

结构力学补充教材

JIEGOU LIXUE BUCHONG JIAOCAI

(第一种)

南京工学院等校編

人民教育出版社



结构力学补充教材

JIEGOU LIXUE BUCHONG JIAOCAI

(第一种)

南京工学院等校編

人民教育出版社

这本册子是在 1961 年 4 月間由南京工学院、清华大学、同济大学、华东水利学院、天津大学、唐山铁道学院、湖南大学等校“结构力学”教研组的有关教师选編的。作为金宝楨、楊式德、朱宝华合編的结构力学、湖南大学工程力学教研组編写的结构力学，及楊繼乾編的结构力学三书的补充内容，称为结构力学第一种补充教材。其内容包括有悬索的内力分析及其在建筑结构与桥梁结构中的应用；用力法及弯矩分配法計算空間剛架的概念，交叉梁系的計算，圓弧梁的計算；用电模拟計算超靜定結構。此外，尚有基础梁部分另編写为一册出版，作为结构力学的第二种补充教材。

本书除作高等工业学校“结构力学”課程的补充教材外，并可供有关工程技术人员参考。

结构力学补充教材(第一种)

南京工学院等校編

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印裝

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 K15910·1009 开本 850×1168 $1/32$ 印张 $2^{2}/_{16}$

字数 56,000 印数 3,501—5,000 定价 (7) ¥0.32

1961 年 6 月第 1 版 1962 年 4 月第 2 版 1962 年 4 月北京第 3 次印刷

目 录

悬索的内力分析及其在结构中的应用

§ 1. 概論	1
§ 2. 悬索的内力計算	3
§ 3. 支座位移及温度变化的影响	16
§ 4. 有預应力悬索内力的計算	17
§ 5. 悬索結構在屋盖上的应用	19
§ 6. 悬索在桥梁上的应用	30
主要参考书目	38

空間剛架的計算

§ 1. 概論	39
§ 2. 交叉梁系的計算	43
§ 3. 圓弧梁的計算	49
§ 4. 用弯矩分配法計算各杆正交的超靜定空間剛架	57
主要参考书目	62

用电模拟法計算超靜定結構

§ 1. 概論	63
§ 2. 电模拟法的基本原理	64
§ 3. 用电模拟法解連續梁及无側移超靜定剛架	69
§ 4. 用电模拟法解有側移超靜定剛架	73
主要参考书目	76

悬索的内力分析及其在结构中的应用

§ 1. 概論

除了梁、柱的刚性杆件以外，悬索也是结构中承重杆件之一。由于它所具有的柔性——不承受弯矩及压力，它主要是用来承受拉力。正因为它只受拉力，索的材料得以充分利用，没有丧失稳定的危险，所以这样的承重杆件便可达到用料最少的目的。这是悬索所具有的最大优点。由于用料少，自重就大大减轻；若悬索还用高强度的合金钢所制成，承受的荷载更可大大增加，或在不增加荷载集度的情况下，可使房屋建筑中的中间支承减少，便于在生产中利用广阔的空间，或在桥梁建筑中跨越巨大的河流而节省桥墩的建造。这是悬索的使用对工程建设上起节约作用的优点之二。再因悬索本身很轻，就便于施工，从而使工程建设的进度快。这是悬索在工程上所起良好作用的优点之三。总之，使用悬索作为工程上的承重杆件是符合多快好省要求的。

悬索的应用在世界上以我国为最早，象泸定桥用铁索作为承重的杆件，该桥建于1696年。1896年俄国工程师(Ильин)首先在展览馆结构中使用了悬索。此后，世界各国相继在大跨度的房屋建筑及桥梁建筑中使用悬索。解放以来我国的生产力大大发展。反映在冶金工业方面，已能生产高强度的合金钢，为悬索的使用创造了有利的条件。新建筑材料的产生促使我国建筑工程的面貌大为改观。在大跃进形势的鼓舞下，目前已建成直径为93.5米的圆形悬索屋盖北京工人体育馆。预料不久的将来，我国西南部及西北部的飞速发展会推动桥梁建筑上采用大量的悬吊桥梁。此外，在输电线路、在缆索起重机和架空索道上以及无线电塔桅杆

上都将广泛应用悬索。

下面所举的是几种在房屋建筑及桥梁建筑上使用悬索的计算简图。图1及图2示单曲悬索屋盖由一系列悬挂在两个支座上的简单悬索所组成，可以是单跨的也可以是多跨的。图3示一种在两个方向的曲率符号相同的双曲悬索屋盖。图4示一种在两个方

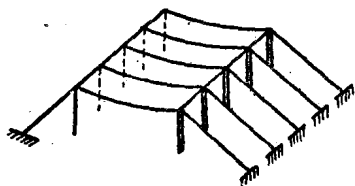


图 1.

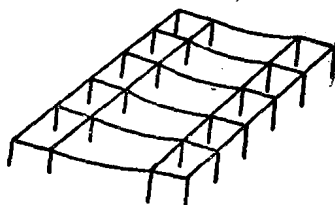


图 2.

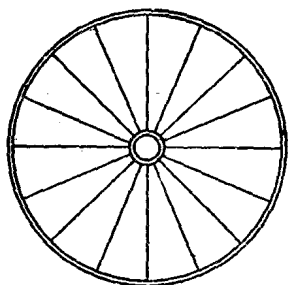


图 3.

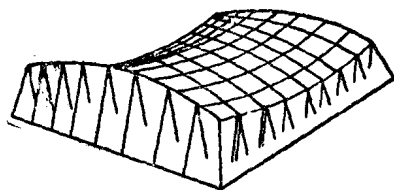


图 4.

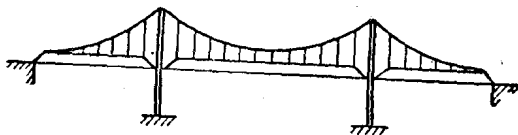


图 5.

向曲率符号相反的双曲鞍形屋盖。图 5 示一种二铰式加劲悬吊桥的简图。

§ 2. 悬索的内力计算

悬索是一种变化体系。由于悬索具有柔性性质，它的形状和尺寸随着荷载的性质不同而改变，因而悬索本身内力的计算与以前所谈的不变体系的内力计算是有所区别的。

我们知道，变化体系是不遵守力的迭加原理的，荷载与变形之间的关系是非线性的。这样就使得悬索的内力计算大为复杂化。为了简化起见，分析悬索内力时采用下面两个基本假定：

- 一、悬索是绝对柔性的，即任一断面均不能承受弯矩；
- 二、悬索的材料服从虎克定律。

分析悬索的内力有近似法和精确法两种，现在分别来论述。

(一) 近似法

在近似法中，假定悬索是不可伸长的，即不考虑悬索的弹性变形，并且假定荷载沿跨度方向分布，实际上是沿索的弧长方向分布的。

图 6, a 中所示是一支座不位于同一水平面上在任意竖向荷载作用下的悬索 AB，图 6, b 中所示表示同一悬索的示力图。支座 A 及 B 的反力可分解成两个分力 A_1 和 H'_A ， B_1 和 H'_B ，反力 H'_A 和 H'_B 作用于支座 A、B 两点的连线方向。

$$\text{由 } \Sigma X = 0 \text{ 可得: } H'_A = H'_B = H. \quad (1)$$

由 $\Sigma M_A = 0$ 及 $\Sigma M_B = 0$ 可得：

$$-B_1 l + \Sigma M_{PA} = 0;$$

$$A_1 l - \Sigma M_{PB} = 0,$$

或

$$A_1 = \frac{\Sigma M_{PB}}{l} \text{ 及 } B_1 = \frac{\Sigma M_{PA}}{l}.$$

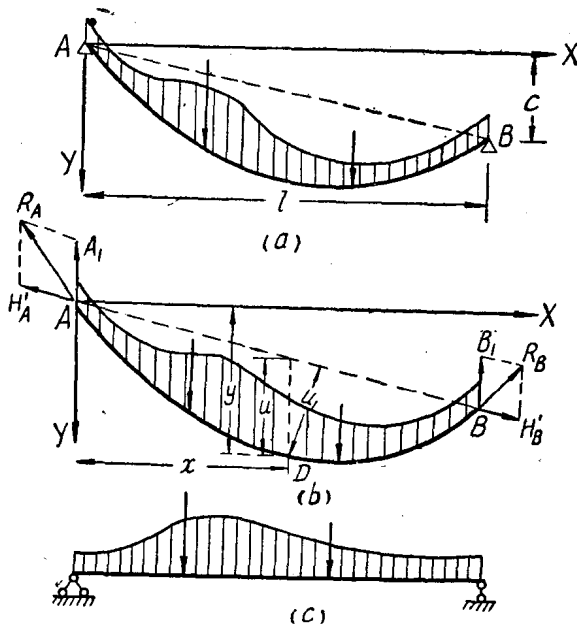


图 6.

由此可見，求支座反力 A_1 和 B_1 的方法和求荷載情况与悬索相同的簡支梁的反力相同。

現在我們取 D 点以左部分为截离体，由該部分所有力对 D 点取力矩成立

$$\Sigma M_D = A_1 x + M_{Ax} - H'_A u_1 = 0,$$

或

$$u_1 = \frac{A_1 x + M_{Ax}}{H'_A},$$

式中 $A_1 x + M_{Ax}$ 就是簡支梁相应截面內的弯矩 M ，因而可写成：

$$u_1 = \frac{M}{H'_A}, \quad (2)$$

其中 u_1 是悬索上的 D 点至直綫 AB 的垂直距离。它可以用豎标

距 u 来表示, 即

$$u_1 = u \cos \alpha, \quad (3)$$

式中 α 是直线 AB 与水平线之间的夹角。将式(2)和(3)加以比较后, 可得出:

$$u = \frac{M}{H'_A \cos \alpha}.$$

由于 $H'_A \cos \alpha$ 就是支座反力 R_A (或 R_B) 的水平分力。如果以 H 表示此水平分力, 则得:

$$u = \frac{M}{H}. \quad (4)$$

这时自水平轴算起的悬索的竖标距为

$$y = u + x \tan \alpha = u + c \frac{x}{l} = \frac{M}{H} + c \frac{x}{l}, \quad (5)$$

由此得到:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} + \frac{c}{l}, \quad (6)$$

而悬索的长度等于

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

如果 $c \ll l$, 则 $\frac{dy}{dx}$ 和 1 相比也是小的, 故有

$$\begin{aligned} L &\approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{Q}{H} + \frac{c}{l}\right)^2 dx = \\ &= l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{c}{Hl} \int_0^l Q dx + \frac{c^2}{2l^2} \int_0^l dx. \end{aligned}$$

注意到 $\frac{c}{l} = \tan \alpha$; 积分 $\int_0^l Q dx$ 就是简支梁剪力图的面积, 在任意竖

向荷载作用下此面积均等于零，由此得到悬索长度的计算公式如下：

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{\tan^2 \alpha}{2} l. \quad (7)$$

当 α 角约在 $15^\circ \sim 20^\circ$ 内时，利用上式计算悬索的长度，能得到可靠的结果。如 α 角较大，则误差就很大。

当支座 A 和 B 在同一水平线上时，即 $\alpha = 0$ ，这时公式(7)改写成：

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx. \quad (8)$$

如果利用分部积分可得到下列关系式：

$$\begin{aligned} \int_0^l q M dx &= - \int_0^l \frac{dQ}{dx} M dx = - [QM]_0^l + \int_0^l Q \frac{dM}{dx} dx = \\ &= \int_0^l Q^2 dx. \end{aligned}$$

M 是指和悬索跨度相同的简支梁弯矩，在两端处弯矩为零。

图 7 所示为支座位于不同水平上。先给出跨中垂度 f ，当悬索受均布荷载作用时，求悬索各截面的内力，悬索的外形和长度。

从公式(5)可得：

$$H = \frac{M}{y - c \frac{x}{l}}. \quad (9)$$

以简支梁中点的弯矩 $M = \frac{1}{8}ql^2$ ，悬索中点到 x 轴的总标距 $y = f + \frac{c}{2}$ 及 $x = \frac{l}{2}$ 代入上式，即得

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (10)$$

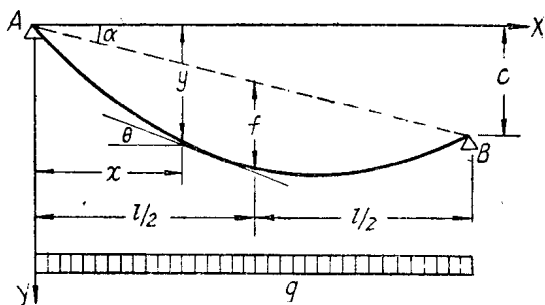


图 7.

必须指出：其中 q 不是指悬索单位长度上的重量 q_1 而是指水平方向单位长度上的重量值。即 $q = \frac{q_1}{\cos \alpha}$ 。悬索的挠曲线方程为 $y =$

$= \frac{M}{H} + \frac{cx}{l}$ ，将 $H = \frac{ql^2}{8f}$ 及 $M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$ 代入上式，便可得出：

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + x \tan \alpha. \quad (11)$$

悬索的倾斜率：

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} - 8f \frac{x}{l^2} + \frac{c}{l}. \quad (12)$$

当 $x=0$ 时, $\tan \theta_A = \frac{4f}{l} + \frac{c}{l}; \quad (13)$

当 $x=l$ 时, $\tan \theta_B = -\frac{4f}{l} + \frac{c}{l}. \quad (14)$

由此可见，当 $4f=c$ 时，则 B 端切线是水平的，如 $4f>c$ ，则 B 端的切线方向是负的，其倾斜情况如图 8, a 所示。如 $4f<c$ ，则悬索在支座 B 上的切线方向如图 8, b 所示。

悬索任意截面中的内力 S 和沿水平轴的分力 H (即张力) 有下列关系：

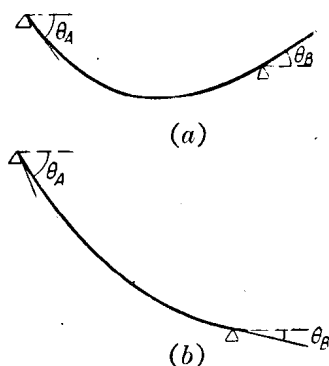


图 8.

$$S = \frac{H}{\cos \theta} = H \sqrt{1 + \tan^2 \theta}. \quad (15)$$

将公式(12)代入上式后,便得到:

$$S = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} - \frac{64f^2x}{l^3} + \frac{64f^2x^2}{l^4} - \frac{16fcx}{l^3} + \frac{c^2}{l^2} + \frac{8fc}{l^2}}. \quad (16)$$

在支标高差 c 较小的小垂度悬索中, 标高差对于最大内力的影响是很小的。例如当 $x=0$, $\frac{f}{l} = \frac{1}{20}$ 和 $\frac{c}{l} = 0$ 时, 可得到 $S_{\max} = 1.02H$, 而 $\frac{c}{l} = 0.1$ 时, $S_{\max} = 1.045H$, 误差只有 2.5%。

A, B 支座不在同一水平面上时, 需确定支座反力的竖向分力, 张力 H 是支座反力的水平投影。支座反力在直线 AB 方向的分量 (图 7) 等于 $H' = \frac{H}{\cos \alpha}$, 而其竖向分力等于

$$V = H' \sin \alpha = H \tan \alpha = \frac{qlc}{8f}. \quad (17)$$

悬索支座反力的竖向分力由二部分组成。第一部分等于简支梁的支座反力 $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$, 第二部分等于上面求得的 V 值。同

时, 根据图 7 中所示, 对于左支座二者的符号相同, 对于右支座则符号相反:

$$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{qlc}{8f} = \frac{ql}{2} \left(1 + \frac{c}{4f} \right); \quad (18)$$

$$V_B = \frac{ql}{2} \left(1 - \frac{c}{4f} \right). \quad (19)$$

如果 $\frac{c}{4f} > 1$, 则 V_B 是负的 (图 8, b), 即作用方向朝下。

悬索的长度由公式 (7) 确定, 在此公式中 $Q = \frac{ql}{2} - qx$, 因此

$$\begin{aligned} L &= l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} - qx \right)^2 dx + \frac{\tan^2 \alpha}{2} l = \\ &= l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{l}{2} \tan^2 \alpha = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} + \frac{l}{2} \tan^2 \alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

应该注意, 只有 α 角较小时 ($15^\circ \sim 20^\circ$ 内时) 上式方能给出比较可靠的解答。

如果支座标高差 $c=0$ 时, 公式 (16) 改写成:

$$S = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left(1 - 2\frac{x}{l} \right)^2}. \quad (21)$$

显然, 最大内力产生在 $x=0$ 和 $x=l$ 处, 即

$$S_{\max} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16\frac{f^2}{l^2}} = H \sqrt{1 + 16\frac{f^2}{l^2}}.$$

在小垂度的情形, $S_{\max}$ 与 H 的差别是很小的, 例如, 当 $f=0.1$ 时, 可得 $S_{\max}=1.078H$ 。最大内力与张力只差 7.8%。因此在计算小垂度悬索时常可认为 $S_{\max} \approx H$ 。

$$\text{悬索长度:} \quad L = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \quad (22)$$

悬索的曲线方程:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (23)$$

悬索的張力:
$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad (24)$$

悬索通常必須假定在自重作用的条件下进行計算。悬索的跨度及垂度是已知的。需要求悬索受一定附加荷載时产生的内力及变形。

由于悬索在自重作用下产生一种几何形状，而受附加荷載作用时則产生另一种几何形状。由此可見悬索計算的特点是：必須在每一新的負載下确定悬索新的几何形状。解决支座位于同一水平上仅受自重作用的悬索长度，曲綫形状及張力等，可由公式(22)，(23)及(24)等求得。悬索受附加荷載后，它的曲綫方程为：

$$y_1 = \frac{M}{H_1},$$

M 为与悬索跨度相同的簡支梁弯矩，其大小是不难确定的。但是 H_1 的大小是未知的，因此，也就不可能确定 y_1 的大小。另一方面，根据体系的平衡条件，同样也不能确定悬索的張力 H_1 ，因为悬索任何一点的豎标距都是未知的。

为了解决上述問題，就必须引用悬索的变形条件。在这方面，悬索的計算在一定程度上与超靜定体系的計算相似。不同之处在于：在超靜定体系中必須考查彈性变形，而在这里必須要考查悬索几何形状的变化；其次在超靜定体系計算中必須利用某些点变位等于零的条件，而在悬索計算中，則必須利用悬索长度变化等于零（假定悬索不可伸长）的条件。

利用悬索不可伸长的条件，即利用悬索变形之前的长度 L_0 和变形以后的长度 L_1 相等的条件可求出張力 H_1 。

設悬索在某一給定的初始荷載作用下張力 H_0 是已知的（此初始荷載沿全跨可能不是均布的），悬索的长度可由下式求得

$$L_0 = l + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx.$$

受到附加荷载以后, 则

$$L_1 = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx.$$

假定悬索是不可伸长的, 即 $L_1 = L_0$, 故

$$\frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx = \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx,$$

$$H_1 = H_0 \sqrt{\frac{\int_0^l Q_1^2 dx}{\int_0^l Q_0^2 dx}}. \quad (25)$$

如果初始荷载沿跨度全长均布, 这时 $H_0 = \frac{ql^2}{8f}$, $\int_0^l Q_0^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12}$,

代入公式(25)后可得

$$H_1 = \frac{\sqrt{3l}}{4f} \sqrt{\int_0^l Q_1^2 dx} = \frac{\sqrt{3l}}{4f} \sqrt{\int_0^l q M dx}. \quad (26)$$

(二) 考虑悬索伸长影响的近似法

在小垂度的情形, 悬索沿其全长的弹性变形可以认为是均匀的, 故由基本假设二可以得到:

$$\Delta L = \frac{\Delta H l}{EF} = \frac{(H_1 - H_0) l}{EF}.$$

根据 $L_0 = L_1 - \Delta L$ 得到:

$$l + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx + \frac{(H_1 - H_0) l}{EF} = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx.$$

經整理后得到

$$H_1^3 - (H_0 - \frac{EF}{2lH_0^2}) \int_0^l Q_0^2 dx H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_0^l Q_1^2 dx = 0. \quad (27)$$

对于悬索支座不在同一水平面上的情形，公式(25)及(27)仍适用。

积分 $\int_0^l Q^2 dx$ 可以利用图形相乘法来计算。設悬索受有几种荷载；則对于每种荷载均可給出相应的剪力图。若由于这些荷载在任一截面中所引起的剪力分別用 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 等来表示，則总的剪力将等于：

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

$$\begin{aligned} \text{这时} \int_0^l Q^2 dx &= \int_0^l Q_1^2 dx + \int_0^l Q_2^2 dx + \int_0^l Q_3^2 dx + 2 \int_0^l Q_1 Q_2 dx + 2 \int_0^l Q_2 Q_3 dx + \\ &+ 2 \int_0^l Q_1 Q_3 dx. \end{aligned}$$

对于承受更多种荷载的体系，則其剪力积分亦可仿此处理。

例如計算图 9 所示梁的积分 $\int_0^l Q^2 dx$ 可由下式求得：

$$\int_0^l Q^2 dx = \int_0^l Q_1^2 dx + \int_0^l Q_2^2 dx + 2 \int_0^l Q_1 Q_2 dx,$$

$$\text{式中: } \int_0^l Q_1^2 dx = 2 \times \frac{ql}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{ql}{2} = \frac{q^2 l^3}{12};$$

$$\int_0^l Q_2^2 dx = 2 \times \frac{pb}{l} \times a \times \frac{pb}{l} + \frac{2pa}{l} \times b \times \frac{2pa}{l} = 2 \frac{p^2 ab}{l}.$$

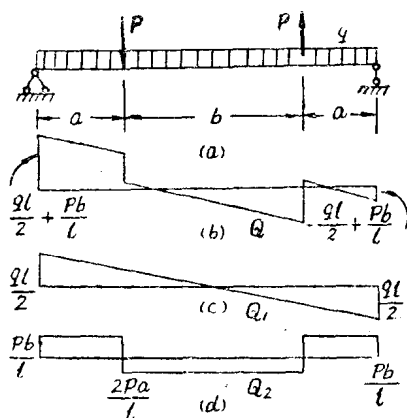


图 9.

由于剪力图 Q_1 是反对称的, 而 Q_2 是对称的, 故 $\int_0^l Q_1 Q_2 dx = 0$,

因而
$$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{2p^2 ab}{l}.$$

(三) 精确法

在上述近似法计算中, 假定悬索上的荷载是沿跨度方向分布的, 这对于小垂度的悬索按此算得的结果, 其误差并不很大; 但对于大垂度的悬索, 其结果的准确性就差了。在精确法计算中, 必须将悬索上的荷载看成是沿索长分布的。今取悬索上的某一元段 dL , 其所承受的荷载为 $q dL$ 。设悬索张力的水平分力为 H , 则由平衡条件 $\Sigma Y = 0$, 可得

$$H \tan(\theta + d\theta) - q dL - H \tan \theta = 0.$$

由于

$$y' = \tan \theta,$$

$$\tan(\theta + d\theta) = y' + dy',$$

故得

$$H(y' + dy') - H y' - q dL = 0; \quad (28)$$