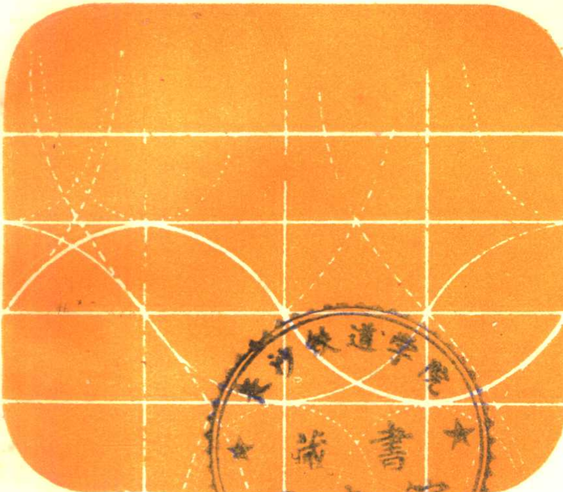

李　世　雄

代数方程与置换群

上海教育出版社

代数方程与置换群

李 世 雄

上 海 教 育 出 版 社

代数方程与置换群
李 世 雄
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 3.125　字数 65,000
1981 年 2 月第 1 版　1981 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—37,000 本
统一书号：7150·2371　定价：0.27 元

引　言

解代数方程是古典代数学的主要内容．学过中学代数的读者对一、二次方程的求解方法一定很熟悉，很自然地，会进一步提出这样的问题：三次方程、四次方程以至更高次的代数方程应如何求解呢？实际上经过数学家的长期努力，一般三次方程、四次方程的公式求解方法在16世纪已经找到了．可是高于四次的方程的一般代数求解方法，虽然经过许多著名的数学家二百多年的努力(从16世纪中直到18世纪末)，却始终没有被找到(这里所谓代数求解方法：是指经过有限次加、减、乘、除和开方运算来求得方程根的精确解法，而不是指如秦九韶法、牛顿法等的近似数值解法．这些数值解法在应用上是很有意义的．但是与我们所要讨论的求解方法是两类性质不同的问题)．为了求解一般的五次方程，曾经枉然地耗去了许多精力．可是尽管许多人在这个问题上碰了壁，然而却从未怀疑过这种求解方法是否存在！直到1770年，法国的数学家拉格朗日(J. Lagrange 1736～1813)才开始认识到求解一般五次方程的代数方法可能是不存在的．他在一篇长达200多页的文章《关于代数方程解法的思考》中，系统地分析总结了在他以前人们所已知的解二、三、四次方程的一切方法，以及他所创造的求解二、三、四次方程的统一方法．他指出这些解法对于求解一般五次方程都是无效的，并开始认识到根的排列与置换理论是解代数方程的关键所在．这就开创了用置换群的理论来研究代数方程的新阶段．在此基础上，

挪威数学家阿贝尔（N. H. Abel 1802～1829）利用置换群的理论给出了高于四次的一般代数方程的代数求解公式不存在的严格证明．以后法国数学家伽罗华(E. Galois 1811～1832)更进一步证明了不能用代数方法求解的具体方程式的存在，他还用置换群的理论彻底阐明了代数方程可用代数方法求解是依据了怎样的原理．这后来发展成当今代数学中有趣而又很基本的一部分——群论中的伽罗华理论．

本书的目的，是在中学代数的基础上，介绍如何用置换群的理论研究代数方程的求解问题．阐明为什么五次以上的一般代数方程不能用代数方法求解，以及代数方程可以求解的根本原理是什么，并用这一理论证明为什么"有限次使用圆规、直尺三等分任意角"等著名难题是不可能的．

我们希望这本小册子能引起中学数学教师及爱好数学的中学生的兴趣．读了以后能对群论这一近代数学中引人入胜的重要分支，及其在代数方程求解问题中的应用有一个初步了解；为进一步学习近世代数提供一本入门书．

因为我们的希望是比较通俗地讲清楚伽罗华理论的思路，而并不追求严格的推导和证明，所以有些比较冗长或需准备知识较多的证明我们就略去了，只是通过一些具体例子来说明一下．

由于笔者的数学和文字素养都不高，错误在所难免，谨向提出宝贵批评意见的同志表示感谢．

目　　录

一、代数方程的古典解法

1. 一次、二次方程的求解

解代数方程是古典代数学中基本的组成部分．本书讨论的一元 n 次代数方程(以后简称为方程)，一般地可以写成：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\quad (a_0\neq 0) \tag{1.1}$$

其中 n 是正整数，称为此方程的次数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 等系数是复数，特别地也可以是实数．n 次代数方程必定恰有 n 个根，这就是著名的代数基本定理，德国大数学家高斯(K. F. Gauss 1777～1855)在 1799 年给出了第一个证明．但是高斯的证明和以后的一些证明方法都不是构造性的，也就是说仅仅肯定了根的存在性，而并未给出具体求根的方法．因此，在高斯之前和之后，人们对于解方程的方法都作了长期的艰苦探索．

代数方程可以根据它的次数来分类．其中一次方程最简单，它的一般形式是

$$ax+b=0,\quad (a\neq 0) \tag{1.2}$$

它的解是

$$x=-\frac{b}{a}. \tag{1.3}$$

二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0) \tag{1.4}$$

它的解法也不难．古代巴比伦人早就会用配方法来求解了．

虽然这些内容已为大家熟知，但为了下面讨论方便起见，我们简要地回顾一下：

将(1.4)化为

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \tag{1.5}$$

配方
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0,$$

移项
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

两边开方(在复数范围里这总是可行的)再移项，即得熟知的一元二次方程的求解公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.6}$$

在方程(1.5)中，如令 $p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$ 则公式(1.6)也可写成

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \tag{1.7}$$

总之，一次方程和二次方程的根都可以用它的系数的代数式(就是只含有限次加、减、乘、除和开方五种代数运算的表达式)来表示．所以我们说一次方程、二次方程可以用代数方法求解.

一次方程(1.2)当 $a\neq0$ 时，它的解总是存在的，而且也是唯一的.

二次方程(1.4)的根的情况就比较复杂．从求解公式(1.6)可以看出此时 b^2-4ac 起着重要作用，我们称它为方程(1.4)的判别式，并记为

$$\Delta=b^2-4ac. \tag{1.8}$$

当 a, b, c 为实数时，由求解公式(1.6)易知：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，方程(1.4)有两个不相等的实根；

(2) 当 $\Delta=0$ 时，方程(1.4)有两个相等的实根，这个根又称为二重根：$x=-\dfrac{b}{2a}$，所以此时不需开方即可求得其解；

(3) 当 $\Delta<0$ 时，方程(1.4)有一对共轭的虚数根.

若将二次方程(1.4)的两个根记为 x_1、x_2，则通过直接计算，容易证明它们和方程的系数之间有下面的关系式：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{1.9}$$

这就是有名的韦达(F. Viete. 1540～1603)公式，有的书上也称为韦达定理. 我们特别指出：

$$\Delta=a^2(x_1-x_2)^2. \tag{1.10}$$

它的证明是很容易的，如下：

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}.\end{aligned}$$

我们来看一个特殊的二次方程

$$x^2+x+1=0. \tag{1.11}$$

根据求解公式(1.6)易知它的两个根是 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 和 $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$. 令

$$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega. \tag{1.12}$$

则由直接计算易得

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2},$$

因此 ω, ω^2 是方程(1.11)的两个根. 而且它们还满足下列关系式:

$$\begin{cases}\omega^2+\omega+1=0,\\ \omega^3=1.\end{cases} \tag{1.13}$$

这是两个下面有用的关系式. 其中第一个只要用 ω 代入(1.11)即可,而第二个则是因为

$$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0.$$

由此还可得:任何一个复数 a 如果 $\sqrt[3]{a}$ 是 a 的一个三次方根,则 $\sqrt[3]{a}\,\omega$, $\sqrt[3]{a}\,\omega^2$ 就是另两个三次根.

2. 三次方程的解法

上面已经看到一次方程、二次方程的求解早已有了很完美的代数方法,我们可以很方便地根据求根公式求出它们的全部根. 人们自然会想到,三次、四次以至更高次的代数方程是否也有类似的求根公式? 或者说,能不能把一个方程的根用该方程的系数的代数式表示出来呢? 再强调一下,这里的代数式是指有限次地使用加、减、乘、除、开方运算得到的.

关于这方面的问题,16 世纪的意大利数学家们首先作出了很大的贡献. 意大利当时有一所欧洲最大也是最著名的大学——波罗尼亚大学. 波罗尼亚大学的菲尔洛 (S. D. Ferro 约 1465～1562) 教授在 1514～1515 年期间把三次方程全都简化为三种简单的类型:

$$x^3+px=q,\ x^3=px+q,\ x^3+q=px,$$

其中 p, q 均为正数. 并对它们进行了系统的研究,不过他从未发表过他的解法,仅把他的研究结果告诉了他的几个朋友. 他去世后不久,意大利威尼斯的数学家塔尔塔利亚 (N.

Tartaglia 约 1499～1557) 在 1535 年又重新发现了菲尔洛教授的方法．而且在公众的场合中进行过三次方程求根表演．不过，他仍旧将方法保密．最后，他将这方法透露给意大利米兰的数学家卡当 (H. Cardano 1501～1576)．卡当背弃了他要为此保密并不能公布该方法的诺言，在 1545 年发表一本著名的代数著作《大法》，在这本著作里他总结了前人的结果，将一般形式的三次方程的求解公式公布了．这个方法后来常称为*卡当方法*，相应的求根公式通称为*卡当公式*．

卡当方法简介如下：

一般的三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (a\neq 0) \tag{1.14}$$

可化为

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0. \tag{1.15}$$

在作了一个简单的代换 $y=x+\dfrac{b}{3a}$ 后，即可将(1.15)化为：

$$y^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}y+\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}=0. \tag{1.16}$$

由此可见，求解一般三次方程(1.14)的问题可以归结为方程

$$x^3+px+q=0 \tag{1.17}$$

的求解问题．下面就来讨论(1.17)的求解问题．

再作代换

$$x=z-\frac{p}{3z}, \tag{1.18}$$

则(1.17)化为

$$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0,$$

即

$$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0. \tag{1.19}$$

将(1.19)看作z^3的二次方程，即可解得

$$z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}. \tag{1.20}$$

在上式中取正号并把这时的z改写成u，则

$$u^3=-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},$$

取上式右边的任何一个立方根为u，则三个立方根为

$$u,\ u\omega,\ u\omega^2.$$

为了利用$x=u-\frac{p}{3u}$求x，要先求$-\frac{p}{3u}$. 由于

$$\left(-\frac{p}{3u}\right)^3=-\frac{p^3}{27}\frac{1}{u^3}=\frac{-\frac{p^3}{27}}{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

$$=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}.$$

所以$-\frac{p}{3u}$是$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$的一个立方根，而且应取与$u$相乘为$-\frac{p}{3}$的那个立方根，把它记为$v$. 由$\omega^3=1$，得

$$\begin{cases} x_1=u-\dfrac{p}{3u}=u+v, \\ x_2=u\omega-\dfrac{p}{3u\omega}=u\omega+v\omega^2, \\ x_3=u\omega^2-\dfrac{p}{3u\omega^2}=u\omega^2+v\omega. \end{cases} \tag{1.21}$$

其中u, v分别是$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$、$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$的一个立方根，且要取得使$uv=-\frac{p}{3}$. 如果写得更仔细些，就是

$$\begin{cases} x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}, \\ x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\,\omega+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\,\omega^2, \\ x_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\,\omega. \end{cases}$$

由于复数开方时$\sqrt[3]{}$代表的值不定，这里规定其中

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} \quad 和 \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

要取得两者乘积为$-\frac{p}{3}$.

现在我们假定(1.17)的系数是实数，并讨论(1.17)的根的情况. 要研究实系数三次方程的根的性质，和二次方程相似，我们需要引进判别式：

$$\Delta=\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3. \tag{1.22}$$

$\left(可以证明\ \Delta=-\frac{1}{108}(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2\right)$

(1) $\Delta>0$; 此时

$$-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{1}{27}p^3} \quad 和 \quad -\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

都是实数且不相等. 令u与v分别是它们的一个实的立方根，则由(1.21)即得

$$x_1=u+v,$$

$$x_2=u\omega+v\omega^2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),$$

$$x_3=u\omega^2+v\omega=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v).$$

所以在 $\Delta>0$ 时，方程(1.17)有一个实根和两个互为共轭的复数根;

(2) $\Delta=0$; 此时有 $u=v$, 令 u 为 $-\frac{q}{2}$ 的实数立方根，且因 $\omega+\omega^2=-1$(见(1.13)), 由(1.21)即得

$$x_1=2u,\ x_2=-u,\ x_3=-u.$$

所以在 $\Delta=0$ 时，方程(1.17)的三个根都是实根，且有两个相等;

(3) $\Delta<0$; 这时卡当公式的立方根内已经不是实数而是虚数了，于是它们的立方根也都是虚数. 这时我们可以证明 u、v 是共轭复数. 这是因为这时

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}},$$

$$u\bar{u}=|u|^2=\sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right|^2}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3}=uv.$$

(这里因为 $|u|^2$ 是实数, $\sqrt[3]{\ }$ 取实根)所以 $\bar{u}=v$.

既然 u、v 共轭，故可令 $u=a+bi$, $v=a-bi$, 于是由(1.21)得

$$\begin{cases} x_1=u+v=2a, \\ x_2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)=-a-b\sqrt{3}, \\ x_3=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)=-a+b\sqrt{3}. \end{cases}$$

因此在这种情况，所得的三个根都是实根，而且互不相同.

我们注意到对于 $\Delta<0$ 的情况，在卡当公式中有一部分即 $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ 出现了虚数，但最后得到的三个根又都是实数，这对于还没有虚数概念的 16 世纪数学家是难以接受的. 他们认为实系数的方程在最后得到实根的情况下，竟然要借助于包含负数开平方的求解公式来求得其根，这实在太令人费解. 卡当和他同时代的数学家认为 $\Delta<0$ 时既然最后得出实根，求解过程中的虚数一定可以避免，因而费了许多精力想除去卡当公式中的虚数性，但是都没有成功. 只有通过伽罗华的理论才最终把这个问题搞清楚了. 原来在这种情况下，不存在仅包含系数的实数根式的代数求解公式. 通常称 $\Delta<0$ 的情况为不可约的情况. 所以历史上第一次被迫引进虚数的概念，是在研究三次方程不可约的情况的时候，而不是象通常那样认为是对 -1 开平方，或者说是在解二次方程 $x^2=-1$ 的时候，这是一件很有趣的事实. 下面举几个解三次方程的例子.

［例］ 解三次方程

(1) $x^3+3x^2+6x+3=0$,

(2) $x^3-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}x+\sqrt{2}=0$.

解 (1) 令 $y=x+\frac{b}{3a}=x+1$，代入原方程化简得

$$y^3+3y-1=0.$$

这里 $p=3$，$q=-1$，$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}>0$.

于是 $$u=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

故原方程的解为:

$$x_1=u+v-1=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-1,$$

$$x_2=\omega u+\omega^2 v-1=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+2\right)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)i,$$

$$x_3=\omega^2 u+\omega v-1=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+2\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)i.$$

这里 $\sqrt[3]{}$ 取实根.

(2) 因

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+\frac{1}{27}\left(-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3=0,$$

所以 $$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}=-\frac{\sqrt[6]{32}}{2},$$

原方程的三个实根为:

$$x_1=-\sqrt[6]{32},\quad x_2=\frac{\sqrt[6]{32}}{2},\quad x_3=\frac{\sqrt[6]{32}}{2}.$$

三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的系数和它的根 x_1, x_2, x_3 之间也有与二次方程相类似的关系式. 事实上, 比较方程

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

与 $$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

的系数, 易得:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}. \end{cases} \tag{1.23}$$

这就是三次方程的韦达公式.

3. 四次方程的解法

四次方程的求根公式和三次方程的求根公式几乎是同时发现的. 卡当的《大法》一书中就已经讲到四次方程的解法. 这个方法是由卡当的学生费拉利 (L. Ferrari 1522～1565) 提出的. 费拉利设法把四次方程化成平方差的形式, 从而把原方程变形为两个二次方程, 然后求得其解. 这个方法通称为费拉利法. 我们简介如下:

任何一个四次方程可以写成:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{1.24}$$

将上式用配方法改写成下面的形式

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d, \tag{1.25}$$

再以 $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{ax}{2}\right)t+\dfrac{t^2}{4}$ 加于方程(1.25)的两边, 我们就可把它写成:

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)x^2+\left(\frac{at}{2}-c\right)x+\left(\frac{t^2}{4}-d\right), \tag{1.26}$$

为了使右边成为完全平方, 只要选取适当的 t, 使(1.26)的右边的判别式等于零即可, 即