科学版

大学数学习题精解系列

数学分析习题精解

（多变量部分）

吴良森　毛羽辉　编著

- 课程学习与考研复习的理想读物
- 内容主要涉及多变量微积分
- 通过典型例题教授解题技巧
- 习题中收录了研究生入学试题

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

数学分析习题精解

(多变量部分)

吴良森　毛羽辉　编著

上海市重点项目建设基金资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要通过典型例题陈述数学分析中典型解题方法和技巧，内容主要涉及多变量微积分，全书按章、节编排，每节包括内容精析、典型例题和习题三部分，书后附有习题解答与提示.

本书适合理工科大学、师范院校数学系学生学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题精解：多变量部分/吴良森，毛羽辉编著.—北京：科学出版社，2003

大学数学习题精解系列

ISBN 7-03-011542-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①吴… ②毛… Ⅲ.①数学分析-高等学校-解题②多变量-微积分-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045500 号

策划编辑：吕 虹 杨 波/文案编辑：彭 斌 姚 晖/责任校对：包志虹

责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2003年9月第一次印刷 印张：19 1/4

印数：1—4 000 字数：368 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

本书是《数学分析习题精解(单变量部分)》的续编,内容包括数学分析课程中多元函数微积分学,以学习数学分析的读者为主要对象,对学习高等数学的读者也有一定的参考价值.

本书内容涉及多变量函数微分学和积分学,按章、节编排,每节包括内容精析、典型例题、习题三部分.内容精析介绍与该节有关理论的重要公式和结论,以及解题过程中的经验和注意点,有助于读者理解数学分析的基本方法;典型例题通过一系列例题,由浅入深地介绍数学分析的解题方法,同时在解题过程中通过分析和注释形式叙述解题的思路和技巧;每节配有一定数量的习题,使读者通过练习达到举一反三、熟练应用所学内容的目的.书后附有习题的提示或解答,有些难题给出较详细的解答,供读者参考,希望读者坚持先做后看的原则,这样收效较大.

本书主要是通过典型例题陈述数学分析中典型的解题方法和技巧,选题以中等以上难度的题目为主.在多元函数微分学中把数值函数和向量函数的极限和可微性理论结合在一起叙述;在多元函数积分学中还选择了一些专题:① 有界变差函数和斯蒂尔切斯积分;② 傅里叶积分;③ 微分形式.对读者进一步学习数学分析的后续课程会有所帮助.

例题和习题中选入部分师范院校、理工科大学研究生入学试题,最后附上两套测试题,内容与硕士研究生入学试题的水平相当,希望对报考研究生的读者有一定的参考价值.

例题和习题中带 * 号的题目具有较高难度,认真钻研这些题目,读者会在分析技巧上得到不少收益.

本书第一至三章由毛羽辉编写,第四至九章由吴良森编写.

本书由华东师范大学教务处数学分析课程建设基金资助.

由于编者经验与水平所限,可能出现缺点和错误,恳请读者批评指正.

编　者

2003 年 2 月

目　录

第一章　多元函数的极限与连续 ………………………… 1

§1.1　$\mathbb{R}^n$ 中的点集与$\mathbb{R}^n$ 的完备性 ………………………… 1

§1.2　多元函数的极限 ………………………… 7

§1.3　多元函数的连续性 ………………………… 13

第二章　多元函数微分学 ………………………… 20

§2.1　可微与偏导数 ………………………… 20

§2.2　复合微分法与方向导数 ………………………… 27

§2.3　中值定理与极值 ………………………… 35

第三章　隐函数定理及其应用 ………………………… 46

§3.1　隐函数定理 ………………………… 46

§3.2　隐函数组定理与坐标变换 ………………………… 53

§3.3　几何应用与条件极值 ………………………… 61

第四章　曲线积分 ………………………… 73

§4.1　第一、二型曲线积分 ………………………… 73

*§4.2　有界变差函数、斯蒂尔切斯积分 ………………………… 84

第五章　含参量积分、傅里叶积分 ………………………… 100

§5.1　含参量正常积分 ………………………… 100

§5.2　含参量反常积分的一致收敛性及其应用 ………………………… 109

§5.3　傅里叶积分 ………………………… 124

第六章　二重积分与格林公式 ………………………… 136

§6.1　二重积分 ………………………… 136

§6.2　格林公式及其应用 ………………………… 155

第七章　三重积分、n 重积分 ………………………… 169

§7.1　三重积分 ………………………… 169

§7.2　n 重积分 ………………………… 179

第八章　重积分的应用 ………………………… 190

§8.1　重积分的几何应用 ………………………… 190

§8.2　重积分的力学应用 ………………………… 195

第九章　曲面积分与高斯公式、斯托克斯公式 ………………………… 204

§9.1　第一、二型曲面积分 ………………………… 204

§9.2　高斯公式、斯托克斯公式、场论 …… 217
*§9.3　微分形式 …… 230
测试题 …… 241
习题解答与提示 …… 244
测试题解答与提示 …… 295

第一章　多元函数的极限与连续

本章是学习多元函数微积分的基础.在学习这部分内容时,读者应该随时注意:哪些概念是一元函数极限理论中相应概念的直接推广,哪些概念则是多元函数情形下更复杂的产物,并对它们的表述形式与运算法则做出比较.

§1.1　$\mathbb{R}^n$ 中的点集与$\mathbb{R}^n$ 的完备性

一、内容精析

下面 1°～8°是$\mathbb{R}^n$ 中一些重要点集的定义及其主要性质;9°～12°是$\mathbb{R}^n$ 上的完备性定理.

1° 定义了内积的 n 维向量空间称为 n 维欧氏空间(记为$\mathbb{R}^n$);$x\in\mathbb{R}^n$ 称为$\mathbb{R}^n$ 中的点或向量.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$,所谓 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积,即为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \quad (\text{又记为}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ 或 }\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}).$$

内积有如下基本性质:

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 为零向量时$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$;

(2) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$;

(3) $\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})=(\alpha\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha\boldsymbol{y})$;

(4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$.

2° 模、距离与直径——向量 $\boldsymbol{x}$ 的模(范数,长度):

$$\|\boldsymbol{x}\|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{1/2}=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2};$$

点 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 之间的距离:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big]^{1/2};$$

点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 到点集$E\subset\mathbb{R}^n$ 的距离:

$$\rho(\boldsymbol{x},E)=\inf_{\boldsymbol{y}\in E}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});$$

点集 E、$F\subset\mathbb{R}^n$ 之间的距离:

$$\rho(E,F)=\inf_{\boldsymbol{x}\in E,\boldsymbol{y}\in F}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});$$

点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的直径:

$$d(E)=\sup_{x,y\in E}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

模与距离有着和内积相仿的性质,例如

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\ (\text{施瓦茨(Schwarz)不等式});$$

$$\left.\begin{array}{l}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|\\ \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{array}\right\}(\text{三角形不等式}).$$

3° 点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的一个 δ 邻域:

$$U(\boldsymbol{x}_0;\delta)=\begin{cases}\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\},\\ \{\boldsymbol{x}\mid |x_i-x_{0,i}|<\delta,i=1,2,\cdots,n\},\end{cases}$$

前者为一 n 维球形邻域,后者为一 n 维方形邻域.

又记 $U^{\circ}(\boldsymbol{x}_0;\delta)=U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 为点 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个空心 δ 邻域.

4° 点与点集的关系(Ⅰ)　设点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 与点集 $E\subset\mathbb{R}^n$. 按"内-外"而论, $\boldsymbol{x}_0$ 与 E 的关系有以下三种情形:

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的内点——$\exists\,\delta>0$, 使 $U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\subset E$;

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的外点——$\exists\,\delta>0$, 使 $U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap E=\varnothing$;

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的界点——$\boldsymbol{x}_0$ 即非 E 的内点,又非 E 的外点(即 $\forall\,\delta>0$, 必使 $U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap E\neq\varnothing$, 且 $U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap\complement E\neq\varnothing$, 其中 $\complement E=\mathbb{R}^n\setminus E$).

E 的所有内点组成的集合称为 E 的内部,记为 $\mathrm{int}E$(或 E°);E 的所有外点组成的集合称为 E 的外部;E 的所有界点组成的集合称为 E 的边界,记为 ∂E.

显然, E 的内点必属于 E; E 的外点必不属于 E; E 的界点可以属于 E, 也可以不属于 E.

5° 点与点集的关系(Ⅱ)　按"密集与否"而论,点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 与点集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 之间的关系又表现为以下两种情形:

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点——$\forall\,\delta>0$, 必有 $U^{\circ}(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap E\neq\varnothing$;

$$\boldsymbol{x}_0\text{ 不是 }E\text{ 的聚点}\begin{cases}\text{若 }\boldsymbol{x}_0\notin E,\text{则 }\boldsymbol{x}_0\text{ 为 }E\text{ 的外点};\\ \text{若 }\boldsymbol{x}_0\in E,\text{则 }\boldsymbol{x}_0\text{ 称为 }E\text{ 的孤立点}.\end{cases}$$

孤立点即为: $\exists\,\delta>0$, 使 $U^{\circ}(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap E=\varnothing$, 而 $\boldsymbol{x}_0\in E$;亦即 $\exists\,\delta>0$, 使 $U(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap E=\{\boldsymbol{x}_0\}$.

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点的充要条件是:存在一个各项互异的点列 $\{x_k\}\subset E$, 使

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_0.$$

E 的所有聚点组成的集合称为 E 的导集,记为 E^{d}(或 E');又称 $\bar{E}=E\cup E^{\mathrm{d}}$ 为 E 的闭包. 由以上定义可直接推知:

(1) $E^{\circ}=E\setminus\partial E\subset E^{\mathrm{d}}$;

(2) 孤立点必为界点;

(3) 属于 E 的界点或者是 E 的孤立点,或者是 E 的聚点;

(4) 不属于 E 的界点必为E 的聚点；

(5) 聚点或者是内点，或者是界点；

(6) 既非聚点又非孤立点，则必为外点；反之亦然.

希望读者清楚说出上面这些结论成立的理由.

6° 开集与闭集 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 $E^\circ=E$，则称 E 为$\mathbb{R}^n$ 中的一个开集；若 $\bar{E}=E$(亦即 $E^d\subset E$)，则称 E 为$\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集.

开集与闭集有以下一些重要性质：

(1) E 为开集$\Leftrightarrow\complement E$ 为闭集；

(2) E_1,E_2 为开集$\Rightarrow E_1\cup E_2, E_1\cap E_2$ 都为开集；

(3) F_1,F_2 为闭集$\Rightarrow F_1\cup F_2, F_1\cap F_2$ 都为闭集；

(4) E 为开集，F 为闭集$\Rightarrow F\setminus E$ 为闭集，$E\setminus F$ 为开集.

还约定空集既是开集，又是闭集.

7° 开域与闭域 非空连通(按折线)开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 称为$\mathbb{R}^n$ 中的一个开域. 开域 D 连同它的边界∂D 组成一个闭域(即 $D\cup\partial D$).

开域、闭域、开域连同其一部分界点的点集，统称为区域.

容易证明：

(1) 若 D 为开域，则闭域 $D\cup\partial D$ 必定就是D 的闭包$\bar{D}$；

(2) 闭域必为闭集，而闭集不一定是闭域；

(3) 连通闭集不一定是闭域；

(4) 当 $E\setminus\partial E$ 为一开域时，E 本身也不一定是个闭域.

请读者为这些简单命题作出证明，或举出反例.

8° 有界集与无界集 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，若 $\exists r>0$，使得 $E\subset U(O;r)$(其中 O 是$\mathbb{R}^n$ 的坐标原点)，则称 E 是$\mathbb{R}^n$ 中的一个有界集；否则称 E 为无界集(即 $\forall r>0$，$\exists \boldsymbol{x}\in E$，使 $\|\boldsymbol{x}\|>r$).

$\mathbb{R}^n$ 上的完备性定理示于以下 9°～12°，它们分别是$\mathbb{R}$ 上相应定理的推广($\mathbb{R}$ 上的确界定理与单调有界定理在$\mathbb{R}^n$ 上不能做直接推广).

9° (点列极限的收敛准则) 点列$\{P_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 收敛的充要条件是：$\{P_k\}$为一基本列(或柯西(Cauchy)列)，亦即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K\in\mathbb{N}^+$，当 $k>K$ 时，对一切 $q\in\mathbb{N}^+$ 都有

$$\rho(P_k,P_{k+q})<\varepsilon.$$

10° (闭域套定理) 设 $D_k\subset\mathbb{R}^n$，$k=1,2,\cdots$是一列闭域，它满足：

(1) $D_k\supset D_{k+1}$，$k=1,2,\cdots$；

(2) $d_k=d(D_k)$，$\lim\limits_{k\to\infty}d_k=0$.

则存在惟一的点 $\boldsymbol{x}_0\in D_k$，$k=1,2,\cdots$.

注　闭域套定理也可改为更一般的闭集套定理,即设$\{D_k\}$为$\mathbb{R}^n$中的一列闭集,其证明不必做任何更动.

11°(聚点定理)　设$E\subset\mathbb{R}^n$为任一有界无穷点集,则E在$\mathbb{R}^n$中至少有一个聚点.

聚点定理有以下重要推论:

推论 1(致密性定理)　设$\{\boldsymbol{x}_k\}\subset\mathbb{R}^n$为一有界点列,则它必存在收敛子列$\{\boldsymbol{x}_{k_j}\}$.

推论 2　设无穷点集$E\subset\mathbb{R}^n$. E为有界集的充要条件是:E的任一无穷子集必有聚点.

推论 3　$E\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集的充要条件是:E为一列紧集(即E的任一无穷子集必有聚点,且都属于E).

(推论的证明见例 1.4)

12°(有限覆盖定理)　设$E\subset\mathbb{R}^n$为一有界闭集,$\Delta=\{\Delta_\alpha\}$为$\mathbb{R}^n$中的一族开集.若Δ覆盖了E(即$E\subset\bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$),则在$\Delta$中必能选出有限个开集$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$,它们同样能覆盖$E$(即$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Delta_i$).

这些完备性定理在数学分析课程中的主要功用,是用来证明多元连续函数在有界闭集上的一组重要性质(与一元函数的情形相仿).

二、典型例题

例 1.1　设$S\subset\mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{x}_0$为S的任一内点,$\boldsymbol{x}_1$为S的任一外点(假设内点与外点都存在).证明:连接$\boldsymbol{x}_0$与$\boldsymbol{x}_1$的直线段必与∂S至少有一交点$\boldsymbol{y}$.

证　连接$\boldsymbol{x}_0$与$\boldsymbol{x}_1$的直线段设为

$$l:\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)t+\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[0,1].$$

下面用区间套方法来证明$l\cap\partial S\neq\varnothing$.

令$[\alpha_0,\beta_0]=[0,1]$,并取$t_1=\dfrac{1}{2}\in[\alpha_0,\beta_0]$,$l$上与$t=t_1$所对应的点设为$\boldsymbol{y}_1$.若$\boldsymbol{y}_1\in\partial S$,则命题得证;若$\boldsymbol{y}_1\notin\partial S$,则取

$$[\alpha_1,\beta_1]=\begin{cases}[t_1,\beta_0], & \boldsymbol{y}_1\text{ 为 }S\text{ 的内点;}\\ [\alpha_0,t_1], & \boldsymbol{y}_1\text{ 为 }S\text{ 的外点.}\end{cases}$$

一般令$t_k=\dfrac{1}{2}(\alpha_{k-1}+\beta_{k-1})$,$l$上与$t=t_k$所对应的点设为$\boldsymbol{y}_k$.若$\boldsymbol{y}_k\notin\partial S$,$k=1,2,\cdots$,则令

$$[\alpha_k,\beta_k]=\begin{cases}[t_k,\beta_{k-1}], & \boldsymbol{y}_k\text{ 为 }S\text{ 的内点;}\\ [\alpha_{k-1},t_k], & \boldsymbol{y}_k\text{ 为 }S\text{ 的外点.}\end{cases}$$

这就得一区间套$\{[\alpha_k,\beta_k]\}$,设

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\beta_k=\xi\in[\alpha_k,\beta_k],\quad k=1,2\cdots.$$

在 l 上与 $t=\xi$ 所对应的点设为 $\boldsymbol{y}$,下面只需证明 $\boldsymbol{y}\in\partial S$.

如图 1.1 所示, $\forall\varepsilon>0$, 作 $U(\boldsymbol{y};\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n$. 再取足够小的 $\delta>0$,使得当 k 充分大时恒有

$$[\alpha_k,\beta_k]\subset U(\xi;\delta)\subset\mathbb{R},$$

且当 $t\in U(\xi;\delta)$时,l 上所对应的那一小段直线段 $l_\delta\subset U(\boldsymbol{y};\varepsilon)$. 这时, l_δ 上与 $t=\alpha_k$ 所对应的点(是 S 的内点)和 $t=\beta_k$ 所对应的点(是 S 的外点)都落在 $U(\boldsymbol{y};\varepsilon)$之内. 由 ε 的任意性与界点的定义,证得 $\boldsymbol{y}$ 为S 的界点.

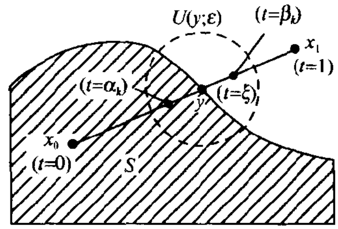

图 1.1

例 1.2 证明:对任何 $E\subset\mathbb{R}^n$,它的导集 E^d 必为闭集.

分析 此命题是要证明 E^d 的聚点同样也是 E 的聚点.

证 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 E^d 的任一聚点,由定义, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\boldsymbol{y}\in E^d$, 使 $\boldsymbol{y}\in U^\circ(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$. 再由 $\boldsymbol{y}$ 为E 的聚点, $\forall\,U^\circ(\boldsymbol{y};\delta)\subset U^\circ(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$, 必使

$$U^\circ(\boldsymbol{y};\delta)\cap E\neq\varnothing.$$

于是又有 $U^\circ(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)\cap E\neq\varnothing$,所以 $\boldsymbol{x}_0$ 又是 E 的聚点,即 $\boldsymbol{x}_0\in E^d$,这就证得 E^d 为闭集.

例 1.3 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$(即$\complement E$). 试证 E 为闭集的充要条件是

$$E=\operatorname{int}E\cup\partial E\quad 或\quad E^c=\operatorname{int}(E^c).$$

证 下面依次证明:

$$\begin{tikzcd}
E=E\cup E^d \arrow[r, Rightarrow, "(1)"] & E=\operatorname{int}E\cup\partial E \arrow[r, Rightarrow, "(2)"] & E^c=\operatorname{int}(E^c) \arrow[ll, Rightarrow, bend left, "(3)"]
\end{tikzcd}$$

(1) $\forall\,\boldsymbol{x}\in\partial E$, $\boldsymbol{x}$ 或者是E 的聚点,或者是 E 的孤立点. 由条件 $E^d\subset E$,故恒有 $\boldsymbol{x}\in E$,从而$\partial E\subset E$,并有 $\operatorname{int}E\cup\partial E\subset E$. 反之, $\forall\,\boldsymbol{y}\in E$, $\boldsymbol{y}$ 或者是E 的内点,或者是 E 的界点,由此又得 $E\subset\operatorname{int}E\cup\partial E$. 综合起来,便证得

$$E=\operatorname{int}E\cup\partial E.$$

(2) $\forall\,\boldsymbol{x}\in E^c$,由假设($\partial E\subset E$),$x$ 必为E 的外点,故$\exists\,\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{x};\delta)\cap E=\varnothing$,从而 $U(\boldsymbol{x};\delta)\subset E^c$,说明 $\boldsymbol{x}\in\operatorname{int}(E^c)$, $E^c\subset\operatorname{int}(E^c)$;反之,显然有 $\operatorname{int}(E^c)\subset E^c$;这就证得

$$E^c=\operatorname{int}(E^c).$$

(3) $\forall\,\boldsymbol{x}\in E^d$,由条件可证 $\boldsymbol{x}\in E$(若不然, $\boldsymbol{x}\in E^c$,则由 E^c 为开集的假设, $\boldsymbol{x}$ 必为E^c 的内点,故$\exists\,\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{x};\delta)\subset E^c$,这与 $\boldsymbol{x}$ 为E 的聚点相矛盾),从而

$E^d \subset E$.这就证得

$$E = E \cup E^d.$$

注　由此例知道:

(1) 闭集也可用 $E = E\cup\partial E$ 来定义(但使用起来一般不如 $E = E\cup E^d$ 方便).

(2) 闭集与开集具有共轭性质——开集的余集为闭集;闭集的余集为开集.利用此性质,有时可以通过讨论余集 E^c 的特征,转而来认识 E.

例 1.4　证明聚点定理的推论.

证　推论 1 可由聚点定理直接得出,这里只证明另外两个推论.

推论 2　"$\mathbb{R}^n$ 中的无穷点集 E 为有界集的充要条件是:E 的任一无穷子集必有聚点".证明如下:

必要性　由于 E 的任一无穷子集 F 同样是个无穷有界点集,故由聚点定理,F 必有聚点.

充分性　倘若 E 为一无界集,则必存在点列 $\{x_k\}\subset E$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\| = +\infty$.这个点列作为 E 的一个无穷子集将不存在聚点,与条件相矛盾,故 E 必为有界集.

推论 3　"$\mathbb{R}^n$ 中的点集 E 为有界闭集的充要条件是:E 的任一无穷子集必有聚点,且都属于 E".证明如下:

必要性　因 E 有界,故它的任一无穷子集 F 同样有界,由聚点定理,F 必有聚点.又因 F 的聚点也是 E 的聚点,而 E 为闭集,故 F 的聚点全都属于 E.

充分性　首先,由推论 2 的充分性已知 E 为一有界集.再证 E 为一闭集:倘若有 E 的某一聚点 $\boldsymbol{x}_0\notin E$,则由聚点性质,必存在各项互异的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subset E$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_0$;据题设条件,$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的惟一聚点 $\boldsymbol{x}_0$ 应属于 E,导致矛盾.所以 E 的所有聚点都属于 E,即 E 为一闭集.

注　满足推论 3 中充要条件的点集称为列紧集.根据集合的列紧性,连续函数在有界闭集中无穷多个点上的性质才能被归结到聚点上去,从而获得所要证明的结论(详见 §1.3).

习　题　1.1

1. 设 A,B 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个不相交的开集,证明 $A\cap\bar{B} = \varnothing$.
2. 证明:对任何 $E\subset\mathbb{R}^n$,它的边界 ∂E 必为一闭集.
3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$,E^d 与 $\bar{E}$ 分别是 E 的导集与 E 的闭包.证明:

(1) 若 E 为闭集,$\boldsymbol{x}\notin E$,则 $\rho(\boldsymbol{x},E)>0$;

(2) $\bar{E} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x},E) = 0\}$.

4. 证明闭域必为闭集.
5. 举例说明:

(1) 闭集不一定是闭域；

(2) 连通闭集不一定是闭域；

(3) 当 E° 为开域时，E 也不一定是闭域(由此说明 ∂E 与 ∂E° 不一定相同，其中 $E^\circ = E \setminus \partial E$).

6. 设在 $\mathbb{R}^n$ 中 E 为一开集，F 为一闭集. 试问在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 E 是否仍为开集？F 是否仍为闭集？说出理由.

7. 证明：

(1) $E \cup E^d = E \cup \partial E$；

(2) 若 $A \subset B$，则 $A^\circ \subset B^\circ$，$\bar{A} \subset \bar{B}$.

*8. 对任意的 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明 $\partial \bar{E} \subset \partial E$；举出反例说明 $\partial \bar{E} = \partial E$ 不一定成立.

*9. 设 E、$F \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$E \cap F = \varnothing$. 试证：

$$\partial(E \cup F) = \partial E \cup \partial F.$$

*10. 设 $F \subset E$，其中 F 与 E 分别是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭域与有界开域. 试证：存在开域 $D \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$F \subset D \subset \bar{D} \subset E.$$

§1.2　多元函数的极限

一、内容精析

1° 多元函数概念是一元函数概念的直接推广，它仍记为

$$z = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$$(\text{或 } z = f(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n);$$

f 的值域也记为

$$f(D) = \{z \mid z = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

同样地，多元函数 f 是点集 D 到 $f(D)$ 的单值对应，也称为 D 到 $f(D)$ 的映射($f: D \to f(D)$).

当 $f(D) \subset \mathbb{R}$ 时，f 是多元数值函数. 更一般地，当函数值为一个 m 维向量时(即 $\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$)，$f$ 是多元向量值函数(或称向量函数)；用分量形式来表示，即为

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

有关多元函数在 D 上的有界性，即为数集 $f(D)$(或点集 $f(D)$)的有界性. 在这一章里，我们讨论的主要对象是二元数值函数

$$z = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\text{或 } z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2).$$

2° 多元函数极限理论是研究多元函数连续性和多元函数微分学的基础. 由于

自变量的个数多于 1，因此多元函数的极限要比一元函数的极限不规则得多. 特别是要计算多元函数不定式的极限时，一般只能依赖极限定义，不再有像洛必达(L'Hospital)法则那样有效的方法.

3° $f(\boldsymbol{x})$在 D 上当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时的极限

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x}) = A, \tag{1}$$

其定义是：

$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in D$ 且 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，就有 $|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$.

说明：

(1) 这里要求 $\boldsymbol{x}_0$ 必须是 D 的一个聚点(否则无从考虑极限问题)，而 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 的方式必须是任意的(不能用特定方式来代替).

(2) 当 $\boldsymbol{x}\in D$ 不致引起误解时，极限式也可简写成 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=A$；而当 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_0$ 分别用坐标(x,y)，(x_0,y_0)表示时，上述极限式又写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

(3) 极限定义更直观的几何说法是：$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$，使得

$$f(U^\circ(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap D)\subset U(A;\varepsilon).$$

4° 极限(1)存在的一个充要条件是：$\forall\,E\subset D$，只要 $\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点，就有

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E}} f(\boldsymbol{x}) = A.$$

这个命题有以下三个重要推论：

推论 1　$\exists\,E\subset D$，$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点，使得极限 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E}} f(\boldsymbol{x})$不存在，则极限 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})$也不存在.

推论 2　$\exists\,E_1$、$E_2\subset D$，$\boldsymbol{x}_0$ 是它们的聚点，而

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E_1}} f(\boldsymbol{x}) = A_1 \neq A_2 = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E_2}} f(\boldsymbol{x}),$$

则 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})$必定不存在.

推论 3　极限(1)存在的另一充要条件是：$\forall\,\{\boldsymbol{x}_k\}\subset D$，满足 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}_0$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$，且数列$\{f(\boldsymbol{x}_k)\}=\{z_k\}$都收敛.(证明留做习题)

5° 累次极限

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y) = L\left(\text{简记为}\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L\right)$$

的定义是：设 E_x，$E_y\subset\mathbb{R}$，x_0 是 E_x 的聚点，y_0 是 E_y 的聚点，$f(x,y)$在 $D=E_x\times E_y$ 上有定义. 若 $\forall\,y\in E_y(y\neq y_0)$，存在极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)=\varphi(y),$$

而且进一步存在极限

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\varphi(y)=L.$$

类似地可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=K$.

6° 累次极限与重极限(1)是两个不同的概念，它们的存在性没有必然的蕴含关系. 例如对于

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y},\quad h(x,y)=y\sin\frac{1}{x},$$

分别有：

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在，而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$不存在，而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)=-1$;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0$, 而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)$不存在.

7° 累次极限与重极限之间的一个关系定理　若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$(或$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$)都存在，则二者必定相等.

以下是这个命题的两个有用的推论：

推论 1　如果

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\quad 和\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

都存在，则三者相等；

推论 2　如果

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=K\neq L=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$必定不存在(例如 6°中的 $g(x,y)$即为如此).

二、典型例题

例 2.1　设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

试用等高线法讨论曲面 $z=f(x,y)$的形状.

讨论　用 $z=c$(c 为一系列常数)去截曲面，得到等高线方程

$$xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=c \quad 或 \quad xy(x^2-y^2)=c(x^2+y^2). \tag{2}$$

当 $c=0$ 时，$z=f(x,y)$ 与 $z=0$ 相交于四条直线：

$$x=0,\ y=0,\ y=x,\ y=-x.$$

当 $c\neq 0$ 时，由等高线的直角坐标方程(2)难以看出它们的形状.但若把它化为极坐标方程，即令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，可得

$$r^2\sin 4\theta=4c. \tag{3}$$

如图 1.2 所示为方程(3)中令 $c=0,\ \pm2,\ \pm4$ 所对应的一族等高线.由此想像出曲面的大致形状为：原点 O 是一个鞍点，在这点处，对称的四道"山脊$\left(\frac{k\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k=0,1,2,3\right)$"与四道"山堑$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2},k=0,1,2,3\right)$"会合在一起.该曲面的图形如图 1.3 所示.

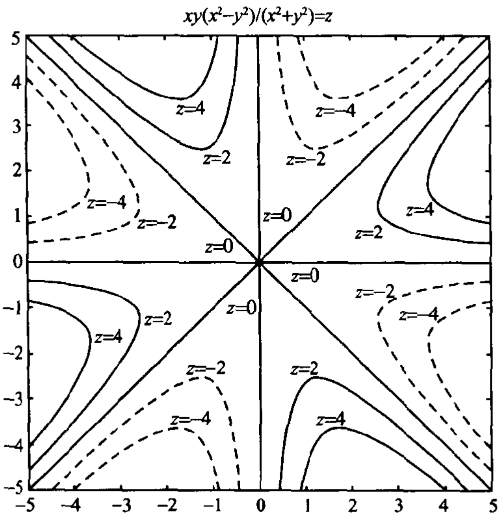

图 1.2

例 2.2　对于例 1 中的函数 $f(x,y)$，证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

证一　$\forall\varepsilon>0$，由于

$$|f(x,y)-0|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x^2-y^2|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|x^2+y^2|,$$

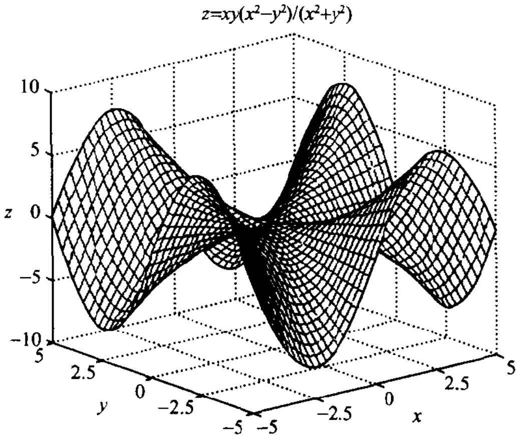

图 1.3

可知当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{2\varepsilon}$ 时,便有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

证二 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则有

$$0\leqslant\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2|\sin4\theta|\leqslant\frac{r^2}{4}\to0, r\to0.$$

从而结论得证.

例 2.3 讨论下列函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$; (2) $g(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$;

(3) $h(x,y)=\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}$.

解 (1) 由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx^2)}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{mx^4}{(1+m^2)x^4}=\frac{m}{1+m^2},$$

它随 m 而异,因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

(2) 由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}}g(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x^2-x)}}g(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x-1)}{x^2}=-1,$$