网 络 教 育 专 升 本 考 试 辅 导

童裕孙 陆章基 黄云敏 主编

Gaodeng Shuxue

网 络 教 育 专 升 本 考 试 辅 导

高等数学

復旦大學出版社

网络教育专升本考试辅导

高等数学

童裕孙　陆章基　黄云敏　主编

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/童裕孙,陆章基,黄云敏主编.—上海:复旦大学出版社,2002.12
(网络教育专升本考试辅导)
ISBN 7-309-03445-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①童…②陆…③黄 Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 087431 号

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65642892(编辑部)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

经销 新华书店上海发行所
印刷 复旦大学印刷厂
开本 787×1092 1/16
印张 17
字数 446 千
版次 2002 年 12 月第一版 2002 年 12 月第一次印刷
印数 1—4 500
定价 26.00 元

编 委 会

内 容 提 要

本书是为网络教育专升本入学考试编写的高等数学辅导教材，适用于高等数学一和高等数学二的考前复习. 全书分上、下两篇. 上篇包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程等七章，各章节按基本概念与命题、典型例题、练习题和各章复习题编写. 其目的在于帮助学生将高等数学主要内容进行归纳、总结和整理，并根据重点释疑解难，提供了解题指导；下篇包括复习考试大纲、专题训练、综合强化训练和模拟试题等内容，便于学生考前作充分准备和自我测试.

序

网络教育的崛起,虽然只是近年来的事情,可是发展速度非常之快.随之而来的网络教育建设工作也正在全面展开,教材建设就是其中的一个方面.

根据教育部授权,网络教育具有自主招生的资格.我们通过这几年专科升本科的自主招生,深感没有一套网络教育考前辅导教材的不便.专科升本科学生的来源广泛,普通学校、自考、电大、民办学校等专科的专业教育各有差异,不仅从他们中选拔学生不易,而且给入学以后的教学也带来一定困难.通过考前辅导,使学生能够对所涉及的科目知识有一个基于学科要求的系统了解和把握,应该是解决这个问题的一个办法.可是,目前我们只有成人教育专科升本科的考前辅导教材,但网络教育与成人教育要求有别,采用成人教育专升本的考前辅导教材可以临时救急,却总不是长久之计;而网络教育基本上还处在创办时期,有关学校也还没有足够的时间和精力来编写这类教材.有鉴于此,我们组织编写了这一套网络教育专科升本科的考前辅导教材.

这一套教材包括大学语文、数学、英语三种.编写者注意到以下几个问题:

其一,这是一套网络教育专科升本科考前辅导教材,既是辅导的教本,又是教师命题的重要依据;

其二,采用教材、教学大纲、练习及答案合而为一的做法,可方便考生灵活学习;

其三,这套教材配以辅导,帮助学生重新梳理已经学过的科目的基础知识,并补充必要的新知识,这不仅有利于选拔优秀的学生,还为录取学生日后的学习做了必要的知识准备.

这套辅导教材的编写者都是在各自的专业中学术造诣很高的学者.他们对网络教育的发展怀有极大热情,一直参与网络教育学院专升本考前辅导,积累了丰富的辅导经验,这次为编写这套教材花费了很多精力.同时,复旦大学出版社领导和编辑为出版这套辅导材料也付出了辛勤的劳动.在此,我们一并向他们表示谢意.

徐　忠

2002 年 10 月 22 日

前　　言

本书是为适应专科院校毕业生准备参加专升本“高等数学一”或“高等数学二”考试编写的复习用书.

社会的发展、时代的进步，计算机技术的普及与影响，使数学学科在科学技术和生产实践中起着越来越大的作用.高等数学已经成为大专院校许多专业重要的基础课程.近二三十年来，除理工类专业外，经济、管理、医、农、人文和社会科学等专业也提高了数学课程的标准和要求.一个合格的专科毕业生，为了继续进行本科层次的深造，需要具备良好的数学基础.只有通过严格的数学训练，学生才能适应后继课程学习的需要，才能适应参与社会竞争的需要.虽然，各个专业对数学知识的需求不尽相同，但是，在大量的实践中，人们普遍地认识到数学教育的目标不仅在于向学生传授一种专门的知识，更重要的在于引导学生掌握一门科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析、推理和运算等数学素质的训练.鉴于这个认识，教学教育中应突出基本概念、基本方法和基本技巧的传授和训练.对学生数学能力的考核，也应着重于检验学生对基本知识和基本方法的理解水平和掌握程度.准备参加专升本考试的学生，应参照高等数学复习考试大纲的具体要求，认真抓好基本知识的复习和基本技能的训练，掌握解题方法和常用技巧，在提高分析问题和解决问题的能力上多下功夫.

总体上说，“高等数学一”的考试要求高于“高等数学二”的考试要求.为此，下面对不同的读者如何使用本书作一个说明.本书前三章的内容，即极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学是高等数学课程中最基本的部分.有关这一部分的考题通常占“高等数学一”考题的60%，占“高等数学二”考题的80%.“高等数学一”和“高等数学二”中，有关这三章的内容和要求，大体是一致的(极个别只适用于“高等数学一”的内容与例题本书中用 * 标出)，因而无论哪一类考生都应全面地掌握这三章的内容.多元函数微积分在“高等数学一”和“高等数学二”的考题中各占20%左右.两者的区别是“高等数学一”在这一部分中包括空间解析几何和用极坐标计算二重积分的方法，而“高等数学二”并无这两项内容与要求.据此，本书的第四章、第五章中二重积分的极坐标计算，以及第六章、第七章只适用于“高等数学一”的考生，而“高等数学二”的考生可以略去这些内容.简而言之，“高等数学一”的考生应根据本书的全部内容作复习，“高等数学二”的考生则可略去本书的第四、六、七章和第五章的部分内容.

与上述说明相应，在本书所附的训练题中，除强化训练分别按“高等数学一”和“高等数学二”命题外，“高等数学一”的考生应完成全部专题训练，“高等数学二”的考生则可略去“专题训练五”、“专题训练六”.

数学是一门逻辑性十分强的学科，学习数学必须循序渐进.根据我们的经验，只要读者按照本书的提要，理解基本概念，掌握解题思路，并认真完成习题，不难在考试中取得较好的成绩.

本书编者虽然分别多次参加专升本高等数学考试的复习辅导或命题阅卷，但因编写时间紧，全书的缺点乃至错误在所难免，诚望各位读者不吝指正.

编者

2002年9月于复旦

目　　录

上　　篇

下 篇

上篇

第一章 极限与连续

§1.1 函数的概念与性质

1.1.1 基本概念与命题

一、函数概念

定义 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集,如果按某对应规则 f,对 D 中每个数 x,均有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的一个函数,称 x 为自变量,y 为因变量,习惯上也称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x),\ x \in D,$$

称数集 D 为函数 f 的定义域,记作 $D(f)$,即 $D(f) = D$,称数集 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 为函数 f 的值域,记作 $R(f)$.

当函数的定义域与对应规则确定之后,函数的值域也随之而确定.

两个函数相等,当且仅当它们的定义域与对应规则都相同.

为了描述一个函数,根据不同的情况与要求,可以采用数学解析式、表格或图形等不同的方式.

1. 解析法

通常称对常量或变量进行加、减、乘、除、乘幂,以及取指数、对数、三角函数等运算所得的关系式为解析表达式,用解析表达式表示函数的方法称为解析法或公式法. 用解析法表示的函数便于用数学运算和分析的方法讨论其性质.

2. 列表法

将自变量和因变量对应的取值关系排列成表以表示函数的方法称为列表法. 大家熟悉的一些数学用表,如平方表、立方表、对数表、三角函数表,都是用列表法表示的函数关系.

3. 图像法

当自变量在定义域中变化时,以自变量和因变量的对应值为坐标所得到的点的集合通常是一条曲线,这条曲线称为函数的图像. 用图像法表示函数,可以借助几何图形,形象直观地认识函数的变化性态.

在讨论函数性质时,首先必须明确函数的定义域. 关于定义域,通常会遇到下列两种情况:一般地,在用解析式表示函数关系时,函数的定义域是使相应的解析式有意义的一切实数的集合(也称作函数的自然定义域);在特定的问题中,函数的定义域则根据问题的具体背景确定.

例 1.1.1 函数 $y = x^2$ 的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$;但是,如果以 y 表示边长为 x 的正方形的面积,则这个函数关系 $y = x^2$ 的定义域为$(0,\ +\infty)$.

由于各类理论或实际问题的需要，往往要讨论在定义域的不同部分以不同的解析式表示的函数，这类函数称作“分段函数”.

例 1.1.2 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & x<-1,\end{cases}$$

就是一个分段函数，其定义域为$(-\infty,\ +\infty)$.

必须明确，分段函数的定义中虽然出现几个解析式，但它们仍表示一个函数，而并非几个函数；分段函数的定义域是各个解析式中自变量变化范围的并集；求分段函数的函数值，必须对自变量的特定取值，按其所在位置，代入相应的解析式中求得.

如对例 1.1.2 中的函数 $y=f(x)$，$f(1)=x\mid_{x=1}=1$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，$f(-2)=(x+1)\mid_{x=-2}=-1$.

二、函数的性质

各类函数的变化规律，表现于它们各自具有一些特殊的性质.人们考察具体函数时，往往先从分析它们是否具有下列特性着手.

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果

$$f(-x)=f(x),\ x\in D(f),$$

则称 $y=f(x)$ 为偶函数，它的图像关于 y 轴对称；如果

$$f(-x)=-f(x),\ x\in D(f),$$

则称 $y=f(x)$ 为奇函数，它的图像关于坐标原点中心对称.

例如，定义于$(-\infty,\ +\infty)$的函数 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

2. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使得

$$f(x+T)=f(x),\ x\in D(f),$$

则称 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.满足上述条件的最小正数 T 称为它的最小正周期.通常求函数的周期就是求其最小正周期.

例如：$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 都是以 2π 为最小正周期的周期函数；$h(x)=\tan x$ 和 $k(x)=\cot x$ 都是以 π 为最小正周期的周期函数.

3. 单调性

对于函数 $y=f(x)$，如果任意取 $x_1,\ x_2\in D\subset D(f)$，当 $x_1<x_2$ 时恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加(或单调减少)的；如果上述关系式中等号均不成立，则称它在 D 上是严格单调增加(或严格单调减少)的.

例如，例 1.1.2 中给出的函数 $y=f(x)$ 是$(-\infty,\ +\infty)$上单调增加函数；$g(x)=3x+4$

是$(-\infty, +\infty)$上严格单调增加函数；$h(x) = x^2$ 在$[0, +\infty)$上是严格单调增加的，在$(-\infty, 0]$上是严格单调减少的.

4. 有界性

设有函数 $y = f(x)$，$D \subset D(f)$，如果存在数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M,\ x \in D,$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界；否则，称它在 D 上是无界的.

例如：$f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是有界的，这是因为

$$|f(x)| \leqslant 1,\ x \in (-\infty, +\infty);$$

又如 $g(x) = \tan x$ 在$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$上也是有界的，这是因为

$$|g(x)| \leqslant 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

但是，$g(x) = \tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上是无界的.

三、复合函数

定义 设有三个变量 x, u, y，其中 y 是 u 的函数，$y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u = g(x)$，则称定义在

$$\{x \mid x \in D(g),\ g(x) \in D(f)\}$$

上的函数

$$y = f(g(x))$$

为函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数. 对这个复合函数而言，x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

例 1.1.3 设有函数

$$f(u) = \sqrt{u},\ D(f) = [0, +\infty),$$
$$g(x) = a^2 - x^2,\ D(g) = (-\infty, +\infty),$$

其中 $a > 0$，于是

$$f(g(x)) = \sqrt{a^2 - x^2},$$

这个复合函数的定义域则为

$$\{x \mid x \in D(g),\ g(x) \in D(f)\}$$
$$= \{x \mid x \in (-\infty, +\infty),\ a^2 - x^2 \in [0, +\infty)\} = \{x \mid -a \leqslant x \leqslant a\}.$$

同样地，可以考虑多个函数的复合函数.

为了微积分运算的需要，常常要求将一个复杂的函数分解为几个简单函数的组合.

例 1.1.4 试把

$$F(x) = 2^{\arccos\sqrt{x}},\ D(F) = [0, 1]$$

分解为几个简单函数的复合.

解 取函数

$$f(u) = 2^u,\ D(f) = (-\infty,\ +\infty),$$

$$g(v) = \arccos v,\ D(g) = [-1,\ 1],$$

$$h(x) = \sqrt{x},\ D(h) = [0,\ +\infty),$$

则显然有
$$F(x) = f(g(h(x))).$$

四、反函数

定义 设函数 $y = f(x)$ 以 $D(f)$ 为定义域,$R(f)$ 为值域. 如果对任意的 $y \in R(f)$,$D(f)$ 内只有一个数 x 与之对应,满足 $y = f(x)$,那么,若把 y 视为自变量,x 视为因变量,就得到一个新的函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上,常常记自变量为 x,因变量为 y,这样,函数 $y = f(x)$ 的反函数便是 $y = f^{-1}(x)$.

显然,函数 $y = f(x)$ 的值域是反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域;函数 $y = f(x)$ 的定义域是函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域,而且有

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in D(f),$$

$$f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in D(f^{-1}).$$

自然要问:什么条件下函数 $y = f(x)$ 存在反函数. 下面的定理提供了一个充分条件.

定理 1.1.1 设函数 $y = f(x)$ 在其定义域上是严格单调增加(或严格单调减少)的函数,则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 必定存在,而且也是严格单调增加(或严格单调减少)的.

函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

例 1.1.5 设 $f(x) = 2x + 1$,求出其反函数,并作出这两个函数的图像.

解 由 $y = f(x)$ 即 $y = 2x+1$,得 $x = \frac{1}{2}(y-1)$,即 $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-1)$. 记 x 为自变量,y 为因变量,则有

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1).$$

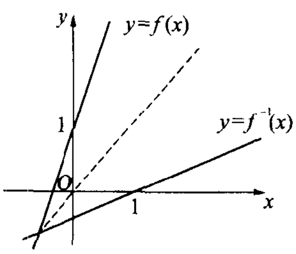


图 1.1.1

$y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图像如图 1.1.1 所示.

五、基本初等函数

以下六种函数是最基本的初等函数.

1. 常数函数

$$f(x) = c,\ D(f) = (-\infty,\ +\infty),$$

其中 c 为常数. 常数函数的图像是一条与 x 轴平行的直线.

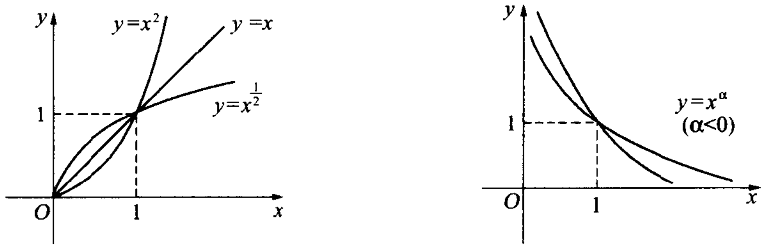
2. 幂函数

$$f(x) = x^\alpha,\ (\alpha \neq 0)$$

幂函数的定义域根据 α 的值而定,但无论 α 取什么实数值,$D(f)$ 总包含 $(0,\ +\infty)$.

当 $\alpha > 0$ 时,$y = x^\alpha$ 在 $[0,\ +\infty)$ 中是严格单调增加的无界函数,其图像都通过点 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ 1)$,见图 1.1.2(a).

当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调减少且无界，其图像均通过 $(1,1)$，且均以 x 轴和 y 轴为渐近线，见图 1.1.2(b).



(a)　　　　(b)

图 1.1.2

3. 指数函数

$$y=a^{x}\ (a>0,\ a\neq 1).$$

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于对一切 x，均有 $a^{x}>0$，且 $a^{0}=1$，所以它的图像位于 x 轴上方，且都通过点 $(0,1)$.

当 $a>1$ 时，指数函数严格单调增加且无界，其图像以 x 轴的负半轴为渐近线.

当 $0<a<1$ 时，指数函数严格单调减少且无界，其图像以 x 轴的正半轴为渐近线(见图 1.1.3).

微积分中经常出现以无理数 $\mathrm{e}=2.718,281,8\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$.

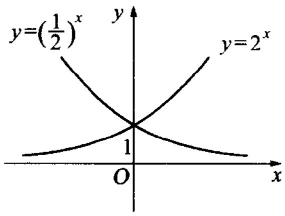


图 1.1.3

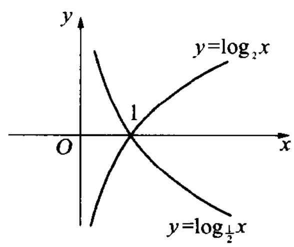


图 1.1.4

4. 对数函数

$$y=\log_{a}x\ \ (a>0,\ a\neq 1).$$

$y=\log_{a}x$ 是 $y=a^{x}$ 的反函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 对任何 a，对数函数的图像均通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，$y=\log_{a}x$ 严格单调增加且无界，其图像以 y 轴的负半轴为渐近线.

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_{a}x$ 严格单调减少且无界，其图像以 y 轴的正半轴为渐近线(见图 1.1.4).

称以 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}}x$ 为自然对数，简记为 $y=\ln x$.

5. 三角函数

三角函数包括以下六种函数：

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x.$$

在微积分运算中，三角函数的自变量 x 一律以"弧度"为单位.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，它是一个奇函数，以 2π 为周期，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以是有界函数. 其图像见图 1.1.5.

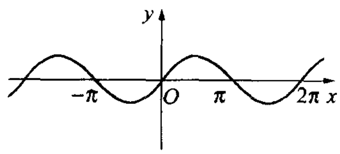


图 1.1.5

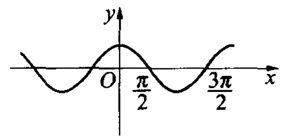


图 1.1.6

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，它是一个偶函数，以 2π 为周期. 因为 $|\cos x|\leqslant 1$，所以是有界函数，其图像见图 1.1.6.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是除去点 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 外的实数集合，其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 它是一个无界的奇函数，以 π 为周期，其图像见图 1.1.7.

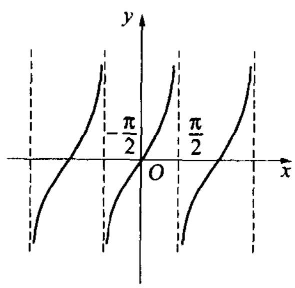


图 1.1.7

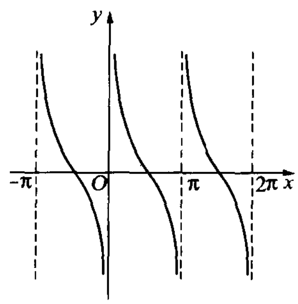


图 1.1.8

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域是除去点 $k\pi$ 外的实数集合，其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 它是一个无界的奇函数，以 π 为周期，其图像见图 1.1.8.

正割函数 $y=\sec x\left(=\frac{1}{\cos x}\right)$ 的定义域是除去点 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 外的实数集合，其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 它是一个偶函数，以 2π 为周期.

余割函数 $y=\csc x\left(=\frac{1}{\sin x}\right)$ 的定义域是除去点 $k\pi$ 外的实数集合，其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 它是一个奇函数，以 2π 为周期.

6. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，它是一个单调增加的奇函数，满足：

$$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1, 1],$$

$$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

其图像见图 1.1.9.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域也是 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，它是一个单调减少函数，满足：

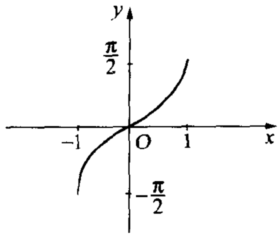


图 1.1.9

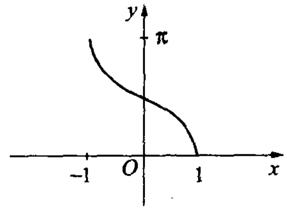


图 1.1.10

$$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1,\ 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0,\ \pi],$$

其图像见图 1.1.10.

反正切函数 $y = \arctan x$ 的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$,其值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$,它是一个单调增加的奇函数,满足:

$$\tan(\arctan x) = x,\ x \in (-\infty,\ +\infty),$$

$$\arctan(\tan x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

其图像见图 1.1.11.

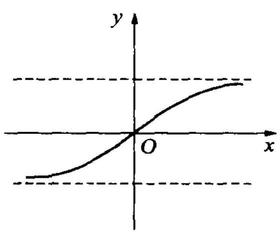


图 1.1.11

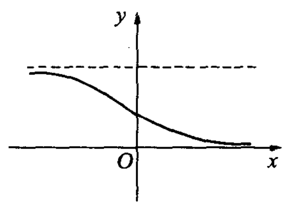


图 1.1.12

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域也是$(-\infty,\ +\infty)$,其值域为$(0,\ \pi)$,它是一个单调减少函数,满足:

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x,\ x \in (-\infty,\ +\infty),$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x) = x,\ x \in (0,\ \pi).$$

其图像见图 1.1.12.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次代数运算和复合所构成的函数统称为初等函数.

例如
$$y = x\sin\frac{1}{x},\ y = \frac{\sin x + \sqrt{\cos x}}{1 + \tan x} + \log_3(1 + x^2)$$

都是初等函数.

形如
$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_n \neq 0$$

的函数称为多项式函数;两个多项式函数之商,即形如

$$y=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

的函数称为有理函数.

1.1.2 典型例题

初等函数的定义域即是使相应的解析表达式有意义的自变量的取值范围.在求函数定义域时应注意下列准则:

(1) 分式的分母不能为0;

(2) 偶次方根下的表达式应非负;

(3) 对数的真数须大于0;

(4) 反正弦函数和反余弦函数的定义域为$[-1, 1]$.

例 1.1.6 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$; (2) $g(x)=\dfrac{\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)}{\sqrt{3-x^2}}$; (3) $h(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(x+3)}}{x(x-4)}$.

解 (1) 函数$f(x)$的定义域是使$2-x-x^2\geqslant 0$的实数x全体.由

$$2-x-x^2=(2+x)(1-x)\geqslant 0,$$

即得$-2\leqslant x\leqslant 1$,所以$D(f)=[-2, 1]$.

(2) 为使$g(x)$的解析表达式有意义,x应满足下列条件:

$$\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leqslant 1,\ 3-x^2>0.$$

由第一个不等式得$0\leqslant x\leqslant 4$,由第二个不等式得$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$.故而

$$D(g)=[0, 4]\cap(-\sqrt{3}, \sqrt{3})=[0, \sqrt{3}).$$

(3) $y=h(x)$定义域中的x应满足:

$$\ln(x+3)\geqslant 0,\ x\neq 0,\ x\neq 4.$$

由第一个关系式得$x+3\geqslant 1$,即$x\geqslant -2$.再注意到$x\neq 0$, $x\neq 4$,所以

$$D(h)=[-2, 0)\cup(0, 4)\cup(4, +\infty).$$

例 1.1.7 设$y=f(x)$的定义域为$[0, a]$,其中$a>0$,求下列函数的定义域:

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=f(\ln x)$; (3) $y=f(x+b)$.

解 (1) 由$0<x^2\leqslant a$,得$y=f(x^2)$的定义域为$[-\sqrt{a}, 0)\cup(0, \sqrt{a}]$.

(2) 由$0<\ln x\leqslant a$,得$y=f(\ln x)$的定义域为$(1, e^a]$.

(3) 由$0<x+b\leqslant a$得$-b<x\leqslant a-b$,即$y=f(x+b)$的定义域为$(-b, a-b]$.

例 1.1.8 设

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant -1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ x+2, & x>1,\end{cases}$$