型有哪些，只有对上述问题心中有数后，才能复习好所考课程，在考试中取得好成绩。

为了回答考生们所关心的问题，我们北方交通大学数学系组织了几位具有丰富的教学经验，对专科升本科考试中的高等数学试题有深入研究的教师，经过反复讨论并认真精选例题，共同编写了《高等数学(理工类)》和《高等数学复习指导(理工类)》图书。

我们采用的方法是：

第一，为了帮助考生深刻理解考试大纲中的要求，本书的章节顺序不仅与考试大纲上的要求完全一致，而且每一章和每一节的开头都指明本部分的重点内容，精选了各类基本题型的例题，并作了较详细的解答。

第二，为了更具体地说明各部分的要求深度、广度以及考生所应具备的知识能力，并让考生了解各部分的常见题型，我们在本书的最后给出了 1997 年专科升本科高等数学试题、参考答案和评分标准；给出了一套高等数学标准样卷试题、参考答案和评分标准；并且给出了三套模拟试题及参考答案，最后对专科升本科高等数学考试试题作了比较详细的分析。

按照本科高等数学学科知识和能力的要求，它包括一元函数微积分(含函数、极限与连续)，多元函数微积分(含向量代数与空间解析几何)，级数以及常微分方程四部分内容。

本书不仅可作专科升本科应试者的复习用书，同时也是正在学习高等数学的大专生和电大、夜大学生的一本难得的参考书。

本书由北方交通大学刘晓主编，参加本书编写的有北方交通大学的刘晓、赵达夫、龚漫奇、李思泽、黎传琦、吴灵敏、王秋媛老师，最后由赵达夫、刘晓老师审校、定稿。在本书的编写过程中，得到了北方交通大学魏发辰老师的大力支持，在此表示感谢!

由于我们的水平有限，时间仓促，书中难免有错误及不妥之处，我们真诚欢迎读者给予批评指正。

编　者

1998 年 7 月

目　　录

第一章　函数、极限、连续 …… 1
　§1.1　函数 …… 1
　§1.2　极限 …… 13
　§1.3　函数的连续性 …… 29
第二章　一元函数微分学 …… 35
　§2.1　导数概念 …… 35
　§2.2　函数的和、差、积、商的求导法则(导数的四则运算) …… 41
　§2.3　反函数的导数、复合函数的求导法则 …… 42
　§2.4　初等函数的求导问题和基本公式 …… 45
　§2.5　高阶导数 …… 46
　§2.6　隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数 …… 48
　§2.7　函数的微分 …… 51
　§2.8　中值定理 …… 53
　§2.9　罗必塔法则 …… 56
　§2.10　函数单调性的判定法 …… 58
　§2.11　函数的极值及其求法 …… 60
　§2.12　最大值、最小值问题 …… 61
　§2.13　曲线的凹凸性与拐点 …… 64
　§2.14　函数图形的描绘 …… 66
第三章　一元函数积分学 …… 69
　§3.1　不定积分的概念和性质 …… 69
　§3.2　换元积分法 …… 74
　§3.3　分部积分法 …… 81
　§3.4　定积分的概念与性质 …… 84
　§3.5　定积分的计算 …… 93
　§3.6　无穷区间上的广义积分 …… 97
　§3.7　定积分的应用 …… 99
第四章　向量代数与空间解析几何 …… 110
　§4.1　空间直角坐标系 …… 110
　§4.2　向量的线性运算与向量的坐标表示式 …… 111
　§4.3　向量的数量积与向量积 …… 117
　§4.4　平面及其方程 …… 122
　§4.5　直线及其方程 …… 127
　§4.6　几种常用曲面 …… 133

第五章 多元函数微分学……139
§5.1 多元函数基本概念……139
§5.2 偏导数与全微分……141
§5.3 多元函数的微分法……144
§5.4 综合举例……147
第六章 多元函数积分学……151
§6.1 二重积分的概念与性质……151
§6.2 二重积分的计算……153
§6.3 二重积分的应用……167
第七章 无穷级数……173
§7.1 数项级数的概念和性质……173
§7.2 正项级数的判敛法……175
§7.3 交错级数……178
§7.4 任意项级数……178
§7.5 函数项级数……179
§7.6 函数展开成幂级数……182
第八章 微分方程……186
§8.1 微分方程的基本概念……186
§8.2 可分离变量的一阶微分方程……189
§8.3 一阶线性微分方程……192
§8.4 可降阶的高阶微分方程……195
§8.5 二阶线性微分方程解的结构……196
§8.6 二阶常系数线性微分方程……198

第一章　函数、极限、连续

主要内容

1. 函数概念及函数的一些简单性质.

2. 数列极限和函数极限的概念及其性质、运算.

3. 函数的连续定义、函数间断点概念及闭区间上连续函数的性质.

复习重点

1. 函数概念、基本初等函数及其定义域、图像和简单性质. 会求初等函数的定义域.

2. 掌握求极限方法及极限存在的主要条件. 特别注意分段函数的分界点的极限求法及对分界点的连续性的研究.

§1.1　函数

一、函数概念

定义　设有两个非空实数集 D, W, 如果对于数集 D 中的每一个数 x, 按照确定的规则 f 对应着数集 W 中唯一的一个数 y, 则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

D 称为函数的定义域, 与 D 中的实数 x 对应的实数 y 记作 $y = f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$, 集合 $W_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域. 显然 $W_f \subseteq W$.

习惯上, x 称为自变量, y 称为因变量. 注意规则 f 是函数, 而 $f(x)$ 是函数值, 但总是通过函数值 $f(x)$ 研究函数. 为了方便, 以后也把 $f(x)$ 称作 x 的函数, 或 y 是 x 的函数.

例 1　设函数 $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, 求 $f(0), f(t^2), [f(t)]^2, f\left(\frac{1}{t}\right), \frac{1}{f(t)}$.

解　$f(0) = 0^4 + 0^2 + 1 = 1$

$$f(t^2) = (t^2)^4 + (t^2)^2 + 1 = t^8 + t^4 + 1$$

$$[f(t)]^2 = (t^4 + t^2 + 1)^2$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^4 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1 = \frac{1 + t^2 + t^4}{t^4}$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}$$

例 2　求函数 $f(x) = \sqrt{\sin x} + \lg(16 - x^2)$ 的定义域.

解　这个函数是两项之和, 所以当且仅当每项都有定义时, 函数才有定义. 第一项的定义域是 $2n\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi + \pi \quad n = 0, \pm 1, \cdots$, 第二项的定义域是 $16 - x^2 > 0$, 即 $-4 < x < 4$, 所以, $f(x)$ 的定义域是两者的公共部分.

即　$-4 < x < -\pi$ 及 $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

对应规则 f 和定义域 D 是函数定义中的两个要素. 这两个要素完全确定, 就确定了函数关系. 对应规则 f 的表示法很多, 它可用一个数学分析式子或几个数学分析式子表示, 也可用

一个图形或一张表格表示，甚至可用语言来表达.

下面举几个函数的例子.

例 3 “y 是不超过 x 的最大整数”这句话确定了 y 是 x 的函数. 通常记为 $y=[x]$，如：$y=[3.7]=3$；$y=[-2.1]=-3$ 等. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域：$W=Z$（整数集）. 它的图形如图 1.1，这图形称为阶梯曲线，这函数称为取整函数.

例 4 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, 当\ x\geqslant 0\ 时 \\ -x, 当\ x<0\ 时 \end{cases}$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.2.

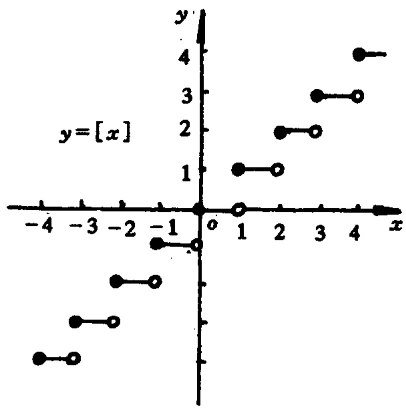


图 1.1

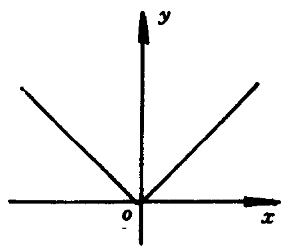


图 1.2

例5 如图 1.3 所示的图形，在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN，试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 位于 $[0,1]$ 内时，即 $x\in[0,1]$ 时，$S=\dfrac{1}{2}x^2$.

当直线 MN 位于区间 $[1,2]$ 内时，即 $x\in[1,2]$ 时，$S=\triangle OBC$ 的面积 + 矩形 $BCEF$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}+(x-1)=x-\dfrac{1}{2}$.

所以面积 S 为

$$S=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & 当\ x\in[0,1]时, \\ x-\dfrac{1}{2}, & 当\ x\in(1,2]时. \end{cases}$$

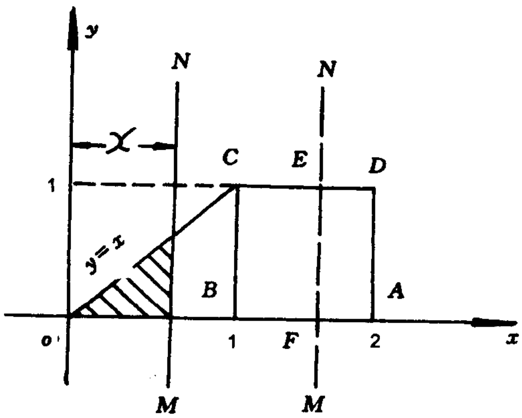


图 1.3

从例 4、例 5 看出，有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应规则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例 6 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x^2+2 & x<0 \end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(x-1)$.

解 $f(-1)=(x^2+2)|_{x=-1}=(-1)^2+2=3$

$f(0)=0$

$f(1)=(x+1)|_{x=1}=1+1=2$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+1 & x-1>0\\ 0 & x-1=0\\ (x-1)^2+2 & x-1<0\end{cases}$$

即 $$f(x-1)=\begin{cases}x & x>1\\ 0 & x=1\\ x^2-2x+3 & x<1\end{cases}$$

二、函数的简单性质

1. 有界性

如果对于变量 x 所考虑的范围内(用 I 表示,$I\subset D$),存在一个正数 M,使在 I 上的函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界,或称 $f(x)$ 在 I 上是有界函数. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上无界,或称 $f(x)$ 在 I 上是无界函数.

例如:函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对任何的 x 值,都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

在判别函数有界性时,有可能出现以下情况:函数在其定义域上的某一部分是有界的,而在另一部分是无界的,因此,谈论一个函数是有界的或无界的,必须指出其相应的范围. 如函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的,而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,因而笼统说函数 $y=\tan x$ 是有界函数或无界函数都是不确切的.

2. 单调性

如果对于变量 x 所考虑的区间 $I(I\subset D$,D 是定义域)内,任取两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的或单调减少的(见图 1.4、图 1.5),单调增加与单调减少统称为单调.

注:函数的单调性的研究主要是用单调性的定义,这在中学已学过. 高等数学中对于可导函数,将用其导函数的性质来研究函数的单调增减性. 在后面的章节将给出函数单调性判别法.

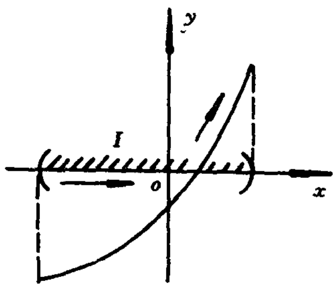


图 1.4 单调增加函数图形

(沿横轴正向上升曲线)

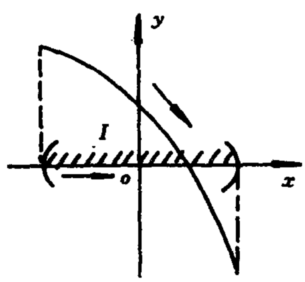


图 1.5 单调减少函数图形

(沿横轴正向下降曲线)

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是对称于原点的，如果对于任何 $x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是偶函数；如果有 $f(x)=-f(-x)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是奇函数.

奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称（如图 1.6、图 1.7 所示）.

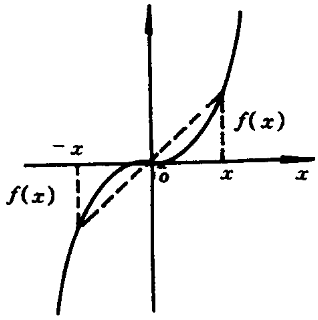


图 1.6　奇函数

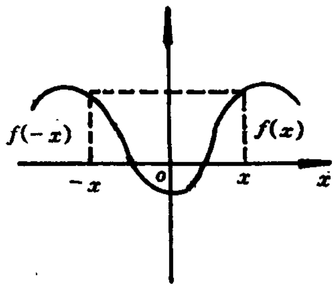


图 1.7　偶函数

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D，如果存在正常数 T，对于任何 $x\in D$，且 $x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称为周期. 满足上式的最小正常数 T 称为基本周期或简称周期.

例如：$y=\sin x$，$2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ 都是它的周期，但 2π 是基本周期，通常就说 $y=\sin x$ 的周期是 2π.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

三、基本初等函数及其性质和图形

1. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$（μ 为任意实数）称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定，但是不论 μ 取什么实数值，当 $x>0$ 时，它总有定义.

当 $\mu>0$ 时，讨论 $x\geqslant 0$ 情形，所有图形都过点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$；

在 $0<\mu<1$ 的情形下图形向上凸起，在 $\mu>1$ 的情形下，图形向下凸起；

当 $\mu<0$ 时，讨论 $x>0$ 的情形，所有图形都通过点 $(1,1)$，且当图形上的点远离原点时，图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近（如图 1.8 所示）.

2. 指数函数

函数 $y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$）称为指数函数. 它的定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,+\infty)$.

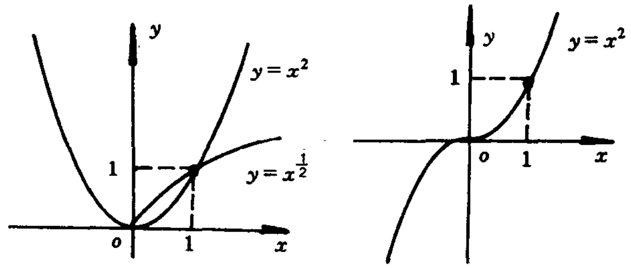
当 $a>1$ 时，函数是单调增加的，其图形过 $(0,1)$ 点且向左逐渐与 x 轴靠近；当 $0<a<1$ 时，函数是单调减少的，其图形过 $(0,1)$ 点向右逐渐与 x 轴靠近（如图 1.9 所示）.

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x$（$a>0, a\neq 1$）称为对数函数. 它的定义域为 $(0,+\infty)$，所以函数图形位于 y 轴右方，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是单调增加的，在开区间 $(0,1)$ 内函数值为负，图形在 x 轴的下方；在区间 $(1,+\infty)$ 内函数值为正，图形在 x 轴上方. 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是单调减少的，在开区间 $(0,1)$ 内函数值为正，图形在 x 轴的上方；在区间 $(1,+\infty)$ 内函数值为负，图形在 x 轴下方.

$y=x^{\mu}\quad(\mu>0)$



$y=x^{\mu}\quad(\mu<0)$

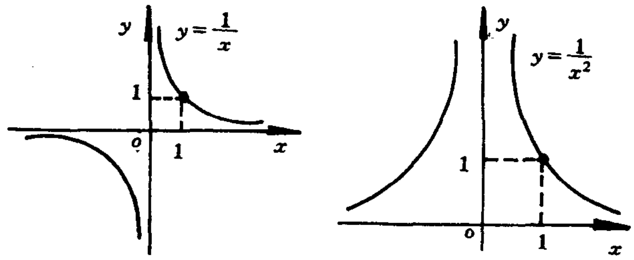


图 1.8

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数,其图形关于直线 $y=x$ 对称(如图 1.10). $a=\mathrm{e}$ 时,得自然对数 $y=\ln x$.

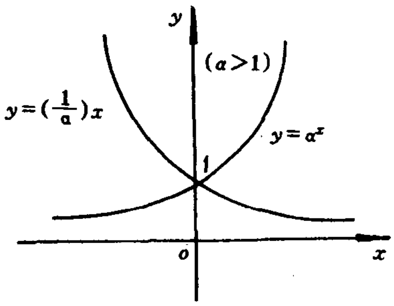


图 1.9

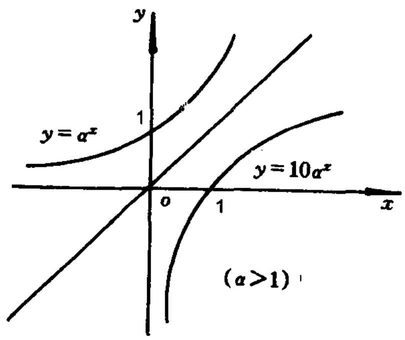


图 1.10

4. 三角函数

常用的有:

正弦函数 $y=\sin x$ (图 1.11)

余弦函数 $y=\cos x$ (图 1.12)

正切函数 $y=\tan x$ (图 1.13)

余切函数 $y=\cot x$ (图 1.14)

其中自变量以弧度作单位来表示.

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数. 它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,值域都是$[-1,1]$. 正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数. 由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,所以把正弦曲

线 $y=\sin x$ 沿 x 轴向左移动一段距离$\frac{\pi}{2}$，就获得余弦曲线 $y=\cos x$.

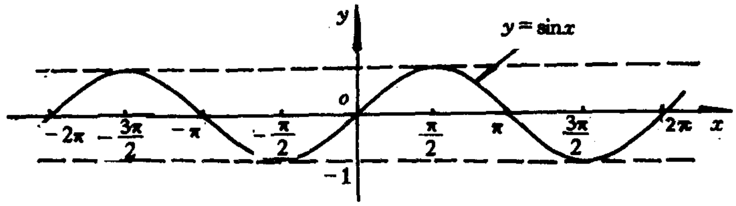


图 1.11

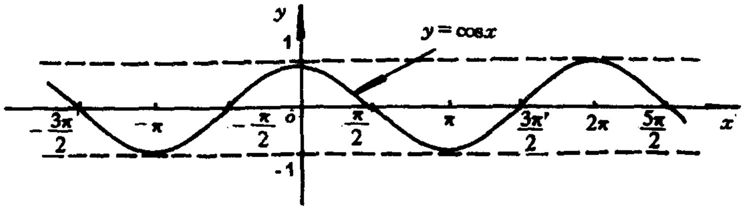


图 1.12

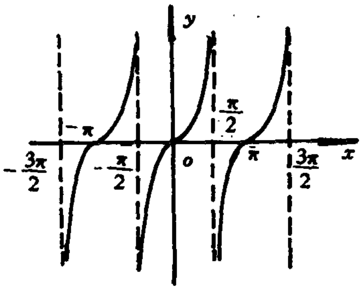


图 1.13

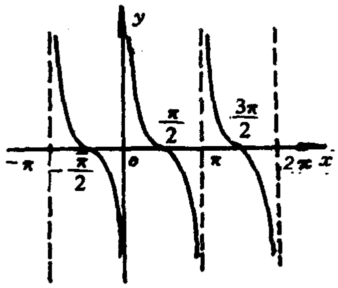


图 1.14

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 余弦函数 $y=\cot x$ 的定义域为$(k\pi-\pi, k\pi)$,$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 这两个函数的值域都是$(-\infty, +\infty)$，它们都是以 π 为周期的周期函数，且都为奇函数.

还有两个三角函数，分别是正割函数 $y=\sec x$，它是余弦函数的倒数，即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$；余割函数 $y=\csc x$，它是正弦函数的倒数，即 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 由于三角函数在它们的定义域内不是单调的，所以它们的反函数都是多值函数. 为避免多值性，通常限制它的值域，使其成为单值的，这样的单值分支仍称为反三角函数.

正弦函数和余弦函数的反函数分别为

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域$[-1,1]$ 值域$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域$[-1,1]$ 值域$[0,\pi]$

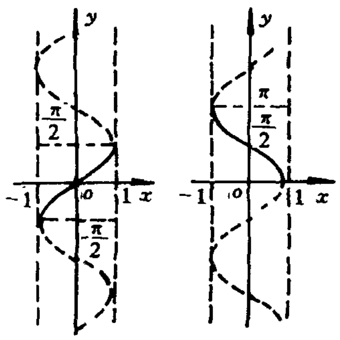
反正弦函数是单调增函数，是奇函数；反余弦函数是单调减函数(图 1.15).

正切函数和余切函数的反函数分别为

反正切函数　$y=\arctan x$　定义域$(-\infty,+\infty)$　值域$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

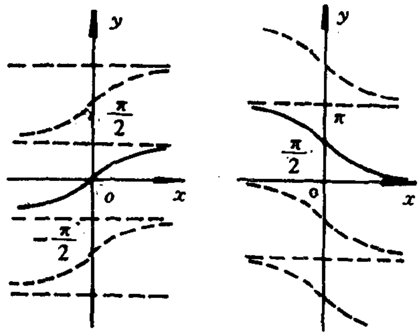
反余切函数　$y=\text{arccot}\,x$　定义域$(-\infty,+\infty)$　值域$(0,\pi)$.

反正切函数是单调增函数，且是奇函数；反余切函数是单调减函数(图 1.16).



$y=\arcsin x$　$y=\arccos x$

图 1.15



$y=\arctan x$　$y=\text{arccot}\,x$

图 1.16

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，它们是最常用、最基本的函数，必须对它们的定义域、性质、图形熟练掌握.

四、复合函数与初等函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2，如果对 D_2 的某一子集 D_2^* 中的任一 x，相应的 u 值能使 y 有确定的值，则称 y 通过 u 是 x 的复合函数，u 称为中间变量，记为

$$y=f[\varphi(x)]\qquad x\in D_2^*$$

例如：$y=\log_a u$，定义域 $D_1=(0,+\infty)$；$u=\sin x$，定义域 $D_2=(-\infty,+\infty)$.

复合函数 $y=\log_a\sin x$，定义域 $D_2^*=(2n\pi,2n\pi+\pi)$，n 为整数.

复合函数也可由更多个函数复合而成. 例如 $y=\sqrt{1+u^2}$，$u=\ln v$，$v=\sin x$，这三个函数的复合函数为 $y=\sqrt{1+(\ln v)^2}=\sqrt{1+(\ln\sin x)^2}$. u，v 都是中间变量.

我们不仅要会把几个函数复合成一个函数，更重要的是会将一个复合函数分解为若干个简单函数. 所谓简单函数是指基本初等函数或常数与基本初等函数经过有限次四则运算后得到的函数.

例 7　$y=a^{\sin x}$是由哪些函数复合而成的?

解　令 $u=\sin x$，则 $y=a^u$，$u=\sin x$.

所以，$y=a^{\sin x}$是由 $y=a^u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.

例 8　$y=\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}+6\right)}$是由哪些函数复合而成的?

解　令 $u=\tan\left(\frac{x}{2}+6\right)$，$v=\frac{x}{2}+6$，则 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}+6$.

所以，$y=\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}+6\right)}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}+6$ 复合而成的.

必须注意：并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=$

$2+x^2$就不能复合成一个函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于2),都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

2. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.例如 $y=x^4+4x^2+1$, $y=x\tan x$, $y=\dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{\tan^2 x+2}}$等都是初等函数.

高等数学中遇到的函数,绝大多数是初等函数.分段函数一般不是初等函数.

五、综合举例

1. 求函数的定义域

即求使运算有意义的实自变量值的集合.

几条原则:

(1)无理函数中遇到偶次方根时,定义域是被开方式为非负数的实数集合;

(2)在分式函数中,要除去使分母为0的那些 x 值;

(3)在对数函数中,要除去使真数部分小于或等于0的那些 x 值;

(4)如果所给定函数为基本初等函数经过四则运算后而得到的,则定义域为各个基本初等函数的定义域的交集(商式要除去分母为0的点).

例9 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$ (2)$y=\sqrt{\cos 8x-1}+\arcsin\dfrac{3x-1}{8}$ (3)$y=\ln[\cos(\ln x)]$

解

(1)此函数可看作是函数$\sqrt{2x-x^2}$与函数$\dfrac{1}{\lg(2x-1)}$的乘积.它的定义域是这两个函数的定义域的交集.函数$\sqrt{2x-x^2}$的定义域为 $2x-x^2\geqslant 0$,即 $0\leqslant x\leqslant 2$,函数$\dfrac{1}{\lg(2x-1)}$的定义域 $2x-1>0$ 且 $\lg(2x-1)\neq 0$,即 $x>\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 1$.故函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

(2)此函数是函数$\sqrt{\cos 8x-1}$与函数 $\arcsin\dfrac{3x-1}{8}$的和.它的定义域是这两个函数的定义域的交集.对于函数$\sqrt{\cos 8x-1}$,由 $\cos 8x-1\geqslant 0$ 得 $\cos 8x\geqslant 1$,即 $\cos 8x=1$, $8x=2k\pi$, $x=\dfrac{k\pi}{4}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.对于函数 $\arcsin\dfrac{3x-1}{8}$,由 $\left|\dfrac{3x-1}{8}\right|\leqslant 1$ 得 $-\dfrac{7}{3}\leqslant x\leqslant 3$.故函数 $y=\sqrt{\cos 8x-1}+\arcsin\dfrac{3x-1}{8}$的定义域为 $x=\dfrac{k\pi}{4}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,3)$(注:此定义域为孤立点集合,共6个点).

(3)此函数为复合函数 $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=\ln x$.

求使 $u>0$ 的 v 的集合,再求以此集合为值域的 x 的集合.$u>0$,即 $\cos v>0$,也即 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<v<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\ln x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,故 $e^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

所以,函数 $y=\ln[\cos(\ln x)]$的定义域为$(e^{2k\pi-\frac{\pi}{2}},e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}})$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

例10 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$;(2)$f(\sin x)$;(3)$f(a+x)(a>0)$的定义

域各是什么?

解 依题意有 $0\leqslant x\leqslant 1$.

(1)$0\leqslant x^2\leqslant 1$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$.

(2)$0\leqslant \sin x\leqslant 1$,即 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,故 $f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(3)$0\leqslant x+a\leqslant 1$,即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,故 $f(x+a)$的定义域为$[-a,1-a]$.

2.求函数的表达式

(1)已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求函数 $f[g(x)]$的表达式.

解决此类问题可用代入法.即把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量.

例 11 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f\{f[f(x)]\}$;$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解 $$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}\qquad(x\neq 0)$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\left[\frac{x-1}{x}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{x}\qquad(x\neq 0)$$

例 12 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$,$g(x)=1-x$,求 $f[g(x)]$,$f[f(x)]$,$g[f(x)]$及 $g[g(x)]$的表达式,并指出它们的定义域.

解 $$f[g(x)]=\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x}\qquad(x\neq 2)$$

$$f[f(x)]=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x\qquad(x\neq -1)$$

$$g[f(x)]=1-f(x)=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}\qquad(x\neq -1)$$

$$g[g(x)]=1-g(x)=1-(1-x)=x$$

例 13 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leqslant 0\\ x^2+\ln x & x>0\end{cases}$,求 $f(1-x)$,$f(x-1)$.

解 $$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x) & 1-x\leqslant 0\\ (1-x)^2+\ln(1-x) & 1-x>0\end{cases}$$

即 $$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x) & x\geqslant 1\\ (1-x)^2+\ln(1-x) & x<1\end{cases}$$

类似的

$$f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1) & x\leqslant 1\\ (x-1)^2+\ln(x-1) & x>1\end{cases}$$

注:这类题目易出错的地方是把 $f(x)$中 x 用$(1-x)$代替,而忽视了相应的定义域中的 x 也应同时用$(1-x)$代替.

(2)由给定关系式,求解 $f(x)$的表达式.

函数具有的特性:函数表示法与用什么字母来表示自变量无关.