中学数学解题丛书

平面几何
解题错误分析

唐格森
王国器　编著

黑龙江科学技术出版社

平面几何解题错误分析

唐格森　王国器　编著

黑龙江科学技术出版社
一九八六年·哈尔滨

封面设计：洪　冰

平面几何解题错误分析

唐格森　王国器　编著

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区建设街35号）

齐齐哈尔第一印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米　32开本4.875印张　97千字

1986年4月第1版·1986年4月第1次印刷

印数：1—21,700册

书号：13217·151　　定价：0.83元

前　言

数学是一门应用广泛的基础学科，是学习和研究其他科学的有力工具。数学是中学的一门基础课，学好中学数学对于学生接受更高深的科学知识和参加生产劳动都有十分重要的作用。

解题在数学学习中有着特殊重要的意义，解题能力是掌握知识程度的主要标志。在数学里，才智就是解决问题。有些学生虽然对概念、定理背得烂熟，但是在解答非常简单的题目时却会糊涂起来。有些学生只具有一般的解题本领，一遇到形式不熟或没见过的题目，就茫然不知所措或者错误地进行解答。

在解答数学问题时，常常出现的典型性错误有：概念不清造成的概念性错误；忽视条件、错用结论造成的知识性错误；违反逻辑规律造成的逻辑性错误；以偏概全、以特殊代一般造成的方法性错误等等。

为了学会解题，除了弄清概念和做解题练习以外，一个很好的办法是分析错误的题目解答，寻求正确的解题方法和规律。哈尔滨市数学会为了帮助中学生从解答数学问题的错误中吸取经验教训，寻找解题方法和规律，提高解题能力，同时，也为了给中学数学教师提供一些在教学中分析典型错例的方法，以指导学生解答题目，提高教学质量，特组织哈尔滨市几位有丰富教学经验和长期从事教学研究的同志，编

著了这套中学数学解题错误分析丛书。

本套丛书是根据中学数学教学大纲，配合通用教材分科按章编写的。书中所列题目具有典型性，错误解法具有普通性。这套丛书共分五册，高中代数由时承权、戴再平编著；立体几何由王万祥编著；平面解析几何由邵旭、冯建国编著；初中代数由王翠满、马明珠编著；平面几何由唐格森、王国器编著。哈尔滨市教育学院王万祥副院长和我审阅了各册原稿。

书中错误之处，敬请广大读者批评指正。

哈尔滨市数学会秘书长
黑龙江大学数学系副教授　颜秉海

1985年4月

目　　录

第一章　基本概念 ……………………………………………… (1)
第二章　相交线、平行线 ……………………………………… (7)
第三章　三角形 ………………………………………………… (23)
第四章　四边形 ………………………………………………… (42)
第五章　面积、勾股定理 ……………………………………… (58)
第六章　相似形 ………………………………………………… (72)
第七章　圆 ……………………………………………………… (90)

附：练习题略解或提示 ………………………………………… (137)

第一章　基本概念

学习基本要求

学习本章主要应当掌握直线、射线、线段的概念、性质和画法，角的概念、度量、比较和角的分类，为后面学习几何的推理证明作准备。学习中常见的错误是：概念掌握不准确，不善于根据定义、性质解释现象，好凭直觉猜想作判断，滥用名词。

解题错误分析

例1　图1—1中，有直线AB和射线OC，能比较它们之间的大小吗！为什么？

【错误解答】　能比较。直线AB大于射线OC。因为射线是直线的一部分。直线AB是向两方无限延伸着的，而射线只是向一方无限延伸着的。

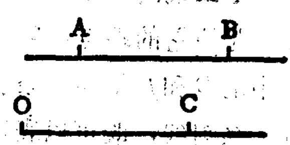

图1—1

【错因分析】　对于两条线段，不论它们各有多么长，总是有端点的。因此它们的长度总是有限的，总是可以比较大小的。但直线是向两方无限延伸着的，它是无限长的。射线只向一方无限延伸着，但也是

无限长的。是不可能用有限的数量去表示直线和射线的长度的。因此不能比较直线AB和射线OC的大小。

【正确解答】 不能比较直线AB和射线OC的大小。因为它们都是无限长的。

例2 图1—2中，射线OD和射线OE是同一条射线吗？说明理由。

【错误解答】 不是同一条射线。因为射线OE大于射线OD。

图1—2

【错因分析】 由于混淆了射线和线段的表示法在含意上的区别，导致有上述的错误理解。图中，如果是线段OD和OE，应看成是不同的。现在OD和OE指明是射线，这里图中D和E只是同一条射线上的两个不同的点，它们离端点O的远近虽不同，但不影响这条射线向一方无限延伸，也没有改变射线的方向，因此，不能说OD和OE是不同的射线。

【正确解答】 图中射线OD和OE是同一条射线。因为射线是用它的端点和射线上任意一点的大写字母来表示的。图中的D和E是同一条射线上的两个任取的点，所以图中的同一条射线，既可以表示为射线OD，也可以表示为射线OE。

例3 图1—3中，在一小湖对岸有A、B两个村庄不能直通汽车，但在小湖的另一边有离A、B两村距离分别为3公里和4公里的C村可通汽车，能说A、B两村间的距离是7公里吗？

【错误解答】 因为 $3+4=7$，所以说 A、B 两村间的距离是 7 公里。

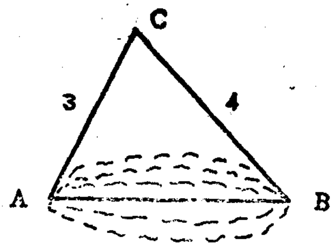

图 1—3

【错因分析】 上述解答关键是混淆了两地间的"路程"和"距离"两个概念的区别。由 A 村经 C 村到 B 村的公路路程为 7 公里，但它不是 A、B 两村间的距离。因为两点间的距离，几何中规定是指"连结两点的线段的长度"。

【正确解答】 不能说 A、B 两村间的距离是 7 公里。因为 A、B 两村间的距离是线段 AB。

例 4 图 1—4 中，由 A 地到 B 地，有南、北、中三条路可走。哪条路最近？根据是什么？

【错误解答】 走中路最近。这是根据"两点之间直线最短"的性质。

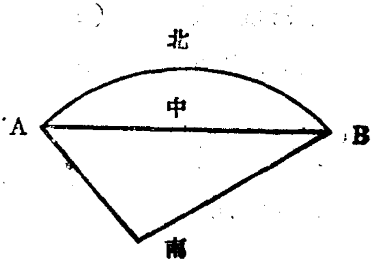

图 1—4

【错因分析】 上面的回答混淆了线段和直线的本质区别，误以为线段和直线是等同的概念。直线是无限长的，没有端点，不能说直线位于"两点之间"。对直线不能言长短。说"直线最短"，自相矛盾不合逻辑。

【正确解答】 走中路最近。是根据线段的基本性质：

“两点之间线段最短”。

例5 已知：线段a和b。

求作：一条线段，使它等于$a+b$。

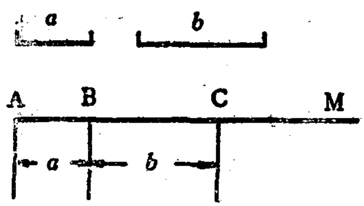

图1—5

【**错误作法**】 （1）作射线AM；

（2）在AM上截取$AB=a$；

（3）延长点B到点C，使$BC=b$。线段AC就是所求的线段。

【**错因分析**】 错在作法中（3）“延长点B到点C”这一步。点是没有方向和大小的。因此，不能说“延长某点”。说延长点B，就等于说原来的B点不够长，需要把它延长，这是犯了认为“点有长短”的错误。

【**正确作法**】 （1）作射线AM。

（2）在射线AM上，从点A起顺次截取$AB=a$，$BC=b$。

AC就是所求的线段。

例6 图1—6中，试判断$\angle MAN$和$\angle PBQ$哪个大？

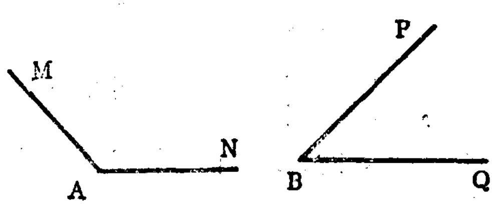

图1—6

【错误解答】 因为$BP>MA$，$BQ>AN$，所以$\angle PBQ>\angle MAN$。

【错因分析】 上面错误解答以为角的两边是由线段组成的，并以为角的大小由线段的长短所决定。角的定义指出了角是由“有公共端点的两条射线所组成的图形”，角的两边都是射线，可以沿原来的方向任意延伸的。因此不能凭角的两边延伸的程度决定角的大小，应当用课本指出的叠合法比较角的大小。

【正确解答】$\angle MAN>\angle PBQ$。因为当$\angle PBQ$的顶点B和A点重合，边BQ沿着边AN落下时，BP边落在$\angle MAN$的内部。

【注】：这里所说的叠合法，实际都是借助于量角器的移动进行的，并不需要真的把$\angle PBQ$的原形重叠于$\angle MAN$的上面。

例7 图1—7中，D是$\angle AOB$的平分线上一点，$\angle ODE=90°$，DE边能和$\angle AOB$的两边都相交吗？

【错误解答】 延长OA和OB以后，都能和DE边的延长线相交。

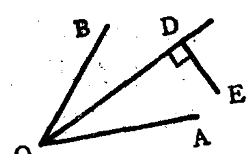

图1—7

【错因分析】 边OA和边DE都是射线，根据射线内含的延伸性，OA和DE就可以相交，是不需要依靠“延长”相交的。但是OB边不和DE边相交，只能和DE的反向延长线相交。

【正确解答】 DE边能和OA边相交，但DE边不和OB

边相交。DE的反向延长线能同OB相交。

练 习 题 一

指出下列各题解法中的错误，并写出正确解答：

1．如图1—8，给出了两条直线AB和CD，能否比较它们的大小？

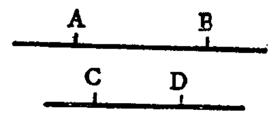

图1—8

答：能比较大小。从图中可以看出直线AB大于直线CD。

2．图1—9中，在直线AB上分别以O、D、E为端点的射线共有哪几条？

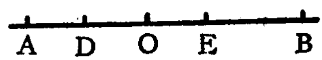

图1—9

答：以O、D、E为端点的射线共有12条。其中以O为端点的射线有OD、OA、OE和OB；以D为端点的射线有DA、DO、DE和DB；以E为端点的射线有EB、EO、ED和EA。

3．什么叫周角？

答：360°的角叫周角。

4．什么叫钝角？

答：大于直角的角叫钝角。

5．“余角一定小于补角”．这种说法是否正确？如果不正确，应当怎样说才是正确的？

答：这种说法正确．例如30°角的余角是60°，而30°角的补角是150°，150°的角大于60°的角。所以这种说法符合实际，不必改正。

第二章　相交线、平行线

学习基本要求

学习本章主要应当掌握垂线和平行线的概念、判定和性质，以及命题、定理的意义，初步掌握证明一个命题的步骤要求，能正确地填写推理根据。由于是初次学习推理论证，容易出现推理根据引用不当，分不清平行线的判定和性质的区别，凭直观感觉代替推理论证，用特殊图形代替一般图形，用待证的结论做论据等错误。

解题错误分析

例1. 图2—1中，由汽车站A走向江堤l，怎样走法最近？画出图来，并说明是根据什么性质？

【**错误解答**】　从A作l的垂线AB，沿着AB的方向走到江堤l，距离最近。这是根据"点到直线之间垂线最短"的性质。

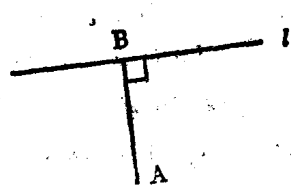

图2—1

【**错因分析**】　错误的关键是混淆了"垂线段"和"垂线"的概念。垂线是直线，对直线不

能言长短。上面说“垂线最短”如同说“直线最短”一样不合逻辑。

【正确解答】 作$AB\perp l$，B为垂足，沿着AB的路线走向江堤l，距离最近。这是根据“直线外一点与直线上各点连结的所有线段中，垂线段最短”的性质。

例2 图2—2中，D是$\angle BAC$的平分线上一点，画图作出D点到$\angle BAC$两边的距离，并度量比较一下，看看D点到$\angle BAC$两边的距离有什么样的关系？

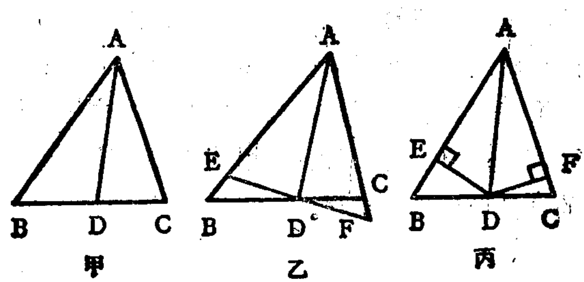

图2—2

【错误解答一】 D点到AB、AC两边的距离分别是DB和DC的长。通过度量知$BD>DC$。（见图甲）

【错误解答二】 过D作AD的垂线，分别交AB边于E，交AC边于F。DE和DF的长就是D点到AB、AC两边的距离。由度量知$DE=DF$。（见图乙）

【错因分析】 解答一错误在于把D点到AB和AC两边上任意一点间的距离，当成了D点到角两边的距离。根本不懂得D点到角两边的距离是指D点到角两边作的垂直线段的长。解答二在理论上知道D点到角两边的距离应当作垂线

段，可是把垂直关系画错了，图乙中的DE和DF的长实际上是AB和AC上各一点到AD的距离，而不是D点到角两边的距离。

【正确解答】 从D点分别向AB和AC作垂线，设E、F是垂足，由度量知$DE=DF$（见图丙）。

例3 判断下列各题的说法是否正确？为什么？

（1）作直线AB的垂直平分线；

（2）过两个已知点M、N作已知直线EF的垂线；

（3）过已知点P作线段GH的垂直平分线。

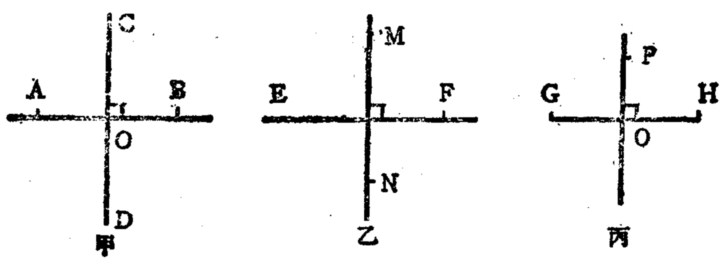

图2—3

【错误解答】 （1）的说法是正确的。因为作$CD\perp AB$，设O是垂足，O点把直线AB分成的两部分OA和OB都是射线，这两条射线是相等的（见图甲）；

（2）的说法也是正确的。因为过M、N两点和直线EF的垂线是可作的（见图乙）；

（3）的说法也正确。因为线段都有垂直平分线（见图丙）。

【错因分析】 （1）的错误是认为射线都是相等关

系。而实际射线是向一方无限延伸着的，没有终止，因此，两条射线之间是不能比较大小的。

（2）因为M、N是两个已知点，根据两点确定一条直线的性质，直线MN的位置是固定不可变动的，只有当M、N二点所确定的直线正好和已知直线EF相交成$90°$时，才存在过M、N和EF相垂直的直线；但一般情况下，直线MN不可能正好和EF相交成$90°$，这时，就不可能作出过M、N两点而且和直线EF相垂直的直线。可见，在一般情况下，（2）的说法是不正确的。

（3）中，因为已知点P的位置有两种可能：即$PG=PH$或$PG\neq PH$。只有当$PG=PH$时，线段GH的垂直平分线能过P点。只有在这时"过已知点P作线段GH的垂直平分线"的说法才成立。但一般也不这样说，而是说"过P点作线段GH的垂线"，再由下一章的性质推断这样的垂线必平分GH；当$PG\neq PH$时，GH的垂直平分线就不过P点，反过来，过P点垂直于GH的直线也不平分GH，这时，说"过P点作线段GH的垂直平分线"是不可能的。

【正确解答】 （1）的说法不正确。因为直线是向两方无限延伸着的，它没有端点，自然就没有中点。因此直线是不能被平分的。即直线AB不存在垂直平分线。

（2）的说法也不正确。因为两个已知点M、N的位置除了特殊情况（即直线MN和EF相交成$90°$）外，一般说来，M、N两点确定的直线不一定能和EF垂直。

（3）的说法也不正确。因为一般说来过P点而和GH相垂直的直线，不一定能够平分线段GH。

【注】：上面错误解答中的（2）和（3），都是只注意特殊情况，没注意一般情况作出的结论，当然不具有普遍性，是属于用特殊图形代替一般图形的错误。这是初学几何的人常犯的毛病，应引为教训。

例4 什么叫对顶角？

【错误解答】 相对的两个相等的角叫对顶角。

【错因分析】 用“相对”二字解释“对顶角”是犯了“同语反复”性质的循环定义的错误。到底什么样的角算是“相对”的，对所问概念的内容还是没有说清楚。

【正确解答】 一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，这两个角叫做对顶角。

【注】：循环定义有两种表现形式。一种表现是：甲概念是借助于乙概念来定义的，反过来又利用甲概念来定义乙概念；另一种表现是“同语反复”，例如：“直线就是笔直的线”，这样用自己来定义自己。这两种情况都是正确定义所不允许的。

例5 什么叫平行线？

【错误解答】 无论怎样延长都不能相交的两条直线叫做平行线。

【错因分析】 上述回答有两条错误：一是对直线不应当使用“延长”一词，因为直线本来就具有延伸性，是不需要“延长”的，只有对长度有限的对象才可用“延长”一词。“延长直线”的说法容易引起概念的混乱和错觉。二是没有指出“在同一平面内”这个前提条件。因为离开这个条件的空间二直线，不相交时，也有可能不平行而成为异面直