中学生文库

数学万花镜

SHUXUE WANHUAJING

上海教育出版社

中学生文库

数学万花镜

〔波〕史坦因豪斯 著
裘光明 译

上海教育出版社

H. STEINHAUS

Mathematical Snapshots

(New edition Revised and enlarged)

New York OXFORD UNIVERSITY PRESS 1960

中学生文库 数学万花镜

〔波〕史坦因豪斯 著 裘光明 译

上海教育出版社出版 (上海永福路 123 号)

上海中华印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/32 印张 7.75 字数 165,000

1981 年 9 月第 1 版 1981 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—81,500 本

统一书号: 7150·2498 定价: 0.56 元

内 容 提 要

本书以图形、图片和模型(照片)等为主，辅以必要的文字说明，生动、具体地叙述了数学一些领域里的事实和问题. 这些事实和问题将会引起读者对数学的兴趣和思考.

译者的话

波兰数学家史坦因豪斯的这本《数学万花镜》是一本独特的介绍数学知识的书．它以图形，图片和模型（照片）等为主，辅以必要的说明，生动地讲到了数学各个领域里的事实和问题．使抽象的难以理解的数学理论，通过具体的可以捉摸的实物，而易于被人们所接受．

史坦因豪斯的这一著作，译者曾在1951年根据1949年的俄文版译出，由开明书店（后改由中国青年出版社）出版．以后，作者在1950年和1960年的两次英文版中又作了大量的增补，内容也重新作了安排．现在这个译本是根据1960年的英文版译出的，与原来的译本相比，篇幅增加了一倍以上．因此，读过旧译本的读者将会看到，这可以说完全是一本新书了．

裘光明

1980年5月于郑州

1950年版序

本书是我所著《数学万花镜》的增订版. 与已经不再印刷的第一个英译本相比,这一版不仅增加了插图数(前一版的一倍半),还插进了一些很初等的数学解说. 《万花镜》的主要目的是使数学具体化, 这在新的译本里都保持了. 但是当一些有趣的事物需要文字上的解说时, 只好请读者原谅作者在这些方面作些停留.

避免使用隐藏在好多页之前的论断和定义的原则, 也仍然保留了; 这使读者可以跳过他不想看的那些页. 第一版上的立体图换成了照片. 向读者提出的问题有时很容易回答; 有时连作者也不知道如何回答. 在某些情况下, 所叙述的论断并无已知的证明; 这就是要读者去否定它或证明它. 在第223—235页的注解中可以找到图形的来源和关于正文的一些说明.

感谢柯克色特尔(H. S. M. Coxeter)教授和罗宾(Robbins)教授指出原稿中的一些错误并阅读了书中的证明.

没有摄影师、模型制作者和设计师的帮助, 这本书是不可能产生的. 除在第一版中提到过的人外,还必须加上库庇克(B. Kupiec), 诺瓦可夫斯基(R. Nowakowski), 弗多维亚克(W. Wdowiak),特洛雅诺夫斯基(A. Trojanowski), 格洛贝尔纳(M. Grobelna)和瓦特尔(R. Walter)等人; 他们的功绩几乎在本书每一页上都有所体现.

最后, 让我向设在纽约的牛津大学出版社的瓦德林

(Philip Vaudrin)先生表示谢意，当我在美国时，他鼓励我对很难定义但看来又令人惊异的事物重复我过去的试验，这些事物是可以叫做数学对象的.

史坦因豪斯　1948 年 3 月 3 日

于波兰弗罗茨瓦夫

增订版序

《数学万花镜》的上一个美国版到现在已有10年. 这些年来非常自然地产生了一些关于数学对象的新经验, 和一些新的设想和思想. 这些是我试图用图向读者介绍的, 并作了必要的文字上的解说, 因而这一版比1950年版大约增加百分之二十五的篇幅.

给我帮助的人自然也增加了, 我在这里只提出其中的两位: 弗罗卡(J. Wloka)博士协助作了新版的翻译工作, 富斯腾伯尔格(H. Furstenberg)教授使一些本来不够清楚的地方成为正确的.

我必须再一次向读者声明,《万花镜》不是数学教科书. 它的目的是指出和说明这样一些事物, 这些事物是或应是能使一般程度的读者感到兴趣的, 而且它无疑也可以供学数学的大学生或高级专门人员阅读(我建议他们读这本书并注意其中的设想).

书中有一些问题, 大多数用疑问句"为什么?"表示. 这些问题提请读者回答, 但是读者不必把它看做是测验题. 其中有些很简单, 但有些即使对于专家来说也是很困难的, 因为它们尚未解决.

作者想用本书证明些什么? 这有两点: (1)数学是和现实世界而不是和纯属人为的疑难问题相联系的; (2)数学是广泛的普遍的; 不管如何遥远, 在现实世界中都不存在这样的角落, 真正的数学会拒绝把人们引向那个地方.

史坦因豪斯　1960年4月1日

于波兰弗罗茨瓦夫

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

1 三角形，正方形和游戏

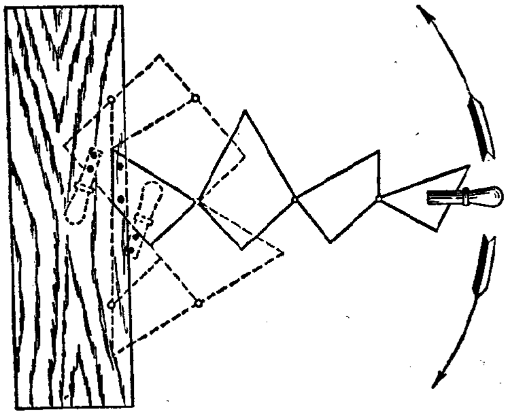


图 1

图1这样的四块小板，可以拼成一个正方形或者一个正三角形，就看我们是向上面转还是向下面转．为了把一个正方形分成两个正方形，我们可以在一个直角三角形的各边上画出三个正方形(图2)，并验证大正方形是另外两个正方形的和．为此，我们可以用通过中等正方形中心的竖直线和水平线把它分成相等的四块，再把这四块平移在大正方形的四个角上，大正方形中间空出的部分就恰好等于小正方形的大小．要证明这一点，只要注意到$a=b+c$就可以了．当我们观察图3上三边分别是3，4和5的三角形：$9+16=25$时，上面所证明的定理的意义是清楚的．于是我们可以把12英寸长的绳分成3，4和5英寸的三段而围成一个直角三角形．不

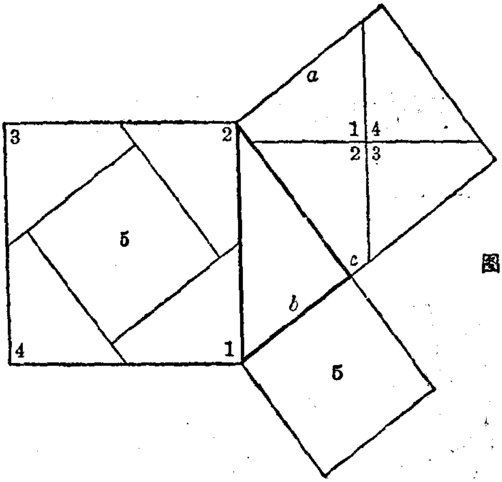


图 2

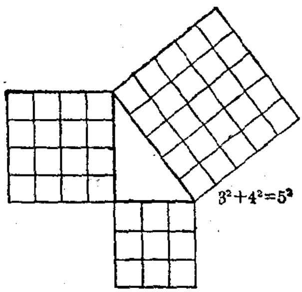


图 3

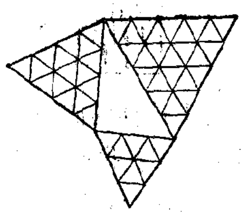


图 4

用正方形也可以证实直角三角形的这个性质(图 4).

在有一个角是 60° 的三角形的各条边上各画一个等边三角形(图 5). 原三角形和对着 60° 角的新三角形的面积之和等于另外两个三角形的面积之和(图 6).

可以采用把任意三角形的各个内角三等分的办法，来画出一个等边三角形(图 7)：中央的小三角形是等边的. 把一个角三等分可以用图 8 所示的方法相当精确地做到：先平分

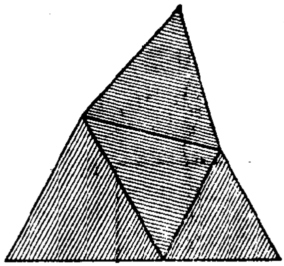


图 5

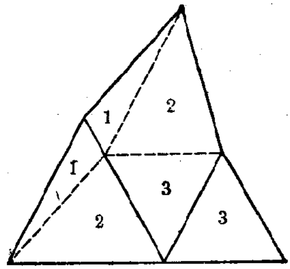


图 6

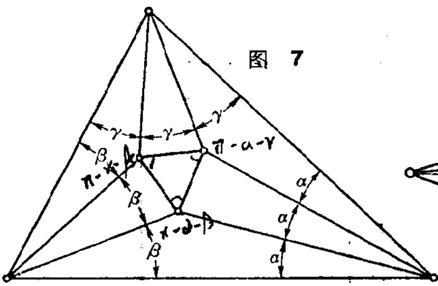


图 7

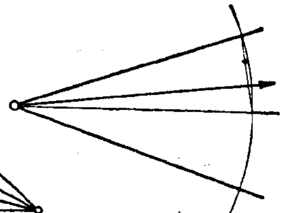
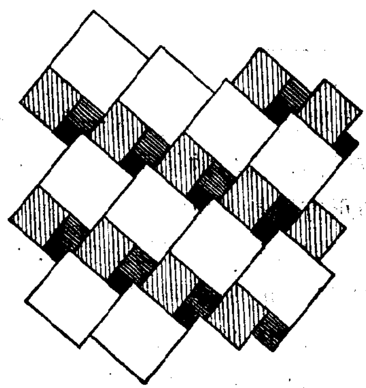


图 8

这个角，然后把半角所对的弦三等分，通过弦的 2/3 处的半径就三等分这个角．这当然只是一种近似的作图法．

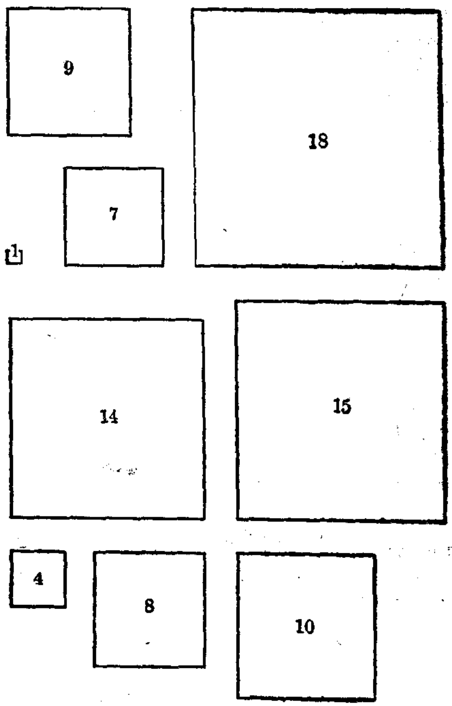
图 9



用大小不同的正方形可以覆盖平面(图 9). 一个很有趣的问题是把矩形分成不同的正方形. 图 10 是九个能拼成矩形的正方形,它们的边长分别是 1,4,7,8, 9, 10, 14, 15, 18.

长33. 宽32

图 10



问题: 试把上述九个正方形拼成一个矩形. 这是把矩形分成不同的正方形的最简单的例子. 要把一个矩形分成比九个还少的不同的正方形是不可能的.

可以把一个正方形分成不同的正方形. 图 11 是最简单的情形之一. 图中 24 个正方形的边长分别是: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64 和 81. 试问一个正方形能被分成比 24 个少的不

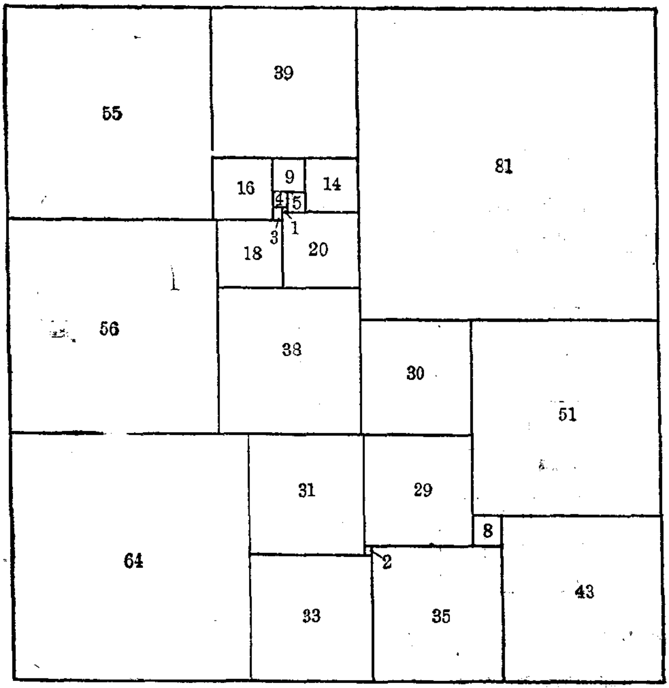


图 11

同的正方形吗？

为了从一个三角形中分割出等于整个面积七分之一的另一个三角形，我们按比 1:2 依次分割它的每一条边（图 12），然后连接分点和相对的顶点；中间阴影部分的面积就是整个

图 12

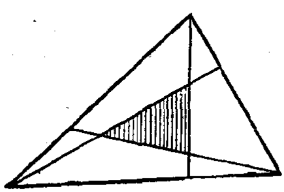
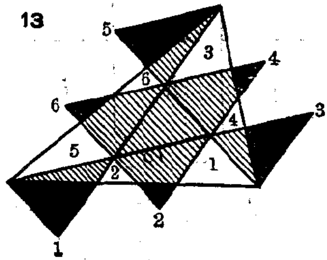


图 13



三角形的七分之一．证明可以从图 13 得到：全黑部分和阴影部分给出 7 个全等的三角形，它们的面积全等于图 12 中的阴影部分；因为 6 个黑色三角形可以覆盖同号的白色部分，所以这 7 个全等三角形的总面积就等于原来的三角形．

平面最简单的分法，是分成相等的正方形（图 14），这种分法给出了适用于许多游戏的方格板．两个人可以在九格的

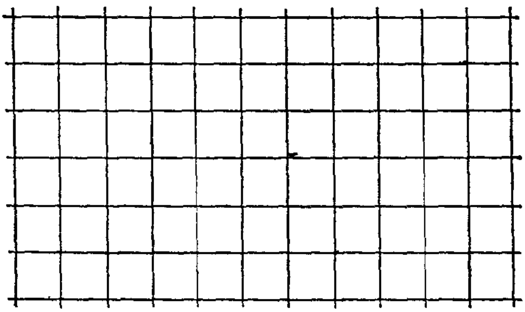


图 14

棋盘上玩“三子棋”（图 15）．一方有三个白子，另一方有三个黑子．他们轮流放子，当六个子都放入棋盘后，每个子都可以移动到相邻的方格（但是不能斜着走）．谁先把他的三个子布

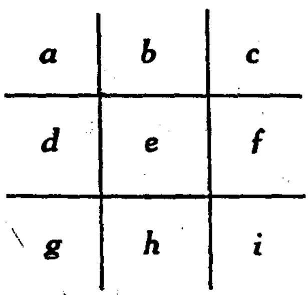


图 15

成一行、一列或对角线，谁就赢了．如果第一个人一开始就占据中间一格而以后又不走错棋的话，他就一定能赢．因为如果白方占据了 e，黑方就只能有两种走法：占据角上的格，或占据边上中间的一格．如果黑方占了 a，则白方应该占 h，迫使黑方占 b，白方再占 c，迫使黑方占 g．现在白方只要走这样两步：从 e 到 f 和从 h 到 i，他就赢了．如果黑方在开始时

选择 b，则下面可以这样走：白方 g，黑方 c，白方 a，黑方 d，然后白方走 g 到 h，再走 h 到 i 得胜，这时占据 c 的黑子将无法阻止．如果约定第一人不能先占 e，那么当双方都玩得很好时，结果是个平局．

对有些国际象棋的局势可以作严格的分析．例如伯格(J. Berger)博士的残局(图 16)，倘若白方第一着走 Q-$QKt8$，就准赢．但是如果白方以其他任何一着开始，那么只要黑方走得很有技巧，白方就不能赢．白方从上述第一着开始，而以后又走得确当的话，到第八着就胜利在望．某些残局以它们巧妙的隐蔽解法而出名．图 17 虽然不属于这一类，但是对于初学者来说，要使白方在四着内将死对方，也并不是一件容易的事．

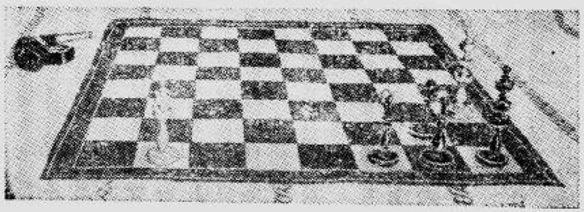


图 16

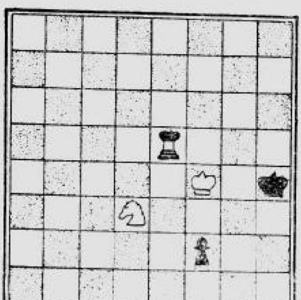


图 17

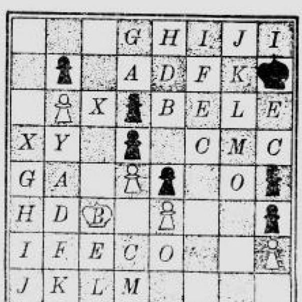


图 18

艾伯茨(K. Ebersz)博士的残局(图18)纯粹是一个数学问题. 可以严格地证明，白方要不让黑王吃掉他的任何一个兵，就只要始终将白王走到和黑王所走到的地方具有同样字母的格子上. 为此，白王必须先走到 F. 如果白方注意到这个规律，这局棋就能以平局结束，但是如果他走错一着，那么黑方就能从 X-Y 或 O-O 方向突破而领先. 一个有趣的残局应该是这样的：一方完全受他的对方支配，而还走成平局，并且任何一方偏离了走残局的规律就会输棋，他的对方只要以某种已完全确定的方式走下去就可以了.

要在同时与两位国际象棋名手 A 和 B 对弈时取得1:1的成绩，对读者来说，并不需要是位象棋大师. 只需对 A 下时走黑棋而对 B 下时走白棋，并且让 A 开局. 读者 R 在对 B 的棋盘上重复 A 的第一着. 当 B 走了应着之后，R 又在对 A 的棋盘上走这一着作为对 A 的应着. 因而在两个棋盘上走的是同一局棋. 在第一个棋盘上，R 可能得1分，0分或1/2分，相应地，在第二个棋盘上则得到0分，1分或1/2分. 因而在每一种情况下 R 都赢得一分(1+0, 0+1 或 1/2+1/2)，而 A 和 B 共得一分.

下国际象棋还没有数学理论，但在某些比较简单的游戏中却有. 例如在分成十六个小方格的盒子(图19)里装着15块标有数字的小方块，并且留有一个空格；按任意顺序把小板放到盒子里(图20)，试作适当的移动，使它们排成原来的顺序. 这个理论是这样的：把空格看做“16”，那么小板的每一种布置就都是数字1, 2, 3, …, 15, 16的一种排列. 现在先把这些数字按自然顺序1, …, 16写下来，然后适当地逐次交换相邻的两个数字，就可以得到每一种想要的顺序. 例如要得到排列2, 1, 3, 4, 5, …, 16，需要一次交换. 我们把它叫做