吴宣志　刘光海　薛光琦　等

富里叶变换和位场谱分析方法及其应用

测绘出版社

富里叶变换和位场谱分析方法及其应用

吴宣志　刘光海　薛光琦　王原钧　白大明

测绘出版社

内 容 简 介

本书论述富里叶变换原理、地球物理位场谱分析方法及其应用。第一、二章用现代数学观点阐述了富里叶变换的理论。第三、四、五章讨论位场谱分析的一般理论，位场谱正演问题和反演方法。第六章结合实例介绍了该方法在地质调查和找矿勘探中的应用。

本书读者对象是从事地质、地球物理专业的科技人员及有关院校师生。本书对富里叶变换和谱分析方法的论述，可供其它专业科技人员参考。

富里叶变换和位场谱分析方法及其应用

吴宣志 刘光海 薛光琦 王原钧 白大明

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 787×1092 1/16· 印张 12 · 字数 264 千字

1987 年 9 月第一版 · 1987 年 9 月第一次印刷

印数 1—1800 册 · 定价 2.50 元

ISBN7-5030-0022-8/P · 10

统一书号：15039 · 新 640

前　言

谱分析方法自六十年代起广泛应用于位场资料分析工作，今天已经成为位场数据处理的主要方法。近年来位场谱分析方法又有较大发展。作者在承担重磁数据处理方法及其应用的研究工作中，在学习前人成果基础上也进行了一些理论研究，在二度体异常波谱与三度体异常波谱的关系，谱的解析表达式及异常正演问题，反演方法等方面获得一些新的结果；编制了相应的程序；同时与广东，辽宁，湖南，江苏，江西及上海市的同行们协作开展了应用研究，取得了较好地质效果，积累了一些经验。把同行们和我们自己的新成果加以总结是必要的。

我们在学习与研究过程中深切体会到要掌握二十多年来位场谱分析方法的众多成果并在理论上有所发展，必须对谱分析原理有一个透彻的认识，而富里叶变换的许多基本问题，只有从广义函数的角度才能讨论得比较清楚。编写一本较严格、系统地阐述位场谱分析原理的书，对学习者及研究者无疑都是有益的。

要做到这一点，就不可避免地要用到比较多的数学工具。为此，我们在开头安排了两章，简要地叙述了富里叶变换的基本理论。第一章中还引述了广义函数等数学概念。自然在选材上只能以满足后文需要为限。这些内容对一部分读者来说可能过于抽象，起点高了一些。但是我们自己的实践表明，只要反复体会，这些数学内容也是可以掌握的。考虑到泛函分析等现代数学向地球物理方法理论渗透的趋势，我们及早熟悉它们是完全必要的。

利用广义函数，特别是 δ 函数这一有力工具，许多问题的讨论就变得十分简明了，从而使我们有可能在不太长的篇幅里对谱分析的丰富内容作较全面的阐述。因此，本文除叙述作者的工作成果外，还引述了许多前人成果。并在引述（包括在引述富里叶变换的基本理论）时常常作了改述，使之更简明并力求全文前后连贯，有一个系统。书中列出的参考文献仅限于被直接引用者。经过改述的前人结果，不当之处由笔者负责，也就不一一列出文献依据。

全书分成六章，第一章到第四章由吴宣志执笔，第五章由吴宣志和薛光琦执笔，第六章由刘光海执笔。王原钧，白大明参加了方法实际应用工作。

本书可供高等学校地球物理专业研究生和高年级学生作为学习参考书，以及教学，生产，科研部门的工作同志工作参考之用。本书对富里叶变换和谱分析方法的论述，也可供其它专业科技工作者参考。

工作中得到前述各省市地矿局、物探队、地质队的热情支持与帮助。文中所举实例多取自我们与他们协作开展的研究工作成果，实测资料由他们提供。侯重初，熊光楚，蔡宗熹三位高级工程师和管志宁，申宁华，穆石敏，程方道，吴功建等几位教授对文稿提出了许多宝贵意见。书中插图由付子洁，张琪、顾玉民清绘。在此一并表示衷心感谢。

一九八七年一月

目　　录

第一章　富里叶变换的一般理论

§1　富里叶级数和富里叶积分

富里叶级数是将一个周期函数 f(x)（设周期为 2l）表示为具有相同周期的一切余弦和正弦函数的线性组合：

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1-1-1}$$

以上级数可以更简洁地写成复数形式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\pi x/l} \tag{1-1-2}$$

式中，$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$，$a_{-n}=a_n$，$b_{-n}=-b_n$，$b_0=0$●

由于余弦级数正弦级数有许多好的性质，因此将周期函数展成富里叶级数研究起来有许多方便之处。

例如，平面极坐标(r,θ)下拉普拉斯方程对θ以2π为周期的解可以写成$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(r)e^{in\theta}$，如果将它代入方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=0 \tag{1-1-3}$$

并假定可以逐项微分，则我们得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2C_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dC_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)e^{in\theta}=0$$

解得

$$C_n=A_n r^n+B_n r^{-n}$$

如果在圆 $r=\text{Const}$ 的边界条件已知，例如在 $r=a$ 上 $f=g(\theta)$，在 $r=b$ 上$\frac{\partial f}{\partial r}=h(\theta)$，则我们可以利用这些条件来确定 A_n 和 B_n，只要假定 $g(\theta)$和 $h(\theta)$能够表为富里叶级数，即

$$g(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n e^{in\theta}\quad,\qquad h(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n e^{in\theta}$$

于是有

● 由定义可知 C_{-k} 与 C_k 互为共轭，$C_{-k}=C_k^*$

$$A_n a^n + B_n a^{-n} = g_n \quad , \qquad nA_n b^{n-1} - nB_n b^{-n-1} = h_n$$

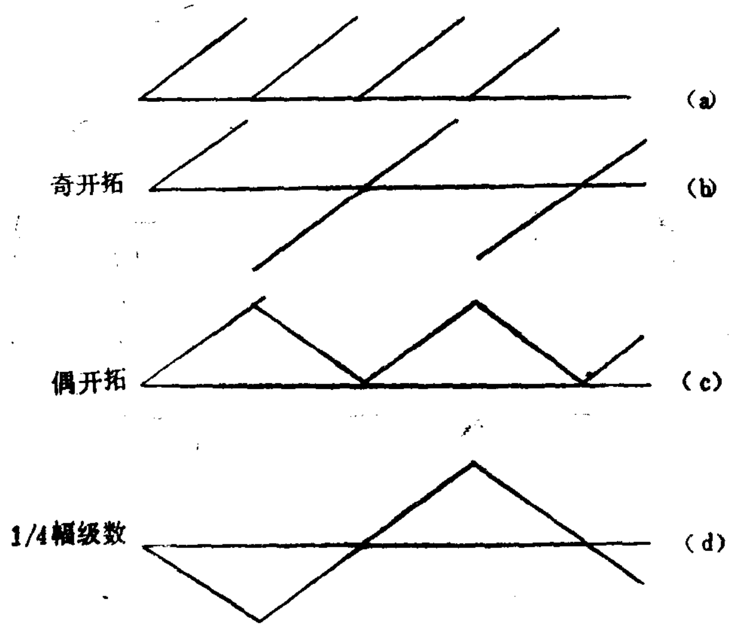

图 1-1

由此即可确定 A_n和 B_n，从而偏微分方程边值问题获解。

如果一个函数定义在一个有限区间[a, b]上，则虽然它可能是非周期的，也可以用富里叶级数来表示，办法是将它开拓为整个 x轴定义的周期函数(图1-1)，以b－a为周期(a)，或以 2(b－a)为周期(b, c)，或以 4(b－a)为周期(d)均可。

富里叶级数理论必须解决几个主要问题：

第一，在什么条件下象(1-1-1)或(1-1-2)这样的三角级数收敛？

第二，用函数 f(x)怎样表示 C_n？

第三，对富里叶级数可以逐项微分吗？富里叶系数是否为唯一的呢？

第二个问题好解决，由三角函数正交性，对基本函数族

$$\begin{cases} 1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \cdots \\ \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cdots \end{cases}$$

利用公式

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

可证明以下关系

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin nt \, dt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 2\pi & k=n=0\\ \pi & k=n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\sin nt\,dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 2\pi & k=n=0\\ \pi & k=n\neq 0\end{cases}$$

(1-1-1) 式两边乘以 $\sin\frac{n\pi x}{l}(n\neq 0)$，并从 $-l$ 到 l 积分

$$\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=b_n\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx$$

作变量代换 $y=\frac{\pi}{l}x$，等式右边为

$$b_n\frac{l}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 ny\,dy=b_n l$$

所以

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{1-1-4}$$

类似可以得

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \tag{1-1-5}$$

对复数形式（1-1-2），有

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx \tag{1-1-6}$$

但是由它们定义的 a_n，b_n，C_n 代入(1-1-1)，(1-1-2)式，所获三角级数是不是等于 $f(x)$? 这个问题以及问题三，都有了一些解答。例如当 $C_n=O(|n|^{-1-\varepsilon})$，当 $|n|\to\infty$，对于某些 $\varepsilon>0$ 成立，则三角级数（1-1-2）收敛。当 $f(x)$ 满足狄里希里条件时，$f(x)$ 可以表成三角级数，其系数可以用上述(1-1-4)，(1-1-5)式子定义。

狄里希里定理 若函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，且在每个周期里满足：(1)或者处处连续，或者有有限个第一类间断点；(2)具有有限个极大值或极小值。那么函数 $f(x)$ 可以展开为富里叶级数，且在“平均收敛”意义下：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}=\begin{cases}f(x) & \text{在 } f(x) \text{ 连续点处}\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] & \text{第一类间断点处}\end{cases} \tag{1-1-7}$$

$f(x+0)$，$f(x-0)$ 是 $f(x)$ 在间断点处的右极限和左极限。

但是以上条件过于苛刻，第三个问题也一直找不到令人满意的解答。

富里叶积分可以看作是富里叶级数在周期趋于无穷时的形式上的极限。

令 $h_1(x)$是以 $2l$ 为周期的函数，且

$$h_1(x)=h(x)\quad，当\quad x\in[-l,\ l]$$

又

$$h_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\pi x/l}g_1\left(\frac{n}{2l}\right)\frac{1}{2l}$$

其中

$$g_1(y)=\int_{-l}^{l}e^{-2\pi ixy}h(x)dx$$

将级数中的$\frac{n}{2l}$写成 y 并将 y 的各个相继值之间的差写成 dy，则得当$l\to\infty$时的一个形式上的极限

$$\left.\begin{aligned}h(x)&=\lim_{l\to\infty}h_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi ixy}g(y)dy^{●}\\ g(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi ixy}h(x)dx\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1\text{-}8)$$

如果（1-1-8）中右边的积分存在，称 g(y)为 h(x)的富里叶变换式，自然也可以认为 h(x)是g(−y)的富里叶变式。

常常把关系（1-1-8）简记作 $h(x)\longleftrightarrow g(y)$

（1-1-8）式不能无条件成立，在应用广义函数以前，对于一定的积分定义，有各种不同的使（1-1-8）式成立的条件，但都不够广。一些最常见的函数例如常数1，函数$|t|$，sin x等，其富里叶变式都不存在，从而大大限制了它的应用。因此下面我们将介绍广义函数理论并用它建立富里叶变换的一般理论。但是在此之前，我们先叙述一下谱的概念及空间波的有关概念。

富里叶级数中系数 C_n——富里叶系数表示函数 f(x)包含着不同频率的正弦波的振幅和初相位，人们称之为 f(x)的谱。而富里叶变换式也有类似意义，也称为 f(x)的谱。

通常人们把函数 h(x)称为时间域函数，自变量改换为 t，而把 g(y)看作为频率的函数，自变量也就改换为 f，富里叶变换定义为

$$g(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i2\pi ft}dt\qquad(1\text{-}1\text{-}9)$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(f)e^{i2\pi ft}df\qquad(1\text{-}1\text{-}10)$$

一般说，g(f)是一个复值函数

$$g(f)=\mathrm{Re}g(f)+i\mathrm{Im}g(f)=|g(f)|e^{i\theta(f)}\qquad(1\text{-}1\text{-}11)$$

这里，Reg(f)，Img(f)是函数 g(f)的实部与虚部，$|g(f)|$是 g(f)的振幅

$$|g(f)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2g(f)+\mathrm{Im}^2g(f)}\qquad(1\text{-}1\text{-}12)$$

● 注意，这里的广义积分是按柯西主值定义的。

$\theta(f)$是相位（相角）谱

$$\theta(f)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}\,g(f)}{\mathrm{Re}\,g(f)} \tag{1-1-13}$$

$|g(f)|^2$称为功率谱或能谱。

类似可定义周期函数的频谱

$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|e^{-i\theta_n}e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

$|C_n|$称为振幅谱，θ_n称为相位谱。

由于$C_{-n}=C_n^*$，故$|C_n|$是偶函数，θ_n是奇函数。

在空间域，例如x轴上，考虑正弦函数

$$S=A\sin(2\pi kx+\psi)$$

仿照时间域情形也称S为一个空间波，A称为振幅，ψ称为（初）相位，k称为波数，$\lambda=\frac{1}{k}$称为波长，空间域函数的富里叶变换式也称为波谱。相应也有振幅谱、功率谱（能谱），相位谱等定义。

从数学形式上看，空间波的波长相当时间域上的周期，波数相当于频率。在重磁位场的谱分析中就是把空间域的位场转化到频率域（更确切地说是波数域）上来研究。

到现在为止，我们的讨论都是假设（1-1-8）式成立，但是什么条件下（1-1-8）式成立呢？

不少作者致力于在一种给定的积分解释下确定应加在h(x)上的条件下使之保证(1-1-8)成立。

条件Ⅰ 如果h(t)绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty \tag{1-1-14}$$

则它的富里叶变换g(f)存在且满足（1-1-8）式。

对于在有限区间上有限而在该区间外取零值的函数，对于在无穷远处衰减足够快(即$h(x)=0(|x|^{-1-\varepsilon}),\varepsilon>0$)的函数，条件Ⅰ满足。

例1. 门函数

$$\Pi_{T_0}(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_0\\ \frac{1}{2} & t=\pm T_0\\ 0 & |t|>T_0\end{cases} \tag{1-1-15}$$

其波形如图1-2所示，该函数显然满足(1-1-14)，因此其富里叶变换存在且为

$$\Pi_{T_0}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_{T_0}(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T_0}^{T_0}e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\frac{\sin 2\pi T_0 f}{\pi f} \tag{1-1-16}$$

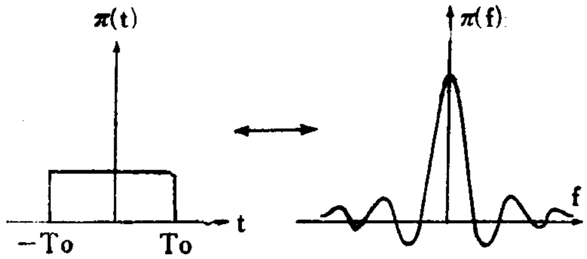

图 1-2 门函数及其富氏变式

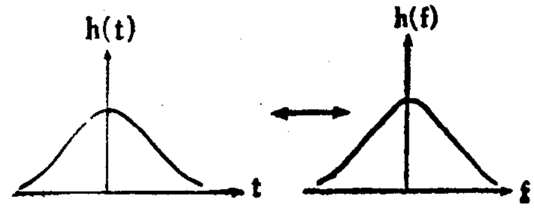

图 1-3 高斯函数及其富氏变式

在以后的讨论中将经常遇到门函数。

例2. 高斯函数

$$h(t)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha t^2} \qquad (\alpha>0)$$

它即是方差为$\frac{1}{\alpha}$的正态分布密度函数，如图 1-3，已知

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=1$$

即满足条件Ⅰ，故其富里叶变换存在，且直接积分得

$$h(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i2\pi ft}dt=e^{-\frac{\pi^2f^2}{\alpha}}$$

条件Ⅱ 如果

$$h(t)=\beta(t)\sin(2\pi ft+\alpha) \tag{1-1-17}$$

其中 f 和 α 是任意常数，β(t)是单调函数，而且对于充分大的正数 λ，当$|t|>\lambda$时，$\frac{h(t)}{t}$在（1-1-14）式意义下绝对可积，则 h(t)的富里叶变式 g(y)存在且满足（1-1-8）式。

例3. 考察

$$h(t)=\frac{\sin(2\pi f_0t)}{\pi t}$$

利用广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi ax}{2\pi ax}\,dx=\frac{1}{2|a|} \tag{1-1-18}$$

可证它满足条件Ⅱ。因为（1-1-17）式中的因子$\beta(t)=\frac{1}{\pi t}$是单调的，又对$|t|>1$，

$$\int_{1}^{\infty}\left|\frac{h(t)}{t}\right|dt=\int_{1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0t)}{\pi t^2}dt<\int_{1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0t)}{\pi t}dt$$
$$<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0t)}{2\pi t}dt=\frac{1}{2}$$

下面按定义计算 h(t)的富里叶变式

$$h(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}[\cos(2\pi ft)-i\sin(2\pi ft)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi ft)}{\pi t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(f_0+f)t+\sin 2\pi(f_0-f)t}{2\pi t}dt$$

利用 (1-1-18) 式，有

$$h(f)=(f_0+f)\frac{1}{2|f_0+f|}+(f_0-f)\frac{1}{2|f_0-f|}=\begin{cases}1 & |f|<f_0\\ 0 & |f|>f_0\end{cases}$$

以上条件我们都不加证明，仅仅指出，即使条件放宽到条件Ⅱ，仍然有很多最常见的函数，例如常数 1，sin x 等不能表为形式(1-1-17)，其富里叶变换都不存在。

此外，与富里叶级数相似，进一步对富里叶积分作分析运算时，常常希望能把积分、微分、求极限运算与富里叶变换运算调换次序。但是这种调换是否容许?

在采用了广义函数以后，所有困难都迎刃而解了，因为每一个广义函数 f(x)都有一个富里叶变式 g(y)，而且 g(y)本身也是一个广义函数；富里叶变换与各种分析运算可以随意调换次序。而广义函数是范围很广的函数类，它几乎包括了我们在实践中常遇到的一切函数。下面我们就来叙述广义函数的基本概念。

§2 广义函数的基本概念

广义函数是普通函数的推广。

称实数的全体为实数集合，记作 R。复数全体为复数集合，记作 Z。如果一些数作成的集合 A，A 中任意元素都是 B 的元素，则说集合 A 是集合 B 的一个子集，记作 $A\subset B$。例如 $R\subset Z$。

若给出一个规则 h，使得 $S(S\subset R)$中任意一个元素 x 都对应着一个 R 中的元素 y，则我们就定义了一个实函数 h，并记作

$$y=h(x)$$

又说 h 是 S 到 R 的一个映射，记作 $h: S\to R$。S 称为 h 的定义域。换句话说，所谓实函数就是从 R 上（的 S）到 R 的一个映射。

类似定义实变复值函数为 R 到 Z 的映射，复变函数为 $Z\to Z$ 的映射。

以上概念可以推广。实数集合推广为一般的抽象集合，例如连续函数的全体 C，也可

以讨论 C 到 R 的映射。不过为了进一步研究的需要，我们考虑的不是一般集合，而是线性空间。

为了以后叙述简洁，引用以下记号：$\in$，$\forall$，$\exists$。$\in$表属于，$\forall$表任给，$\exists$表存在。

定义 1 线性空间

集合 $E=\{x,y,z,\cdots\cdots\}$上定义一个加法运算，满足：

① $\forall x,y\in E$，$x+y\in E$，且 $y+x=x+y$；

② $\forall x,y,z\in E$，$(x+y)+z=x+(y+z)$；

③ $\exists$零元$\theta\in E$，$\forall x\in E$，$\theta+x=x+\theta=x$；

④ $\forall x\in E$，$\exists x'\in E$，使 $x+x'=\theta$，记 $x'=-x$，称之为 x 的右逆元。

又定义一个数乘运算，满足：$\forall \alpha,\beta\in R$（或 Z）

⑤ $\forall x\in E$，$\alpha x\in E$，$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

⑥ $1\cdot x=x$；

⑦ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$。

例4. 连续函数的全体 C，说 C 上两元素 f，g 相等，如果$\forall x\in R$ $f(x)=g(x)$。又规定：

①加法运算：$\forall h,g\in C$，$(h+g)(x)=h(x)+g(x)$

②数乘运算：$\forall \alpha\in R$，$h\in C$，$(\alpha h)(x)=\alpha h(x)$

则 C 是一个线性空间。证略。

定义 2 线性空间 E 到 R(Z)内的一个映射 h 称为 E 上的一个泛函。如果 h 是线性的，即$\forall x,y\in E$，$\alpha,\beta\in R(z)$，有 $h(\alpha x+\beta y)=\alpha h(x)+\beta h(y)$，则称 h 是 E 上的一个线性泛函。

例5. 取定 $x_0\in R$，构造连续函数的全体 C 上一个映射 T：$\forall h\in C$，$Th=h(x_0)$，则 T 是 C 上的一个泛函，且是线性泛函。

事实上，$\forall h,g\in C$，$\alpha,\beta\in R$，有

$$T(\alpha h+\beta g)=(\alpha h+\beta g)(x_0)=\alpha h(x_0)+\beta g(x_0)$$

故 T 是 C 上一个线性泛函。

例6. 取 R 上的绝对可积实函数的全体$\mathscr{L}$，由积分的线性可知$\mathscr{L}$是一个线性空间，定义映射 T：$\mathscr{L}\to R$，$\forall h\in\mathscr{L}$，$Th=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)dx$

则 T 是$\mathscr{L}$上一个线性泛函。

函数概念的这一推广是很自然的。我们实际上常常遇到这种概念。例如我们用温度计 K 测量一个物体的温度，为简单起见，无妨设该物体是一根直线，且温度分布 $u(x)$ 不依时间而改变。当我们用一个温度计触及线上一个点 P 时(如图 1-4)，温度计指示的并不是 P 点的温度，因为除了 P 点与温度计有热交换外，线上其它各点与温度计也有热交换。因此读数是 P 点坐标(记作 y)的函数

$$g_{y,k}=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)h_{y,k}(x)dx \tag{1-2-1}$$

$h_{y,k}(x)$是以 y，k 为参数的权函数。自然 $g_{y,k}$ 并不一定就是 $u(y)$。

令 y 遍历一切可能值，得一簇权函数 $h_{y,k}(x)$。

改换一种温度计 L，则对应有另一簇权函数 $h_{y,L}(x)$。

我们实际上不可能观测到 $u(x)$，只能观测到 $g_{y,k}$。给定 y，k 就有一个权函数 $h_{y,k}(x)$，而 $u(x)$ 使 $h_{y,k}(x)$ 与 R 内一个数 $g_{y,k}$ 相对应。

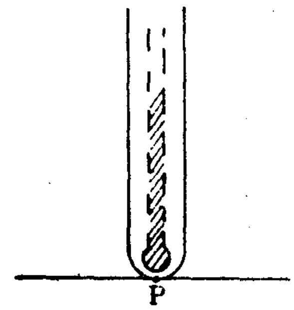

图 1-4 实测温度分布是一个广义函数

虽然我们无法直接观测到 $u(x)$，但如果我们用一切种类的温度计，在一切 y 值处观测 $g_{y,k}$，则我们就说已经完全确定 $u(x)$ 了。因为如果有另一个温度场 $u'(x)$，对一切种类的温度计，在一切 y 值处观测到相同的 $g'_{y,k}=g_{y,k}$，那么我们就有理由说 $u'(x)=u(x)$，否则就说 $u'(x)\neq u(x)$。

称这个 $u(x)$ 为一个分布，或说是一个广义函数，而 $h_{y,k}(x)$ 是试验函数，$h_{y,k}$ 的全体组成一个函数空间 $\mathscr{S}$，$u(x)$ 是 $\mathscr{S}$ 上的一个泛函。

在给定严格的数学定义之前，我们还必须引进两个概念。

定义 3 E 称为一个线性赋范空间，若

（1）E 是一个线性空间；

（2）在 E 上定义了一个泛函 $\|\cdot\|$，它满足：

a） $\forall x\in E$，$\|x\|\geqslant 0$，若 $\|x\|=0$，则充分必要条件是 $x=\theta$（θ 表 E 中零元）。

b） $\forall x,y\in E$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

c） $\forall \alpha\in R(z)$，$\forall x\in E$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

称 $\|x\|$ 是 x 的范数。

定义 4 如果一个函数 φ 处处可微分任意多次，且它和它的一切导数对于一切 $N\in Z_+$（Z_+ 表正整数集），当 $|x|\to\infty$ 都是 $0(|x|^{-N})$，则称这个函数是一个良函数。

以上条件可等价表为：

（1）$\forall x$，$\forall q\in Z_+$，$\varphi^{(q)}(x)$ 存在；

（2）$\forall k$，$q\in Z_+$，$\sup\limits_x|x^k\varphi^{(q)}(x)|<\infty$。

例7. e^{-x^2} 是一个良函数。

定义 5 如果一个函数处处可微分任意多次，并且它和它的一切导数对于某个 N，当 $|x|\to\infty$ 时都是 $O(|x|^N)$，则称这个函数是一个适度良函数。

例8. 任意多项式是适度良函数。

由良函数全体对例 4 规定的运算组成的函数空间是一个线性空间，记作 $\mathscr{S}$。

定义 6 线性赋范空间 E，E 中序列 $\{f_n\}$，若存在 $f\in E$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

则说 $\{f_n\}$ 依范数收敛，或强收敛于 f，记作

$$s\lim_{n\to\infty}f_n=f$$

定义 7 线性赋范空间 E，E 上泛函 T 满足条件：$\forall$ E 中收敛序列 $\{f_n\}$，$s\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\in E$，有 $\lim\limits_n Tf_n=Tf$，则称 T 是连续的泛函。

连续的线性泛函称为线性连续泛函。

定义 8 由给定函数类组成的线性赋范空间$\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$上的线性连续泛函数为$\mathscr{S}$上的广义函数，又称$\mathscr{S}$为基本函数空间。

采用不同的基本函数类可获得不同的广义函数类。但是当用来建立富里叶变换理论时，只有唯一的一种令人满意的选择：

(1)基本函数类应是无限次可微的；

(2)基本函数的富里叶变式本身也是一个基本函数。

能同时满足以上两个条件的最广泛的类是上面引入的函数空间$\mathscr{G}$

$\mathscr{G}$空间上的广义函数的全体记作$\mathscr{G}^*$

例9. 设 $F\in\mathscr{G}$，定义映射 T_F 为

$$\forall\phi\in\mathscr{G},\ T_F\phi=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\phi(x)dx$$

容易验证 $T_F\in\mathscr{G}^*$

因为 T_F 是由 F 唯一确定的，为简便起见，以后常常不区别 F 与 T_F，因此 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}^*$

以后对 $\forall F\in\mathscr{G}^*$，也形式地记作

$$T_F\phi=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\phi(x)dx \tag{1-2-2}$$

应该强调说明这个表达式仅是形式记号而已，因为当 F 是$\mathscr{G}$中的元素，上式右边已经失去一般积分的意义了。不过采用这个形式记号也不是没有理由的。其一是广义函数的一系列性质与积分运算相应性质是一致的。其二是若 F(x)是一个普通函数，把它作为广义函数来看待，则 (1-2-2) 式在通常积分意义下确实是$\mathscr{G}$上一个线性连续泛函。

在$\mathscr{G}^*$中引入极限概念——弱极限。

定义 9 设$\{f_n\}\subset\mathscr{G}^*$，$f\in\mathscr{G}^*$，若$\forall\phi\in\mathscr{G}$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx$$

则说 f_n 弱收敛于 f，也记作

$$w\lim_{n\to\infty}f_n=f$$

注意，$\mathscr{G}^*$中极限概念已不是普通函数的极限概念，也和定义 6 中依范数收敛的概念不同。

例10. 定义$\mathscr{G}\to R$ 的映射 $\delta(x)$：$\forall\phi\in\mathscr{G}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)dx=\phi(0) \tag{1-2-3}$$

容易验证 $\delta(x)$是$\mathscr{G}$上一个广义函数，即 $\delta\in\mathscr{G}^*$。

可以证明 $\delta(x)$不属于$\mathscr{G}$，实际上，任意连续函数都不可能满足条件(1-2-3)。

上面引入的广义函数定义比较抽象，为了便于把握它并进一步利用数学分析工具来研究它，下面利用弱极限的概念，把一个广义函数定义为一个通常函数序列$\{f_n\}$的极限。

定义10 (1)若序列$\{f_n\}\in\mathscr{G}$，$\forall\phi\in\mathscr{G}$，极限

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx$$

总存在，则称该序列为正则的。

（2）两个正则序列$\{f_n\}$，$\{g_n\}$称为相互等价，如果$\forall \phi \in \mathscr{G}$，均有

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x)dx = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\phi(x)dx \tag{1-2-4}$$

（3）$\mathscr{G}$空间中一个正则序列$\{f_n\}$定义一个广义函数 f：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x)dx$$

若两个正则序列等价，则说两个相应的广义函数等价。

注：用定义 9 关于弱极限的概念说，就是用正则序列$\{f_n(x)\}$的弱极限定义了$\mathscr{L}$上的一个线性连续泛函——广义函数 f：$f = w\lim\limits_{n\to\infty} f_n$。

例11. 序列$\{f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n^2}}\}$是正则的，其极限即是 1，广义函数 1(x) 定义为

$$\forall F \in \mathscr{G},\quad \int_{-\infty}^{\infty} 1(x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx\ ,$$

而序列$\{g_n(x) = e^{-\frac{x^4}{n^4}}\}$与$\{f_n\}$等价。

例12. 等价于序列$\{\sqrt{n}\,e^{-nx^2}/\sqrt{\pi}\}$的序列确定一个广义函数 $\delta(x)$，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0)$$

证：$\forall F \in \mathscr{G}$，利用概率积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1 \tag{1-2-5}$$

易证

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}F(x)dx - F(0)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\{F(x)-F(0)\}dx\right|$$

$$\leqslant \max|F'(x)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}|x|dx$$

$$= (\pi n)^{-\frac{1}{2}}\max|F'(x)| \to 0，当 n\to\infty。$$

称以 δ 函数为极限的序列为 δ 函数列。

定义11 称广义函数 f(x) 是一个偶（奇）函数，如果对一切奇（偶）的良函数 $\phi(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx = 0 \tag{1-2-6}$$

例13. $\delta(x)$是偶函数。

证：对一切奇的良函数 $\phi(x)$，$\phi(0)=0$，故（1-2-6）式成立。