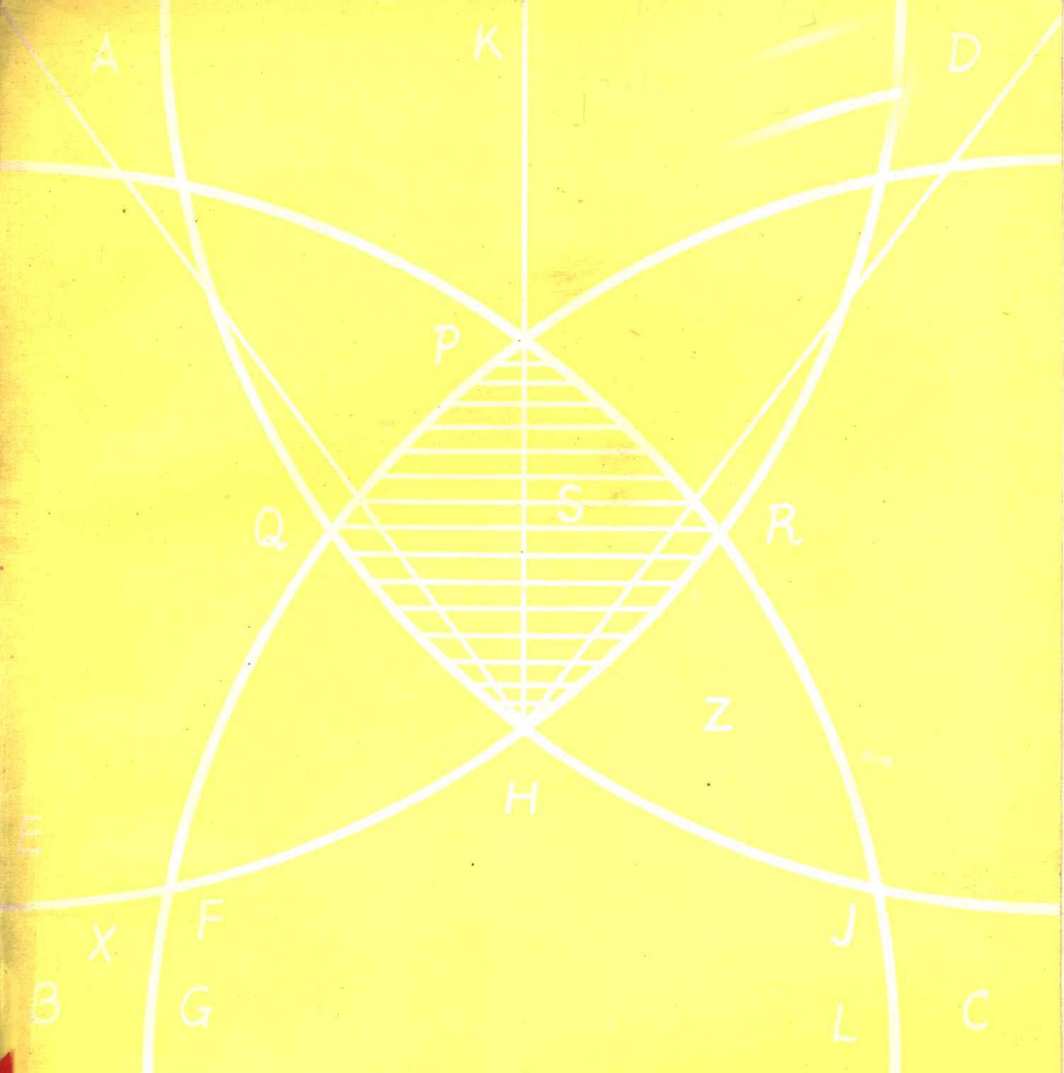

中学数学复习

江西人民出版社

数 学 小 丛 书

中 学 数 学 复 习

（修 订 本）

《中学数学复习》编写组

江 西 人 民 出 版 社

一九七九·三·南昌

数学小丛书

中学数学复习

（修订本）

《中学数学复习》编写组

江西人民出版社出版

（南昌百花洲8号）

江西省新华书店发行　江西新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张19 1/4　字数44万

1979年12月第2版　1979年12月江西第1次印刷

印数：1—65,000

统一书号：7110·171　定价：1.51元

修 订 版 前 言

在华国锋同志为首的党中央领导下，全国工作的重点已转到“四个现代化”，这不仅是全国人民的心愿，也是全国人民的职责，而重要的一环就是各级学校教学质量的普遍提高。面对大好形势，广大在校学生和知识青年迫切要求学好数学，从而掌握更多的文化科学知识，以适应当前形势发展的需要。根据这一情况，我们在一九七八年依据征求意见的教学大纲，以传统的中学数学内容为主，参酌了作者们在教学中的一些经验体会而编写了《中学数学复习》；今年我们根据试行教学大纲和读者的意见进行了修订。这个复习资料就内容而言以基本知识、基本训练为主，适当地给予综合贯通；在新增部份，解析几何以前已有一定基础，其他如微积分、概率、集合、二进位制等现代数学部分也适当作了些简单的介绍。在编写方法上各章除列述了重要的基本概念以外，并就典型问题列举了一些范例，以供观摩探讨；每章并都有一定数量的习题，而且在最后都附有习题的答案或提示，以供自学解题之参考。总的目的在于巩固学生的双基知识，培养学生的逻辑思维以及独立解决问题的能力，并为进一步学习其他学科打下基础。因此，本书可作为在校学生、知识青年复习、自学以及数学教师参考之用。

本书由熊大桢主编，执笔的有许竹荪，杨圣宏、陆明仁、邱焜之、万良平、谌瑞生等同志，并请人民教育出版社吕学

礼、鲍珑、蔡上鹤等同志审阅，在此表示谢意。

由于我们的水平有限，错误之处在所不免，盼请读者给予批评指出，以便改正。

中学数学复习编写组

一九七九·三

目　　录

第一篇 代　　数

第一章 数的概念　二进位制

数的概念是随着人类社会生产活动的需要而逐渐形成并且逐渐扩展的．数的概念的每一次扩展，就给数学以解决实际问题的新工具．

一　自 然 数

人类社会发展的最初阶段，由于计数的需要就逐渐形成了自然数的概念，逐步了解了自然数的一些主要性质．

1.性质

（1）自然数集合中的数永远可施行加、乘运算（即自然数集合中的数经过运算结果仍得该集合中的数）。

（2）任意两个自然数可以比较它们的大小；自然数有最小的数1，但无最大的数．

2.数的质因数分解

（1）质数和合数：在自然数中除单位1以外，其他只能被1和自己整除的数叫做质数（或素数）；不但能被1和自己整除，还能被其他的数整除的数叫做合数。

（2）因数和质因数：乘数和被乘数都叫做积的因数；一个合数的质数因数叫做这个合数的质因数．

（3）分解质因数：把一个合数表示成质因数连乘积的形式，质因数中如有相同的数，应把它写成乘方的形式．

3.最大公约数和最小公倍数

(1) 约数、公约数、最大公约数、互质数；能够整除某一个数的数叫做这个数的约数；几个数的公共约数叫做这几个数的公约数；几个数的公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数；如果两个数的最大公约数是1，这两个数叫做互质数.

(2) 倍数、公倍数、最小公倍数：能够被某一个数整除的数叫做这个数的倍数；几个数所公有的倍数叫做这几个数的公倍数；公倍数里最小的一个（除零以外）叫做这几个数的最小公倍数.

二 整 数

自然数又称正整数，自然数、零、自然数的相反数总称为整数，它的主要性质是：

(1) 整数集合中的数永远可施行加、减、乘（包括乘方）三种运算；

(2) 任意两个整数可以比较它们的大小；整数无最小的数，也无最大的数.

三 有理数

整数、分数总称为有理数（即一切有限小数，无限循环小数）它的主要性质是：

(1) 两个有理数之间可以比较大小，有理数中无最小的数也无最大的数；

(2) 在有理数范围里，永远可以单值地进行加、减、乘、除（除以零除外）这四种运算；

(3) 两个有理数之间还有无数多个有理数；

（4）任何一个有理数可用既约分数$\frac{m}{n}$表示。

四 实　数

有理数、无理数总称为实数。无限不循环小数叫做无理数。无理数不能用分数表示，但可用小数近似地表示。

实数的主要性质是：

（1）任意两个实数可以比较它们的大小，实数中无最小的数也无最大的数；

（2）在实数范围里永远可施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算；

（3）两个实数之间，还有无数多个实数；

（4）实数范围里的数与数轴上的点可以建立一一对应关系。

五 复　数

实数与虚数总称为复数。设a、b为实数，形式为$a+bi$的数叫做复数。a叫复数的实部，它的单位是1，bi叫复数的虚部，它的单位是i，b叫复数虚部的系数。在复数$a+bi$中 ：

如$b=0$则为实数；如$b\neq0$则为虚数，如$a=0$ $b\neq0$则为纯虚数。

如$a=0$，$b=0$则$a+bi=0$，反之如$a+bi=0$则$a=0$，$b=0$。

如$a=c$，$b=d$则$a+bi=c+di$，反之如$a+bi=c+di$则$a=c$，$b=d$。

$a+bi$和$a-bi$叫做共轭复数。

1.复数的主要性质：

(1) 复数范围里的数永远可以施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方、开方六种运算。

(2) 任意两个复数，只要有一个是虚数，就不能比较它们的大小；

(3) 复数和复平面内的点可以建立一一对应关系。

2.复数的几何意义

复数 $a+bi$ 可以用直角坐标系所在的平面内的点 M 来表示，这个点的横坐标是 a，纵坐标是 b。

如果 M 点表示复数 $a+bi$，连结原点 O 和 或 M，并且把 O 点看做线段 OM 的起点，M 点看做线段 OM 的终点，那末线段 OM 就是一条有方向的线段，这样的一条线段叫做一个向量。向量 OM 的长 r 叫做复数 $a+bi$ 的模数或者绝对值，容易得出：

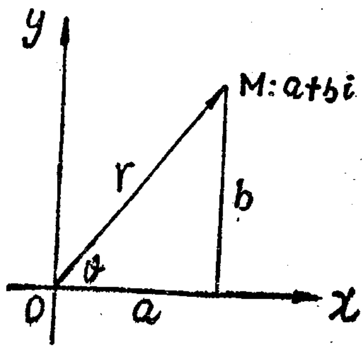

图 1—1—1

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

复数 $a+bi$ 的模数用符号 $|a+bi|$ 表示，就是

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

x 轴的正方向 OX 和向量 OM 所夹的角 θ，叫做复数 $a+bi$ 的幅角，不等于零的复数 $a+bi$ 有无数个幅角。其中小于 2π 而大于或等于零的角叫做幅角的主值。复数 $a+bi$ 的幅角 θ 可以用公式

$$\cos\theta=\frac{a}{r};\ \sin\theta=\frac{b}{r}\text{来确定。}$$

如果复数 $z=a+bi$，幅角 θ 常用 $Arg\, z$ 来表示。θ 的主值用 $\arg z$ 表示。

3.复数的三角函数式

利用复数 $a+bi$ 的模数和幅角，可以把复数 $a+bi$ 表示成

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

式子 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数的三角函数式，而把 $a+bi$ 叫做复数的代数式。

为简便起见，我们把 $\cos\theta+i\sin\theta$ 用一个记号 $e^{i\theta}$ 表示。亦即：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，于是就有 $z=re^{i\theta}$

例如 $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$等等。

$z=re^{i\theta}$ 称为复数的指数式。

4.复数的运算

(1) 加法和减法

用代数式来表示复数时，进行加、减、运算较为方便

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$$

(2) 复数的乘法

(i) 用代数式表示复数，那末

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

(ii) 用三角函数式来表示复数，那末

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

一般地

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$\cdots\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

$$=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

(3) 复数的除法

(i) 用代数式来表示复数，那末（a_2、b_2不能同时为零）

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}i$$

(ii) 如果用三角函数式来表示复数，那末($r_2\neq0$)

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

(4) 复数的乘方

一般要用三角函数式来表示复数

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

这个公式叫棣美弗定理

(5) 复数的开方

(i)复数开平方有时用代数式来表示复数

当$b>0$时，$\sqrt{a+bi}$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right)$$

当$b<0$时，$\sqrt{a+bi}$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right)$$

也有时可以用复数相等的方法以求解。

(ii) 复数的开方一般用三角函数式来表示复数

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

这里$\sqrt[n]{r}$表示正数r的n次算术根.$k=0,1,2,\cdots,n-1$,

由此可知复数n次方根有n个值，它们所对应的复数分布在复平面内以O为圆心以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆上，并将圆周n等分。

六　数的系统表

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数——无限不循环小数.（π和e是超越无理数）
  - 虚数
    - 纯虚数
    - 混合虚数

例　题

1．求证$\sqrt{2}$、$\lg^3$是无理数

证明：用反证法，如果$\sqrt{2}$是有理数

则　　$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$　　（$p.q$都是正整数且$p.q$互质）

平方得：　$q^2=2p^2$　(1)

$\because$　$2p^2$是偶数，故q必为偶数

命$q=2k$　（k为自然数）

代入(1)得：　$4k^2=2p^2$　　$\therefore$　$p^2=2k^2$

故 p 也是偶数，与$p.q$ 互质矛盾

∴ $\sqrt{2}$是无理数.

如果lg 3是有理数

则 $\lg 3 = \frac{q}{p}$ （$p.q$都是正整数且$p.q$互质）

∴ $10^{\frac{q}{p}} = 3$ 故有$10^q = 3^p$………………(1)

∵ q 为正整数

∴ (1) 左边是一个整数且个位数字必为零

∵ p 为正整数

∴ (1)右边是一个整数且个位数字不是零

所以(1)不成立 即 $\lg 3 \neq \frac{q}{p}$

∴ lg 3 是无理数.

2. 证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$中，$a.b.c$ 都是奇数时，方程没有整数根.

证明：如果x为奇数 ∵ $a.b.c$ 是奇数

则 $ax^2+bx+c=$奇数+奇数+奇数$\neq 0$.

∴ 方程无奇数根.

如果x 为偶数 ∵$a.b.c$是奇数

则 $ax^2+3x+c=$偶数+偶数+奇数$\neq 0$

∴ 方物无偶数根

因此方程 $ax^2+bx+c=0$ 无整数根

注意：以上两例基本上都是采用反证法，抓住数的特性进行论证.

3. 已知在直角坐标系中，A点表示复数$1+\sqrt{3}\,i$. 求(1)模

数. 幅角；(2)旋转150°到 p 点所表示的复数的代数式

解：(1) $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\quad \theta=60°$

它的模数是 2；幅角的主值是60°

(2) 旋转150°到 p 点后，三角函数式为

$$2[\cos(60°+150°)+i\sin(60+150°)]$$

$$=2(\cos 210°+i\sin 210°)=-\sqrt{3}-i$$

$\therefore$ 代数式是 $-\sqrt{3}-i$

4. 解方程 $x^4+1=0$. 并证明：平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点.

解：$\therefore\quad x^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\therefore\quad x=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi$$

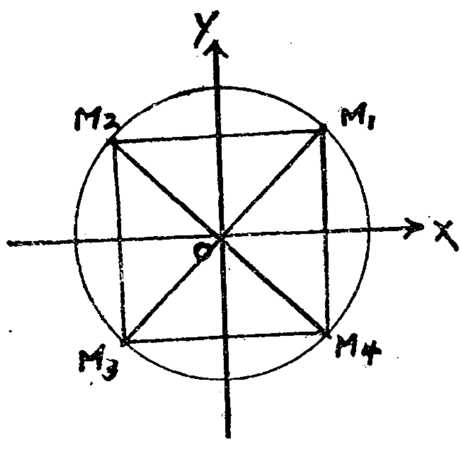

图 1—1—2

令 $k=0,1,2,3$

$$\therefore\quad x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

设 M_1,M_2,M_3,M_4 分别表示 x_1,x_2,x_3,x_4 四个根

则 $\because\quad |x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$

$\therefore\quad M_1,M_2,M_3,M_4$ 都在单位圆上

且 $\angle M_2OM_1=\arg x_2-\arg x_1=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

同理，$\angle M_3OM_2=\angle M_4OM_3=\angle M_1OM_4=\frac{\pi}{2}$

$\because$ 四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的对角线互相平分，又垂直、相等，

$\therefore\quad M_1M_2M_3M_4$ 是一个正方形。

5. 如果 $(x+y)^2i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$，求实数 x、y 的值。

解：两边乘以 $-i$ 得：

$$(x+y)^2+6+xi=yi+5(x+y)+i$$

就是：$[(x+y)^2+6]+xi=5(x+y)+(y+1)i$

由复数相等的条件得：

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y) & (1)\\ x=y+1 & (2)\end{cases}$$