ZhXShX

中学数学丛书

梁法驯

反三角函数与三角方程

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

反三角函数与三角方程

梁法驯

湖北教育出版社

内 容 提 要

本书全面系统地介绍了反三角函数和三角方程，在中学现行教材的基础上，对于反三角函数的运算和反三角函数间的变换关系，对于三角方程解的一些问题、三角方程组和反三角方程，都作了详尽的阐述。

本书内容翔实、叙述严谨、分析透彻、说理充分，是辅导学习教材有关知识和开展学科课外活动的较好读物。

中学数学丛书

反三角函数与三角方程

梁法驯

·

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

嘉鱼县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 4.75印张 1插页 108，000字

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数：1－21，000

统一书号：7306·128 定价0.64元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟悉掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析和归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学数学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

第一章　反三角函数

§1. 反函数的概念

在高中的数学课程中，我们已经学习过函数的概念．函数的定义可以叙述如下：

在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的每一个值，按某一对应关系，y 总有唯一确定的值和它对应，那么 y 就叫做 x 的**函数**，通常用 $y=f(x)$ 来表示，x 叫做**自变量**．自变量 x 的取值范围叫做函数的**定义域**，记为 X．和 x 的值相对应的 y 值叫做**函数值**，所有函数值的集合叫做函数的**值域**，记为 Y．

现在，我们来导出反函数的概念．

考察下面三个函数：

(1) 函数 $y=\dfrac{2x+10}{5}$，定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=(-\infty,+\infty)$；

(2) 函数 $y=10^x$，定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=(0,+\infty)$；

(3) 函数 $y=x^2$，定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=[0,+\infty)$．

对这三个函数，我们来研究下面的问题：对于 Y 中的一个 y 值，在 X 中究竟有多少个 x 的值，通过所给的对应规律，使这个 y 值与这些 x 的值对应呢？讨论上面这三个函数，回答

是不一样的．在(1)中，对 Y 中的每一个 y 值，只有一个 x 值与它对应，即 $x=\frac{5y-10}{2}$；(2)也有同样的性质：对于 Y 中的每一个 y 值，只有一个 x 值与它对应，即 $x=\lg y$；但(3)的函数 $y=x^2$ 却不同，对于 Y 中的每一个正实数 y，有两个不同的 x 值：$x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ 与它相对应．现在，我们来着重研究(1)和(2)的特性，并把它概括如下：

设 $y=f(x)$ 是这样的函数，它的定义域是 X，值域是 Y，并且对于 Y 中的任何一个 y 值，通过函数 f，都有唯一的 x 值和它相对应（如同(1)和(2)的函数那样)，这时，如果我们把 y 看作自变量，根据函数的定义，x 便是 y 的函数了，它是由函数 $y=f(x)$ 产生的，我们把它叫做**函数 $y=f(x)$ 的反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$.*

这时，$y=f(x)$ 当然也可以说是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数．所以，可以认为这两个函数互为反函数，前者的定义域和后者的值域相同，前者的值域和后者的定义域相同．并且，由反函数的定义直接知道．

$$f^{-1}(f(x))=x, \qquad f(f^{-1}(y))=y \qquad \text{(公式1.1)}$$

例如，函数 $y=\frac{2x+10}{5}$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，它的反函数 $x=f^{-1}(y)=\frac{5y-10}{2}$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$．又如函数 $y=10^x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，它的反函数 $x=f^{-1}(y)=\lg y$，定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$．

再如函数 $y=x^2$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$，

---

* 注意：记号 f^{-1} 表示 f 的反函数，而不是表示 f 的 -1 次方或 $\frac{1}{f}$．

它不存在反函数．这是因为把 y 当作自变量时，对于每一个 y 的正实数值，例如 $y=4$，由这个关系式有两个 x 值：$x_1=2$ 和 $x_2=-2$ 与这个 y 值相对应．但如果我们把这个函数的定义域缩小，使它的定义域为 $[0, +\infty)$，即现在我们考察的是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数 $y=x^2$，（想想看，它和定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $y=x^2$ 是否相同？）那么它就存在反函数 $x=\sqrt{y}$ 了，这个反函数的定义域为 $[0, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$．同样的，如果我们把函数 $y=x^2$ 的定义域限制为 $(-\infty, 0]$，那么它也存在反函数 $x=-\sqrt{y}$，这个反函数的定义域为 $[0, +\infty]$，值域为 $(-\infty, 0]$．

从这里我们可以看到，已知一个函数 $y=f(x)$，要求出它的反函数，即解出 $x=f^{-1}(y)$ 的形式，一般来说，并不总是可能的．究竟什么函数才有反函数，又如果一个函数不存在反函数，那么怎样限制这个函数的定义域，使得在更小的定义域上考察这个函数，它才有反函数呢？要回答这些问题，我们就必须研究，在什么条件下反函数一定存在？关于这个基本而又重要的问题，我们有下面的定理．

定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在某区间 X 内严格单调增加（或减少），又设与这个 X 相对应的值域是 Y，那么在 Y 内必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，它在 Y 内也是严格单调增加（或减少）．

证明： 设函数 $y=f(x)$ 在 X 内严格单调增加，则根据增函数的定义，较大的自变值对应于较大的函数值，即对 X 内的任意两个值 x_1 和 x_2，如果 $x_1<x_2$，必有 $f(x_1)<f(x_2)$．

若给定 Y 内的一个值 y_1，显然在 X 内一定有一个值 x_1 和它对应，使 $y_1=f(x_1)$．又因为 $y=f(x)$ 是增函数，在 X 内决不会有两个不同的值 x_1 和 x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$．因此，对 Y 内的每一个 y 值，在 X 内有一个且只有一个 x 值和它对应

起来，这就证明了反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在.

现在再来证明 $x=f^{-1}(y)$ 是 Y 内的严格单调增加的函数. 设 y_1，y_2 是 Y 内的任意两点，且 $y_1<y_2$，又设 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$. 于是，对于这两个值 x_1 和 x_2，只有下面三种可能性：

i) 如果 $x_1>x_2$，则根据函数 $f(x)$ 单调增加，必有 $y_1>y_2$，这违反了原来的假定.

ii) $x_1=x_2$ 也不可能. 因为这样就有 $y_1=y_2$，也违反原来的假定.

因此，只有第 iii) 种情形 $x_1<x_2$ 是可能的. 这就证明了 $f^{-1}(y)$ 是 Y 内严格单调增加的函数.

减函数情形的证明，与此相类似. 证毕.

由上面的定理我们就知道，要使函数 $y=f(x)$ 在区间X上有反函数，只要 $f(x)$ 在这个区间X上具有单调性就行了.

上面我们用 $x=f^{-1}(y)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数，从图形上来看，在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图象和 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是相同的，所不同的仅仅是前者的自变量是 x，后者的自变量是 y. 由于习惯上我们总规定用横坐标 x 表示自变量，纵坐标 y 表示函数，所以我们通常都把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式，也就是说，把 $y=f^{-1}(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 当然，反过来 $y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，即它们互为反函数. 例如，$y=\frac{2x+10}{5}$ 和 $y=\frac{5x-10}{2}$

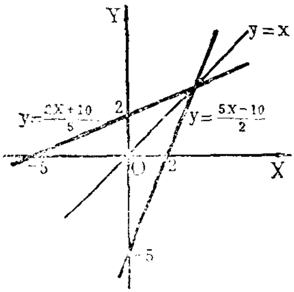

图 1.1

互为反函数；$y=10^x$ 和 $y=\lg x$ 互为反函数．这样一来，在同一直角坐标系中，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与原函数 $y=f(x)$ 的图象一般是不同的．例如，函数$y=\dfrac{2x+10}{5}$与它的反函数$y=\dfrac{5x-10}{2}$的图象是两条不同的直线(图 1.1)．

一般的，在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象有如下的关系：

定理 2 在同一直角坐标系内(x 轴和 y 轴取相同的长度单位)，函数 $y=f(x)$的图象与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称．

证明：设 $P(a, b)$是函数 $y=f(x)$的图形上的任意一点(图1.2)，从反函数的定义知道，$P'(b,a)$是反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形上的一点．

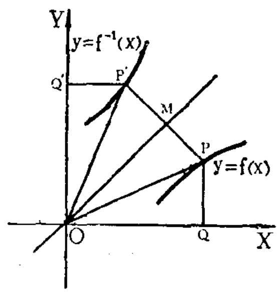

图 1.2

现在我们来证明点 P 和 P' 关于直线 $y=x$ 对称．为此连结点P 和 P'，线段 PP' 与直线 $y=x$ 交于点 M，过点 P 作 $PQ\perp OX$，过点 P' 作 $P'Q'\perp OY$．因为$\triangle POQ\cong\triangle P'OQ'$(两直角边对应相等)，所以 $OP=OP'$，$\angle POQ=\angle P'OQ'$；又因 $\angle MOQ=\angle MOQ'=45^\circ$，所以$\angle MOP=\angle MOP'$，即 OM 是 $\angle POP'$ 的平分线．

对于等腰三角形 POP'，顶角的平分线就是它的对称轴．因此，点 P 和 P' 关于直线 $y=x$ 对称．因为点 P 是 $y=f(x)$ 图象上的任意一点，所以函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．证毕．

根据这个定理，我们就容易从函数 $y=f(x)$ 的图象作出它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象．

练 习 1.1

1．下列函数是否是相同的函数，为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$；

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(3) 定义在区间 $[0,\ +\infty)$ 上的函数 $y=x^2$ 与定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的函数 $y=x^2$；

(4) 定义在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的函数 $y=\sin x$ 与定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的函数 $y=\sin x$．

2．求下列函数的反函数，并指出反函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$；

(3) $y=x^3+1$；　　(4) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$，$(x\geqslant 0)$；

(5) $y=\sqrt{1-x^2}$，$(-1\leqslant x\leqslant 0)$；

(6) $y=\lg(9x-4)$．

§2．反正弦函数

从正弦函数 $y=\sin x$ 的图象(图 1.3)可以看到，不同的 x 值可能对应相同的 y 值，因此，对于 -1 到 1 之间的每一个确

定的 y 值，与它对应的 x 值就不止一个了．例如，与 $y=\frac{1}{2}$ 对

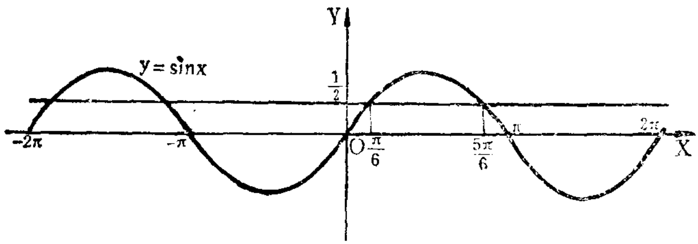

图 1.3

应的 x 值有 $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 和 $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$(k\in Z)$．因此，如果我们是在整个定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 来考察正弦函数 $y=\sin x$，那么它就不存在反函数．但如果我们不是考察任意的 x 值，而只取某一个区间，使得正弦函数在这个区间内是单调的，这时由 § 1 的定理 1，我们知道，在这个区间内的正弦函数就存在反函数．

根据正弦函数的性质，我们知道它的单调区间是：

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$$

和
$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],\quad k\in Z.$$

在这无穷多个区间中的任何一个区间内，正弦函数都有反函数．要对这无穷多个反函数都来研究，既不方便，也没有必要，因为它们彼此之间有密切的联系（见练习 1.2 第 8 题），我们只需对其中一个反正弦函数研究清楚了，其它的反正弦函数也就容易弄清楚了．那么我们究竟选择那一个区间上的反正弦函数作为代表来研究才比较方便呢？一般的，所选择的区间应满足下列三个条件：

(1) 这个区间是给定的函数的单调区间，这样就保证它的反函数存在；

(2) 在这个区间上该函数是连续的，并且能够取得它可能取得的一切值，这样就能够反映该函数的全部变化情况；

(3) 这个区间包含所有常用的锐角，这样就便于我们研究和应用.

满足以上三个条件的区间，叫做这个函数的**主值区间**. 我们看到，对于正弦函数来说，它的主值区间就是闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. 因此，如果我们把正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域缩小为 $-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$的闭区间，那末根据§1的反函数的存在定理，这时它的反函数就存在. 于是，我们有

定义 在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上，正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数，叫做**反正弦函数**，记作

$$x=\operatorname{arc\,sin} y.$$

为与习惯上一致，我们用 x 来表示自变量，y 表示函数，所以反正弦函数通常记作

$$\boldsymbol{y=\operatorname{arc\,sin} x.}$$

它的定义域是$[-1, 1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

根据反正弦的定义，对于从 -1 到 1 之间的每一个 x 值，$\operatorname{arc\,sin} x$ 就表示在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的一个确定的角，这个角的正弦值等于 x. 把这段话的含意用数学式子表示就是

$$\sin(\operatorname{arc\,sin} x)=x \qquad (|x|\leqslant 1) \qquad \text{(公式1.2)}$$

例如，$\sin\left(\arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$$\sin\left[\arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

作反正弦函数的图象，只要作正弦曲线在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上一段的图形，然后再作它关于直线 $y=x$ 的对称图形，我们就得到反正弦函数的图形（如图1.4）.

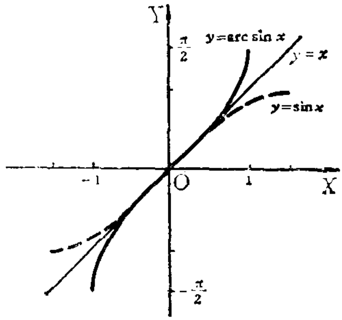

图 1.4

反正弦函数 $y=\arc\sin x$ 有以下两个重要性质：

（1）反正弦 $y=\arc\sin x$ 是增函数，即当 x 由 -1 增加到 1 时，$y=\arc\sin x$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$.

事实上，由§1的定理1，增函数的反函数仍是增函数．又因正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以它在这区间上的反函数 $y=\arc\sin x$ 是区间$[-1,\ 1]$上的增函数．

（2）反正弦函数 $y=\arc\sin x$ 是奇函数，即

$$\arc\sin(-x)=-\arc\sin x \qquad \text{（公式1.3）}$$

要证明上式左、右两边的两个角相等，我们只要证明它们的正弦值相等，并且这两个角都在正弦函数的同一个单调区间内就够了．

证明：根据（公式1.2），当 $|x|\leqslant 1$ 时，有

$$\sin[\arc\sin(-x)]=-x,$$

又利用诱导公式，得

$$\sin(-\arcsin x)=-\sin(\arcsin x)=-x,$$

这就是说，(1.3)式两边的角的正弦值都等于$-x$.

另一方面，由反正弦的定义，有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

用-1乘这个不等式的每一项，得

$$\frac{\pi}{2}\geqslant-\arcsin x\geqslant-\frac{\pi}{2},$$

即
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant-\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此，(公式1.3)两边的角都在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内，但在正弦函数的这个单调区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内，正弦值等于$-x$的角只有一个，这就证明了(公式1.3)，即$y=\arcsin x$是奇函数.

例 1 求下列反正弦的值.

(1) $\arcsin 0.6536$;

(2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解：(1) $\arcsin 0.6536$表示从$-90°$到$90°$的一个角，这个角的正弦值等于0.6536. 查表得

$$\sin 40°\,49'=0.6536,$$

所以
$$\arcsin 0.6536=40°\,49'.$$

(2) 正弦值等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$的锐角是$\frac{\pi}{3}$.

因为
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

而且
$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2},$$

所以 $$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

例 2　求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)$;

(2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

(3) $\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

解：(1) 根据定义，$\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7}$.

(2) 设 $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$，$\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. 因为 $\sin\alpha>0$，所以 α 为第一象限内的角，因此，$\cos\alpha$ 取正号，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

所以 $$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

(3) 设 $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=\alpha$，则 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 α 为第四象限的角. 因此，$\cos\alpha$ 取正号，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

又 $$\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

所以 $$\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}.$$

例 3　求下列函数的定义域：