

一种新的拉普拉斯数值反演方法在 有限导流垂直裂缝流动中的应用

何光渝

(西安石油学院)

1994 年 9 月 北京



一种新的拉普拉斯数值反演方法在有限导流垂直裂缝流动中的应用

摘 要

本文介绍了一种拉普拉斯数值反演的新方法——Crump 方法,以及它在有限导流垂直裂缝流动中的应用,并详细介绍了 Crump 方法的反演公式和加速级数收敛的 ϵ 算法。在有限导流垂直裂缝三线性流动模型中,采用 Stehfest 方法压力导数曲线将产生强烈振动,而采用 Crump 方法将得到正确的压力导数解。

引 言

拉普拉斯数值反演在油气井现代试井分析中有着广泛的应用。目前,国内外最常用的一种方法是 Stehfest^[1]方法。Stehfest 方法简单易行,计算时间短。然而该方法也有很多缺点,参数 N 既受拉普拉斯空间解的影响,又受时间 t 及各种其它参数的影响,误差不能事先估计,更不能减少。特别是在解的曲线有陡峭变化时,要发生数值弥散和振荡。

本文所介绍的 Crump 方法既保持了 Stehfest 方法的简单、易行的优点,又克服了上述方法全部缺点。我们采用 Crump 方法计算了有限导流垂直裂缝三线性滚动模型中无量纲井底压力及其导数解。

Crump 方 法

Crump 方法实质上是梯形近似方法^[2]。设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换象函数空间解为 $F(s)$,则原函数 f 的数值反演解为

$$f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{T} \left[\frac{1}{2} F(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \left(F \left(\alpha + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \cdot \cos \frac{k\pi t}{T} - \operatorname{Im} \left(F \left(\alpha + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \cdot \sin \frac{k\pi t}{T} \right] \right] + E \quad (1)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, E 为误差, Re 为实部, Im 为虚部, α 和 T 为需要给定的参数。误差 E 为

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi T} f(2nT + t) \quad (2)$$

由拉普拉斯变换定义可知, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, 则式(2)可改为

$$E \leq Me^{\alpha t} e^{-2T(\alpha - \alpha)} \quad 0 \leq t < 2T \quad (3)$$

Crump 方法的计算过程为:

(1) T 的选取, 应有 $2T > t_{\max}$, 即 $T > \frac{t_{\max}}{2}$ 。

(2) α 的选取, 若所期望的相对误差为 E ($E = \frac{E}{Me^{\alpha t}}$), 由式(3)可得 α 的选择为

$$\alpha = \alpha - \frac{\ln E}{2T} \quad (4)$$

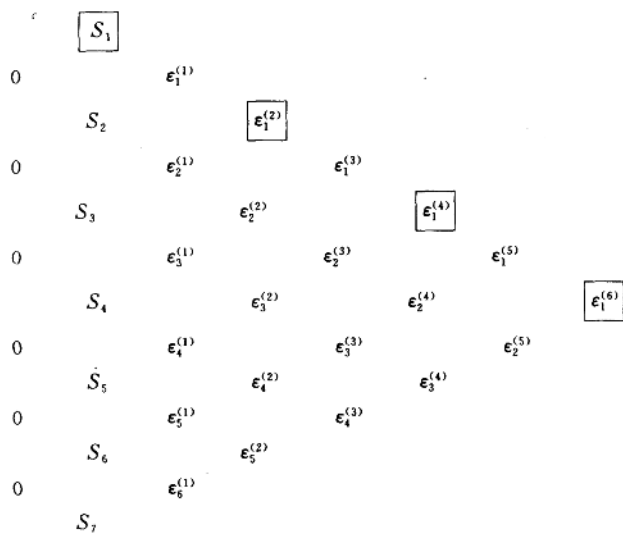
式中 α 取稍大于 $\max(\operatorname{Re}(P))$ 的值, P 为 $F(s)$ 的奇点。

(3) T 和 α 选取好后, 即可利用式(1)得到拉普拉斯数值反演的结果。

在 Crump 方法中, 计算机的 CPU 时间主要用于正弦、余弦函数的计算及级数求和上。数学中, 有些级数收敛很慢, 即使在 500 项之后, 在第三位小数上仍有改变。式(1)中的级数即属于此类级数。

为了节省计算机计算时间, 必须加快级数收敛。目前加快级数收敛的方法有快速傅里叶变换(FFT), 欧拉变换方法(ET, Euler Transformation)和 ϵ 算法(EPAL, epsilon algorithm)。经过数值试验, ϵ 算法在加快收敛速度方面优于其他两种方法。

ϵ 算法为非线性变换。假设我们要求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和的近似值, 其部分和为 $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$, $k = 1, 2, \dots, 2N+1$, 则可以构造一个非线性插值三角形:



我们有

$$\epsilon_{k-j}^{(j+1)} = \epsilon_{k-j+1}^{(j)} + \frac{1}{\epsilon_{k-j+1}^{(j)} - \epsilon_{k-j}^{(j)}} \quad (5)$$

其中 $\epsilon_k^{(0)} = S_k, \epsilon_k^{(-1)} = 0$ 。在一定条件下, 插值三角形中用方框标出的元素组成一个更快的收敛序列。即级数 $\epsilon_1^{(0)}, \epsilon_1^{(2)}, \epsilon_1^{(4)}, \dots, \epsilon_1^{(2N)}$ 非常逼近于级数 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 。但 $\epsilon_1^{(4)}$ 序列收敛速度大大快于 S_k 序列。一般来说, $\epsilon_1^{(29)}$ 即相当于 S_{1000} , 也就是说原序列需取 1000 项求和, 而 ϵ 序列只需取 29 项即可。 ϵ 序列的稳定性已有文献证明。

Crump 方法在有限导流垂直裂缝三线性流动模型中的应用

首先, 我们在表 1 和表 2 给出 Crump 方法和 Stehfest 方法的数值比较。从表 1 可看出, Stehfest 方法当取不同的 N 时, 其精度是不一样的。在此例中 $N=16$ 计算结果最好, 然而在其他例子中却是 $N=10$ 最好。说明 N 的选取比较盲目。

表 1 Crump 方法和 Stehfest 方法计算结果比较

t	EXACT	Crump 方法	$f(t) = e^{-t} \quad F(S) = 1/(S+1)$		
			Stehfest 方法		
			$N=10$	$N=12$	$N=16$
1.0	.36788	.36790	.36779	.36787	.36788
2.0	.13534	.13534	.13562	.13539	.13534
3.0	.04979	.04979	.05026	.04988	.04979
4.0	.01832	.01832	.01844	.01829	.01831
5.0	.00674	.00674	.00645	.00659	.00673
6.0	.00248	.00248	.00197	.00230	.00247
7.0	.00091	.00091	.00039	.00077	.00092
8.0	.00034	.00034	-.00009	.00027	.00035
9.0	.00012	.00012	-.00017	.00012	.00014
10.0	.00005	.00005	-.00011	.00010	.00006

表 2 Crump 方法和 Stehfest 方法计算结果比较

t	EXACT	Crump 方法	Stehfest 方法		
			$N=10$	$N=12$	$N=16$
1.0	0.42074	0.42074	0.39675	0.41808	0.42088
2.0	0.90930	0.90930	1.12896	1.01568	0.89325
3.0	0.21168	0.21168	-0.49489	-0.03996	0.33501
4.0	-1.51360	-1.51361	-1.52136	-2.01051	-1.89921
5.0	-2.39731	-2.39732	-0.60629	-1.05756	-2.35135
6.0	-0.83825	-0.83825	0.22845	0.47836	0.56260
7.0	2.29945	2.29945	0.44842	0.89431	2.16533
8.0	3.95743	3.95744	-0.35414	0.60323	1.33167
9.0	1.85453	1.85454	-0.20158	0.22178	-0.00410
10.0	-2.72011	-2.72008	-0.08479	-0.01929	-0.66477

表 2 表明在某些算例中 N 无论取多少,很多点都和精确解相差甚远。而 Crump 方法可以预估误差,表 1、表 2 中 Crump 方法均取 $N=29$,相对误差为 10^{-6} ,其计算结果与精确解相当吻合。

其次,我们将 Crump 方法和 Stehfest 方法应用于有限导流垂直裂缝三线型流动模型中。

1. 基本假设

(1)在无限大均质等厚度油藏中只压开一条矩形垂直裂缝,该裂缝相对于井筒对称,其半长为 L_f ,宽度为 b_f ,高度为 h_f ,其 1/4 圆周流动区域划分如图 1 所示。

(2)地层基岩及流体具有常物性。

2. 控制方程

根据三线型流模型及上述基本假设,对裂缝和地层流动应用质量守恒定律、达西渗流定律和状态方程式,并将变量无量次化,得到以下流动的无因次控制方程。

(1)裂缝流动 ($0 \leq x_D \leq 1, 0 \leq y_D \leq b_D$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P_{1D}}{\partial x_D^2} + \frac{2}{C_{1D} \cdot h_{1D}} \cdot \frac{\partial P_{1D}}{\partial y_D} \bigg|_{y_D=b_D} = \frac{1}{\eta_{1D}} \frac{\partial P_{1D}}{\partial t_{1D}} \\ \frac{\partial P_{1D}}{\partial x_D} \bigg|_{x_D=0} = -\frac{\pi}{C_{1D} h_{1D}} \cdot \left[1 - S_{w1D} \cdot \frac{dP_{wD}}{dt_{1D}} \right] \\ P_{1D} \big|_{x_D=0} = P_{wD} \\ \frac{\partial P_{1D}}{\partial x_D} \bigg|_{x_D=1} = 0 \\ P_{1D} \big|_{t_{1D}=0} = 0 \\ P_{wD} \big|_{t_{1D}=0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(2) P_1 区流动 ($0 \leq x_D \leq 1, b_D \leq y_D < \infty$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P_{1D}}{\partial y_D^2} + \frac{\partial P_{2D}}{\partial x_D} \bigg|_{x_D=1} = \frac{\partial P_{1D}}{\partial t_{1D}} \\ \left[P_{1D} - \frac{2}{\pi} S_{1D} \cdot \frac{\partial P_{1D}}{\partial y_D} \right]_{y_D=b_D} = P_{1D} \\ \lim_{y_D \rightarrow \infty} P_{1D} = 0 \\ P_{1D} \big|_{t_{1D}=0} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(3) P_2 区流动 ($1 \leq x_D < \infty, b_D \leq y_D < \infty$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P_{2D}}{\partial x_D^2} = \frac{\partial P_{2D}}{\partial t_{1D}} \\ P_{2D} \big|_{x_D=1} = P_{1D} \\ \lim_{x_D \rightarrow \infty} P_{2D} = 0 \\ P_{2D} \big|_{t_{1D}=0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

上式中 x_D, y_D 为无量纲空间坐标; P_{wD}, P_{1D}, P_{2D} 依次为井底、裂缝、 P_1 区与 P_2 区的无量纲压力; C_{1D} 为无量纲裂缝导率; η_{1D} 为裂缝、地层水力扩散率之比; t_{1D} 为无量纲时间; S_{w1D} 为无量纲井筒储存系数; S_{1D} 为裂缝表皮因子; b_D, h_{1D} 为无量纲裂缝宽度和高度。

3. 控制方程的求解

对上述控制方程(6)、(7)、(8)取拉普拉斯变换,并顺序求解式(8)、(7)、(6),可得到井底压力 P_{wD} 在拉氏空间的解为

$$\bar{P}_{wD} = \frac{\pi}{C_{1D} h_{1D} S x \text{th} x + \pi S^2 S_{w1D}} \quad (9)$$

其中: $x = \left(\frac{S}{\eta_{1D}} + \frac{2}{C_{1D} h_{1D}} \cdot \frac{\Omega}{1 + \frac{2}{\pi} S_{1D} \Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$; $\Omega = (S +$

$+S_l^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$; S 为拉氏空间变量。

图2是分别采用 Stehfest 方法和 Crump 方法计算的压力导数曲线比较,显然,在导数曲线上无量纲时间为 10^{-5} 附近,Stehfest 方法计算的结果出现剧烈振荡。图3是采用 Crump 方法计算压力和压力导数得到的结果,说明了 S_{wD} 和 S_l 对压力和压力导数典型曲线的影响。

结 论

(1) Stehfest 方法对不同的拉普拉斯空间象函数要取不同的求和项数 N ,且同一象函数取不同的 t 所得结果的精度也不同,无规律可循,无法预估误差。

(2) Crump 方法在进行拉普拉斯数值反演中,可预估误差,控制误差大小,结果精确。

(3) 在曲线陡变的附近,Stehfest 方法会出现

数值弥散及振荡现象,而 Crump 方法对此作出了重大改进。

(4) Crump 方法采用 ϵ 算法加速级数收敛后求和项数 N 取 22 左右,相对误差可达 10^{-6} ,方法简单易行。

可见,在油气井试井中,若采用 Crump 方法计算典型曲线将更为精确、可靠。

参 考 文 献

- 1 Stehfest H. Numerical Inversion of Laplace Transform. Comm. ACM, 1970, 13(1): 47~49
- 2 Crump K S. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation. J. ACM, 1976, 23(1): 89~96
- 3 Azari M et al. A Complete Set of Laplace Transforms for Finite-Conductivity Vertical Fractures Under Bilinear and Trilinear Flows. SPE, 20556, 65th SPE Annual Technical conference and Exhibition, New Orleans, Sept. 1990, 23~26
- 4 何光渝. FORTRAN 77 算法手册, 科学出版社, 1993

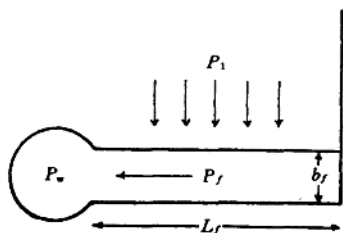


图1 裂缝三线性流动模型

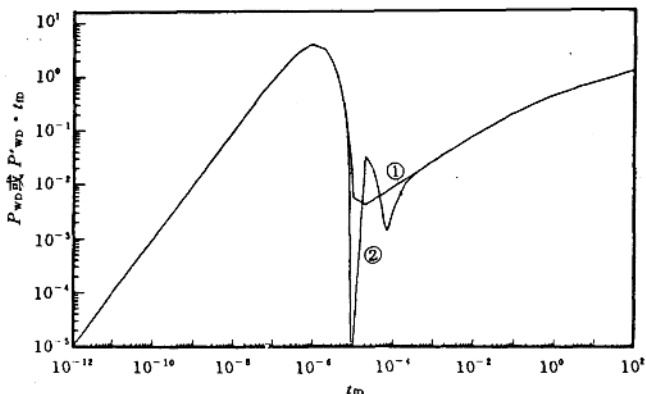


图2 Crump 方法和 Stehfest 方法压力导数曲线的比较

①为 Crump 方法; ②为 Stehfest 方法; $C_{ID} \cdot h_{ID} = 1.0$, $S_l = 1.0$, $\eta_{l1} = 10^{12}$, $S_{wD} = 10^{-7}$

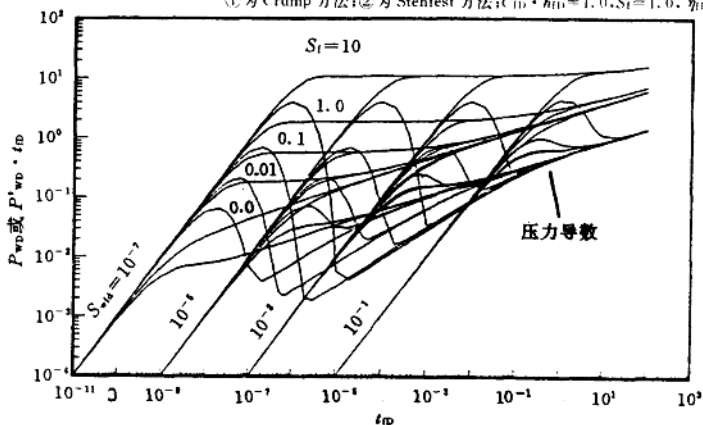


图3 井筒存储 S_{wD} 和裂缝表皮因子 S_l 对压力和压力导数典型曲线的影响

图中 $C_{ID} \cdot h_{ID} = 1.0$, $\eta_{l1} = 10^{12}$

石油物探局制图印刷厂
照排印刷