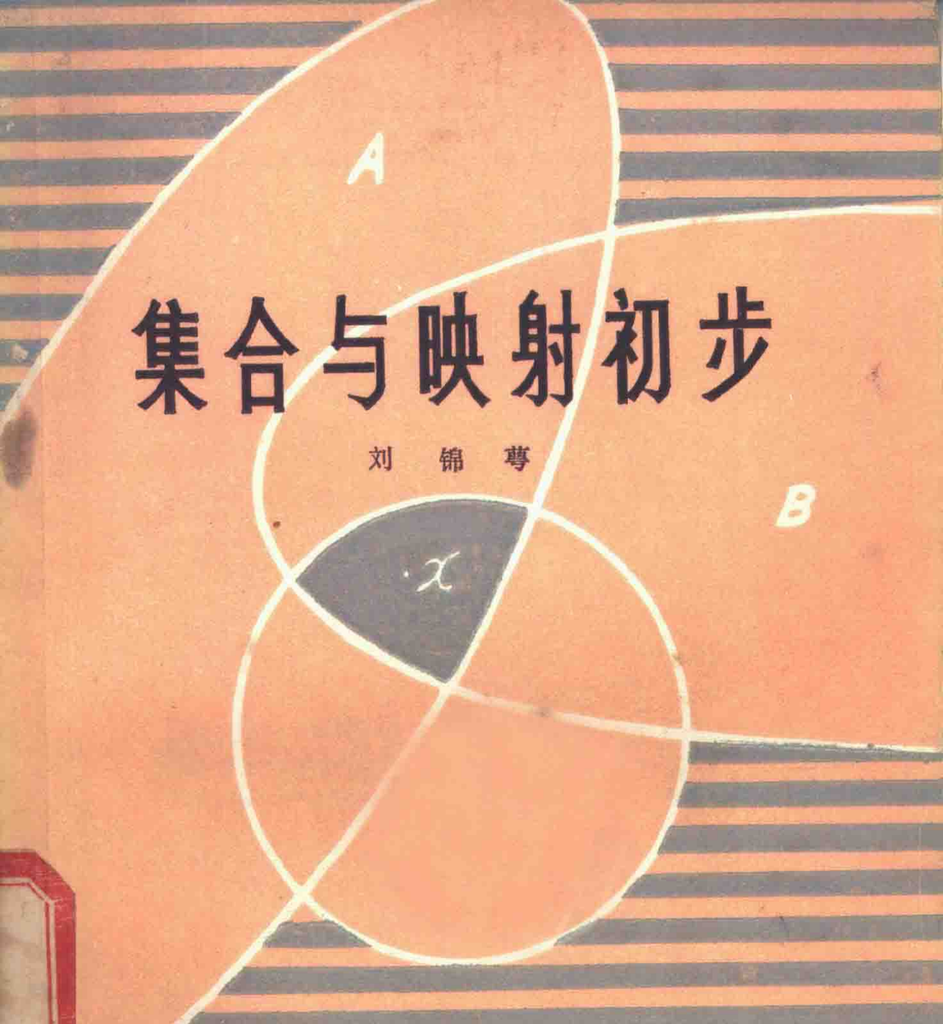
集合与映射初步

刘锦萼



湖北人民出版社

集合与映射初步

刘锦萼

è

·

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

黄冈县印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　4.5 印张　101,000 字

1979 年 2 月第 1 版　1979 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—26,500

统一书号：13106·43　定价：0.34 元

前　　言

集合与映射都是现代数学的最基本的概念和基础知识，它们的观点和方法已经渗透到几乎所有的数学领域，成为许多数学分支的基础。

这本书的重点放在讲述有关集合与映射的基本概念和基本运算方面，并配有大量的例题和习题，以便初次接触的读者学起来容易一些。同时为了便于读者今后进一步学习较深的现代数学知识，还选编了一些为后继课程“搭桥”的内容，其中较难的部分用 * 标出。

本书是一本主要为中学数学教师写的有关集合与映射的入门知识小册子。读者只要具有高中文化程度就能阅读本书的大部分内容。

本书是在华中师范学院黄石分院党委和数学系党支部的热情鼓励、关怀和支持下写成的。小册子的篇幅不长，但得到多方面的关心和帮助。初稿完成后，曾在本院数学系教师中传阅，并经集体讨论，提出了不少有益的修改意见。特别是武汉大学数学系齐民友副教授，认真地审阅了全稿，提出了许多指导性的意见。华中师范学院数学系陆秀丽副教授也提出了不少宝贵的意见。所有这些都使编者得益非浅，在此表示衷心的谢意。

由于编者的水平所限，编写时间也比较仓促，一定会有许多谬误和缺点，殷切地期望广大读者随时给予批评和指正。

编者

1978. 7

目　　录

第一章 集合及其运算

§1 集合概念

集合是现代数学的最基本的概念之一．数学中许多麻烦的叙述可以通过集合和集合运算的形式，简单、明了和形象地表示出来．现在，集合的概念和思想方法已经渗透到几乎所有的数学领域，成为数学各分支的基础．

但是，要想把什么叫做“集合”说得很清楚，或者说给“集合”下个定义，并不容易．正好象几何中的“点”和“直线”一样．不过集合这个概念对一般人说来，也并不是陌生的．因此我们用不着在说明什么是集合这个问题上多纠缠．我们认为集合就是一些确定的对象的汇总．这些对象称为这个集合的**成员**或**元素**．这里我们用了“确定”这个字眼，它意味着对于每一个集合来说，任何事物或者是属于这个集合，或者不属于该集合，二者必居其一，而不能得兼．

通常用大写字母 A、B、C、D…来表示集合；而用小写字母 a、b、x、y…来表示元素．当然这不是不可改变的规定．

如果 A 是一个集合，x 是 A 的元素，我们就记作 $x\in A$，读作“x 属于A”．x 若不是 A 的元素，则记作 $x\overline{\in}A$，读作“x 不属于 A”．

〔例 1-1-1〕一个教室中学生的全体组成一个集合 A；这个教室中男学生的全体组成一个集合 B；这个教室中女学生的全体组成一个集合 C；这个教室中教师的全体组成一个集合 D；

这个教室中师生的全体组成一个集合 E.

〔例 1-1-2〕在数学中有一些常用的集合，有其惯用的记号. 它们是：

N 代表所有自然数组成的集合；

Z 代表所有整数组成的集合；

Q 代表所有有理数组成的集合；

R 代表所有实数组成的集合；

C 代表所有复数组成的集合.

在以后的叙述中，如果我们不作另外说明，将沿用这些记号.

我们还可以举出另外一些数的集合. 比如，F 代表大于 3 的实数的全体所成的集合；G 代表小于 -2 的有理数的全体所成的集合；H 代表小于 0 的自然数的全体组成的集合.

就〔例 1-1-1〕来说，这个教室里的女学生小张是属于集合 A 的，从而也是属于集合 E 的，而且她还属于集合 C. 但是，这个教室里的黑板、课桌、粉笔都不属于集合 A.

在〔例 1-1-2〕中，$1\in N$，但是 $-1\overline{\in} N$；$-1\in Z$，但 $\frac{1}{2}\overline{\in} Z$；$\frac{1}{2}\in Q$，但 $\sqrt{10}\overline{\in} Q$；$\sqrt{10}\in R$，但 $5+4i\overline{\in} R$，而是 $5+4i\in C$；$4\in F$，且 $4\frac{2}{3}\in F$，但 $3\overline{\in} F$；$-3\in G$，$-\frac{5}{2}\in G$，但 $-2\overline{\in} G$，$-\frac{4}{3}\overline{\in} G$ 等等. 对于集合 H 来说，则没有元素能够属于它，或者说它不包含任何元素.

从上面所举的例子可以知道，在我们谈及某个集合的时候，对于一个对象来说，它或者属于这个集合，或者不属于这个集合. 这一点必须是确定的，不能有半点含糊，只有这样才算是给定了一个集合.

因此，如果说，给出一个"某中学里高个子学生所组成的集合"，实际上，是不符合上面指出的对集合概念的要求的．因为所谓"高个子"这个概念十分含糊．我们无法确定身高 1.75 米的学生能否算是"高个子"，同样也无法确定身高 1.70 米、1.80 米，……是不是属于这个集合．因此，在古典集合论，也就是现在我们通称的集合论中，这样来给出的对象的汇总不能算是构成一个集合．

类似的例子还有：

"充分大于 1 的自然数"不能构成一个集合．因为我们无法确定自然数 5，10，100…等等是否算是"充分大于 1"，也就是说"充分大于 1"这个概念没有确定的界限，是含糊的．

"好看的花布"也不能构成一个集合．因为任意拿一种花布来，没有确定的标准来说它是"好看"还是"不好看"．

甚至，严格地说象"所有动物"这样的汇总也不能构成一个集合．因为虽然马、牛、羊、鸡、鸭等显然是动物，而米、树、水、电等当然不是动物，但是，象霉菌、病毒这类生物就难以判断它们是否属于动物．

总之，集合的最重要的特点是：给出一个对象总可以确定是不是它的成员．因此，虽然集合是一个不加定义的基本概念，但是必须正确理解和表达才能准确地使用这个概念．

我们把不含有任何元素的集合称为**空集**．例如方程式 $x^2+1=0$ 的实数解所组成的集合就是空集的例子．通常我们用 θ 或 ϕ 表示空集．

初看起来，空集这个概念有些牵强附会．但是，空集的概念并不是无用的．因为根据某一规则把诸元素汇总成一集时，我们未必总能肯定这种元素一定存在，也就是说所构成的集合未见得就不是空集．另外，在进行集合的运算时，空集更是必

不可少的．这一点在后面将会看得很清楚．

1．集合的表示法

集合一般有两种表示方法．

(1) 列举法

用列举法表示集合时，在花括号内列出元素的全体或一些有代表性的元素，各元素之间用逗号分开．

例如：$A=\{1,2,3,4,5\}$．
意思就是“A 是由头五个自然数所组成的集合．”

又如：B＝{武汉，黄石，十堰，黄冈，宜昌，荆州，孝感，恩施，郧阳，襄阳，咸宁}．意思就是“B 是由湖北省的地、市一级行政区域组成的集合”．

再如：自然数集 $N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$．尽管元素是列举不尽的，但是已经列出了有代表性的元素．省略号表示可以继续顺次取出集合 N 的其它元素．

〔例 1-1-3〕用列举法表示“从 -1 到 5 的整数的平方数”这个集合．

〔解〕从 -1 到 5 的整数是 $-1,0,1,2,3,4,5$．它们的平方数为 $1,0,1,4,9,16,25$．所以这个集合可表示为

$$\{0,1,4,9,16,25\}.$$

其中 1 这个元素虽然作为 (-1) 和 1 的平方要重复出现两次，但由于我们仅关心它是集合的成员，所以在列出时，只要记一次就可以了．

(2) 特性表示法

对于所描述的集合利用它本身的特性来表示它，这总是可以办到的．

例如对自然数集 $N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$ 我们可以表示成

N＝{n | n 是一个自然数}．

上式读作"N 是所有元素 n 的集合，而其中 n 是一个自然数". 在这里，字母 n 是作为一个元素的代表，而铅垂线 | 后面列出这个元素所具备的条件.

一般地可以表示为

$$E=\{x \mid x \text{ 具有性质} P(x)\}.$$

其中 x 是元素的一般形式，P(x) 则是一句话，更确切地说是关于 x 的一个命题，它能描述 x 的性质. 或者说 $\{x \mid x$ 具有性质 $P(x)\}$，也就是所有使命题 P(x) 成立的 x 所组成的集合.

更富有启发性的例子是集合

$$\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

表示闭区间 [0, 1]；集合

$$\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\},$$

表示直角坐标平面上以原点为圆心的单位圆圆周上的所有点；集合

$$\{x \mid (x+1)(x-3)>0\},$$

表示不等式 $(x+1)(x-3)>0$ 的所有解；集合

$$\{(x, y) \mid x+y \leqslant 1\},$$

表示平面上坐标 x 和 y 满足 $x+y \leqslant 1$ 的点的全体，实际上这就是包括直线 $x+y=1$ 的所有点在内的半个平面(图 1-1).

再如集合

$T=\{t \mid 2<t<6$, 且 t 是一个自然数$\}$，显然

$T=\{3, 4, 5\}$.

集合

$S=\{t \mid 2<t<3$，且 t 是一个自然数$\}$，显然

$$S=\theta \quad \text{或} \quad S=\phi.$$

2. **有限集合与无限集合**

若集合中的元素只有有限个，我们就称这类集合为**有限集**

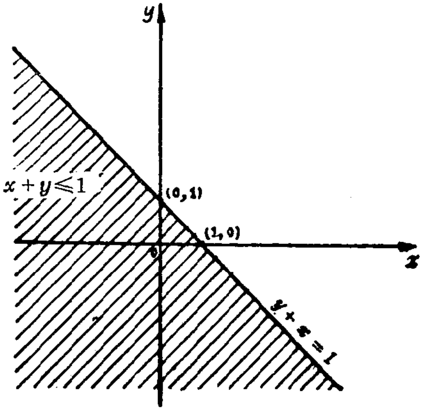


图 1—1

合，否则就称为**无限集合**.

〔例 1-1-1〕 中的集合都是有限集合. 空集 φ 也算是有限集合. 而象自然数集、有理数集、实数集以及集合

$$\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

和

$$\{(x, y) \mid x + y \leqslant 1\}$$

等等，都是无限集合.

3. 集合的子集与包含关系、集合的相等

前面讲过，集合是我们所考虑的一些对象的汇总. 在很多问题中， 为了研究和叙述上的方便， 我们常常用记号 Ω 来表示所考虑的某种对象(即元素)的全体所构成的集合，称为空间（也称为原集合、全集合、万有集合等）. 例如要对一个班级的人员进行分组，那么这个班级的所有人就构成一个空间. 当考虑一个方程式或不等式的实数解时，整个实数集就可以看作一个空间等等. 很显然，空间这个概念是针对所考虑的问题而言的. 相对于所考虑的对象来说，空间可以理解为“最大”的集

合，而被研究的一切集都是由 Ω 的元素组成的．类似地，我们也可以把空集理解为“最小”的集合．

我们往往是在某一个固定的空间 Ω 中来研究集合之间的相互关系的．

〔定义 1-1-1〕 如果集 A 的元素都是集 B 的元素，则称集 A 是集 B 的**子集**(也称 B 包含 A，或称 A 被 B 包含)，并用记号

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A$$

表示，读作“B 包含 A”或“A 包含于 B”．空集规定为任何集合的子集．如果 A 不是 B 的子集，则记为 $A \nsubseteq B$．

〔例 1-1-4〕 设 $\Omega=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，则集 $A=\{2, 4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，$C=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 都是 Ω 的子集．但 $D=\{2, 4, 9\}$ 不是 Ω 的子集，因为元素 $9 \in D$，但 $9 \notin \Omega$．

注意，这里 A 不仅是 Ω 的子集，而且同样是 B 和 C 的子集，$A \subseteq B$，且 $A \subseteq C$．

又如 N 是自然数集，Q 是有理数集，则

$$N \subseteq Q.$$

〔定义 1-1-2〕 如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，则称集 A 与集 B **相等**．并用记号

$$A=B$$

表示．

这一个定义为我们指出了一个重要的原则：要证明两个集相等，根本的途径就是分别证明每一个集里面的任意元素属于另一个集．

例如 $A=\{4, 3, 2\}$，$B=\{2, 3, 4\}$，

则
$$A=B.$$

〔例 1-1-5〕 设集合 $A=\{2, 4, 8, 6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，

$C=\{n\mid n$ 为小于 10 的偶数$\}$〔注〕，问：A 与 C 是不是相等？B 与 C 呢？为什么？

〔解〕：$A=C$，因为这两个集合的元素都是 2, 4, 6, 8.

但是 $B\neq C$，因为元素 $10\in B$，但 $10\bar{\in} C$.

两个集合 A 与 B，当 $A\subseteq B$ 时，可能为 $A=B$，也可能为 $A\neq B$，为了把这种情况分清楚，而且我们有时仅对除去 B 本身的 B 的所有子集感兴趣，因此有必要引出真子集的概念.

〔定义 1-1-3〕 如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的一个**真子集**，并记成

$$A\subset B.$$

换言之，A 是 B 的子集，但是 B 中至少存在一个不属于 A 的元素，这时就称 A 是 B 的真子集.〔例 1-1-5〕中的集合 A 就是 B 的真子集.

〔例 1-1-6〕 设 $A=\{a,b,c\}$，写出 A 的所有真子集.

〔解〕：A 的所有真子集为

$$\phi;\ \{a\};\ \{b\};\ \{c\};\ \{a,b\};\ \{b,c\};\ \{a,c\}.$$

〔定理 1-1-1〕 (1) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；(2) $A\subseteq A$.

证明从略.

只含有一个元素的集合称为**单元素集合**.〔例 1-1-6〕中的 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$都是单元素集合. 又如集合 $E=\{x\mid x-2=0\}=\{2\}$ 也是单元素集合. 应该注意，不要把单元素集合和它所含有的唯一元素本身混为一谈. 集合与元素是两个不同的概念，就好比是一家一户的“户”与户里的“人”是两个不同的概念一样. 有的户虽然只有一个人，但当它以户的名义出现时，就与

〔注〕：为明确起见，这里的偶数限于正偶数，下面提到的奇数也限于正奇数. 下同.

人的含义不同了．同样道理，包含关系“$\subseteq$”和属于关系“$\in$”也是两个不同的概念．它们分别是针对集与集之间，元素与集合之间的关系而言的．初学者务必要分清．

4. 幂集

既然集合的元素可以是任何对象，当然也可以用集合作为元素来构成新的集合——集合的集合．这种以集合为元素的集合也称为**集类**．

例如，设有三个数集 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$C=\{6,7\}$，那么由这三个集合为元素组成的集合是：$\{A, B, C\}$，或者写成 $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$．（写成后一种形式对初学者来说可能有点不习惯，但是必须注意，这是由集合 A，B，C 作为元素的集合，所以和集合 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 是完全不同的，后者的元素是一些自然数）．

特别是，一个给定的集合 S 的所有子集组成一个集合，称为 S 的**幂集**，记为 $P(S)$．

即 $P(S)=\{A \mid A\subseteq S\}$．

空集 ϕ 和集合 S 本身都是 $P(S)$ 中的成员．

例如，设 $S=\{a,b,c\}$，它的所有子集是：

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$.

因此 S 的幂集是

$$P(S)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

一般来说，如果 S 是 n 个元素组成的有限集合，则 $P(S)$ 中的元素是：空集 ϕ，各含有一个元素的 n 个集合，各含有二个元素的 C_n^2 个集合，…各含有 i 个元素的 $C_n^i=\dfrac{n!}{(n-i)!\,i!}$ 个集合等等．故 $P(S)$ 里元素的总数是

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

习　题

1. 举出一些集合的例子和不是集合的例子.

2. 若 $A=B$，能否推出 $A\subseteq B$？能否推出 $A\subset B$？

3. 如果集合 $A=\{a, b\}$，则 A 的所有子集共有多少个？ A 的真子集又有多少个？

4. 设 $\Omega=\{a, b, c, d\}$，求 Ω 的幂集 $P(\Omega)$.

5. 用集合的特性表示法来描写下列集合：

(1) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$；

(2) $B=\{1, 4, 9, 16\}$；

(3) $C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$；

(4) $D=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \cdots\}$.

6. 用列举法来描写下列集合：

(1) $S=\{x \mid x$ 是一个大于 5 小于 10 的自然数$\}$；

(2) $S=\{n \mid n$ 是一个大于 5 的自然数$\}$；

(3) $R=\{r \mid r$ 是中南地区的一个省$\}$；

(4) $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 3$，且 x 是正整数$\}$.

7. 设 $M=\{$男大学生，女大学生，教师，干部，工人$\}$，试问下列集合与 M 的关系是 $\subseteq$，$\supseteq$，$\subset$，$=$，$\neq$ 中的哪一个？

(1) $A=\{$教师，干部，工人$\}$；

(2) $B=\{$教师，书，钢笔$\}$；

(3) $C=\{$工人，男大学生，干部，教师，女大学生$\}$；

(4) $D=\{x \mid x\in M$，或 x 是农民$\}$.

8. 下列集合，哪些是有限集合？哪些是无限集合？

(1) $A=\{x \mid x^2-7x+12=0\}$；

(2) $B=\{(x, y) \mid x+y=2\}$；

(3) $C=\{n^2 \mid n=1, 2, 3, \cdots\}$；

(4) $D=\{t \mid -5\leqslant t<3$，且 t 是一个整数$\}$；

(5) $E=\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots, n^2, \cdots\}$；

(6) $F=\{x \mid x$ 是一个奇数$\}$.

§2 集合的运算

上面讲到的子集，真子集和相等集合，都是指两个集合之间的相互关系．此外，我们经常要将集合按照需要作各种各样的合并和分解．这就是说要进行集合的运算．

1．**并和交运算**

〔定义 1-2-1〕 设 A，B 是两个集合，如果把两个集合中的元素合在一起组成一个新的集合，则这个新集合就叫做 A 和 B 的**并集**（又称和集），并记为

$$A \cup B,$$

读作"A 并 B"或"A 与 B 的并"．

因此 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$．

前已提到，在作并集 $A \cup B$ 时，A 与 B 所共有的元素只"算"一次．例如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5, 6\}$．则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，而不是$\{1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6\}$．

〔例 1-2-1〕 若 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{a, c, e, f\}$，$C = \{x, y\}$，且 $D = \phi$，求下列集合：

(1) $A \cup B$；(2) $A \cup C$；(3) $A \cup D$；(4) $B \cup C$．

〔解〕：(1) $A \cup B = \{a, b, c, e, f\}$；

(2) $A \cup C = \{a, b, c, x, y\}$；

(3) $A \cup D = \{a, b, c\}$；

(4) $B \cup C = \{a, c, e, f, x, y\}$．

除了考虑两个集合的并集以外，还需要考虑更一般的情况．

设 A_1，A_2，A_3，$\cdots A_n$ 是 n 个集合，定义

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid 至少有一个\ i \leqslant n,\ 使 x \in A_i\}.$$

对于一串集合 A_1, A_2, A_3, …, A_n, …还可以定义

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

$$= \{x \mid 至少有一个自然数\ i,\ 使\ x \in A_i\}.$$

〔例 1-2-2〕 设 $A_i = \{i\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, 3, \cdots, n\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

〔例 1-2-3〕 设 $A_i = \{x \mid i-1 < x \leqslant i\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

则 $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_5 = \{x \mid 0 < x \leqslant 5\}$.

而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid 0 < x < \infty\}$.

〔定义 1-2-2〕 设 A, B 是两个集合, 如果把这两个集合中所共有的元素取出来作成一个新的集合, 则这个新的集合就叫做 A 和 B 的**交集**, 并记为

$$A \cap B,$$

读作"A 交 B"或"A 与 B 的交".

因此 $A \cap B = \{x \mid x \in A\ 且\ x \in B\}$.

例如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$,

则 $A \cap B = \{3, 4\}$.

从定义即知: $A \cap B = B \cap A$.

〔例 1-2-4〕 若 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, e, f\}$, $C = \{b\}$, $D = \phi$. 试求下列各集合:

(1) $A \cap B$; (2) $A \cap C$; (3) $B \cap D$;

(4) $(A\cup B)\cap C$; (5) $(B\cap C)\cup A$.

〔解〕:

(1) $A\cap B=\{a, c\}$;

(2) $A\cap C=\{b\}$;

(3) $B\cap D=\phi$;

(4) $(A\cup B)\cap C$ 表示 A、B 的并集与 C 的交集. 由于

$$A\cup B=\{a, b, c, e, f\},$$

故得 $$(A\cup B)\cap C=\{a, b, c, e, f\}\cap\{b\}=\{b\}=C.$$

(5) $(B\cap C)\cup A$ 表示 B、C 的交集与 A 的并集. 由于

$$B\cap C=\phi,$$

从而 $$(B\cap C)\cup A=\phi\cup\{a, b, c\}=\{a, b, c\}=A.$$

在上面的例子中, 我们看到由于 B、C 两集没有共有的元素, 所以 $B\cap C=\phi$.

〔定义 1-2-3〕 若集合 A、B 满足

$$A\cap B=\phi,$$

则称 A、B **互斥或互不相交**, 也称 A、B **分离**.

例如, 设 A 为偶数所组成的集

$$A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\},$$

B 为奇数所组成的集

$$B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\},$$

则 $$A\cap B=\phi,$$

即 A、B 互斥.

自然, 两个集合的交集的定义也可以推广到一般的情况.

设 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n 是 n 个集合, 定义

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n$$