张奠宙 李士锜 主编

数学教育研究前沿

第一辑

数学中的问题探究

张广祥 著

华东师范大学出版社

数学中的问题探究

张奠宙　李士锜　主编

数学教育研究前沿·第1辑

数学中的问题探究

张广祥　著

华东师范大学出版社

SXJYYJQY

图书在版编目(CIP)数据

数学中的问题探究/张广祥著. —上海:华东师范大学出版社,2003.5

(数学教育研究前沿. 第1辑/张奠宙,李士锜主编)

ISBN 7-5617-3269-4

Ⅰ.数... Ⅱ.张... Ⅲ.数学教学-教学研究-中小学 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第017382号

数学教育研究前沿 · 第1辑

数学中的问题探究

著　　者/张广祥
组　　稿/倪　明
特约编辑/陈信漪
封面设计/高　山
版式设计/蒋　克
出版发行/华东师范大学出版社
电话 021-62865537　　传真 021-62860410
门市(邮购)电话 021-62869887
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址/上海市中山北路3663号
邮编　200062
印　　刷/华东师范大学印刷厂
开　　本/890×1240　　32开
印　　张/3.25
插　　页/4
字　　数/84千字
版　　次/2003年5月第一版
印　　次/2003年5月第一次
书　　号/ISBN 7-5617-3269-4/G · 1715
本辑定价/50.00元(本册10.00元)

总　序

——建设有中国特色的数学教育理论

数学教育的历史和数学本身的历史一样长。当人类结绳记事的时候，就有把数量大小、先后次序传授给下一代的教育。在埃及的纸草、巴比伦的泥板、中国的竹简上，都留下了数学的痕迹，那是当时让儿孙们去认读的文书。中国隋唐时期设明算科，凭数学知识居然可以到朝廷去做官，更是数学教育史上一件盛事。

至于现代的学校数学教育，自然始于西方。中国实行学校制度，普遍开设数学课程，当是辛亥革命推翻清朝以后的事，至今也就百年。不过，中国数学教育的发展似乎并不落后。近百年来，先学日本，继学欧美，再学苏联，可谓博采众长。经过大跃进、调整巩固、文革动乱、拨乱反正，自己也慢慢摸索出一条发展中国数学教育的路子来了。依照国际数学水平测试的结果，中国学生的数学成绩不仅远超发展中国家，而且也优于发达国家。个中原因，现在还没有非常认真地总结过。一个不争的事实是，儒家文化、考试文化、考据文化等因素，是影响中国数学教育成功的因素之一。那么，在实践中获得成功的中国数学教育，是否可以产生一种理论呢？似乎还不能给出一个明确的结论。

数学教育作为一种理论，大约是20世纪60年代以后的事。那时荷兰数学家弗赖登塔尔担任国际数学教育委员会主席。他主张数学教育研究应当像数学研究一样，要明确前人做了些什么，现在有什么问题，我用什么方法研究，得到了什么新的结果。1968年第一次

国际数学教育大会召开,算是现代数学教育研究的肇始。

如果说,中国在数学教育的实践上取得了引人注目的成就,那么在数学教育研究上则相对落后。长期以来,是把数学教育研究等同于国家数学教学大纲的说明书(“教材教法”),或者走“一般教育学+数学例子”的研究道路。数学解题理论只到波利亚为止。发表的文章中,除了解题的以外,往往是介绍国外的东西,或者综合性地加以报导,并未参与研究或进行评论。至于自己的主张,则往往只是“浅谈”、“初议”、“思考”、“感想”而已。其中不乏真知灼见,却因缺乏“科学”的方法,淹没在泛泛而谈的论述之中。

我们在 20 世纪 80 年代就想改变这一现状,编写过《数学教育研究导引》一书,试图介绍一些数学教育研究的范本。此书发行一万册,后常见在不少文章中引用其中的观点,大概还算有些影响。十几年过去了,我国的研究工作有了一些进展,于是就有出版这套《数学教育研究前沿》丛书的计划。蒙华东师范大学出版社领导和倪明同志的支持,历时三载,现在终于和大家见面了。作为这套书的编辑者,我们是力求展现中国式的数学教育研究,尽量把学术含量较高的作品收集起来。其中有在美国、新加坡、德国以及香港和内地大学所做的博士论文,也有针对中国现状所做的调查报告、专题研究,意在积累和展示中国数学教育学者的研究成果,为建设中国特色的数学教育理论提供一些基础。

本丛书的主题及其结论固然可以供大家参考,但我们更愿意推荐的是作者使用的一些研究方法。近年来我国的数学教育研究在方法方面已经有所改进,但从选题的范围,到探索论据的途径和角度,直至提炼结论的恰当程度,仍大有提高之处。纵观近几年国际上的数学教育研究,方法上正在经历变动,更加强调定性分析与定量分析的完善结合。要尽快提升我们研究的水平,关注和学习研究的方法在当前显得尤为重要。借鉴丛书提供的优秀的方法范例,能使我们的一些课题研究以及博士、硕士论文的写作有更严谨的、规范的参照坐标。

收录本丛书前两辑的均是薄本子,约10万字。我们希望研究的课题适当小一些,谈的问题精一些,并做到言之有物,言必有据。这是我们的编辑意图。范良火的《教师教学知识发展研究》,因英文版的篇幅较大,为反映全貌,保留它的完整性,全文照译,单独作为第三辑。

数学教育研究的目的,是揭示数学教育的基本原理、特有规律,把隐藏在大量实践背后的因果线索理清楚,并上升为理论。这里,不能仅仅停留在若干教育学、心理学的一般规律上,更不能只满足于符合一些时髦的口号。弗赖登塔尔的"数学现实论"、"数学再创造论"、"数学形式化原则";波利亚的"合情推理"学说;范·希尔的"几何学习5水平"界说;杜宾斯基的APOS数学概念教学观;徐利治的数学方法论;陈重穆的"淡化形式、注重实质";张景中院士研究的"Z+Z"数学教育软件等等,都具有浓厚的数学品味和理论价值。从本丛书的成果中,我们也看到了这样的特点。作者们并没有停留在"建构主义"、"个性发展"、"尝试探索"一类的教育学口号之上,而是针对数学教育情境,由下而上,比较扎实地就某个专题进行探究。一位数学教育名家说过,数学教育研究应当"上通数学,下达课堂",大概是不错的。

现在我们还有许多重要的事情要做。例如,数学"双基"教学模式,数学练习的变式方法,数学训练中的熟能生巧,数学解题教学中的中国式设计,数学课程的中国特色,以及中国数学教育的原始资料的积累等等,都有待于今后的努力开拓。建设有中国特色的数学教育理论,任重而道远。愿我们大家积极地进取开拓,在不远的将来,在世界数学教育论坛上能够多听到中国的声音。中国应该为国际数学教育事业作出自己的贡献。

张奠宙　李士锜

2002.9.7

前　言

20 世纪 90 年代以来我们正面临一场国际范围内的课程改革运动。对于数学教师来说,怎样使数学课程富有更大的启发性,怎样引导学生获得独立处理数学问题的能力,这是我们所关心的一个中心问题。

本书将从大量的实例出发,探讨中学数学中探究性问题的含义、问题探究的主要途径以及问题探究对数学教学的重要作用。法国数学家 J. Dieudonné 曾经说过,任何水平的数学教学的最终目的,无疑是使学生对他所要处理的数学有一个可靠的直觉。传统的数学教学从内容到方法都更多地把着眼点放在知识的传授上,虽然大量数学教育的理论研究都肯定了教学目标应该着重在学生思维能力特别是创造性思维能力的培养上,但通过什么样的实际可操作的途径才能达到这一目标呢?

最近已经通过的《义务教育阶段国家数学课程标准》和正在研制过程中的《国家高中数学课程标准》,都肯定了数学中的问题探究是发展学生自身创新能力的重要途径。通过探究式教学引导学生真正地学会从观察和分析事实出发,寻求解决问题的方法,体验创造性工作的真实过程,领会归纳式的科学研究方法,使数学课程在学生素质教育中发挥更大的作用。

本书内容包括理论探讨和数学探究的实际课题两个方面。

第 1 章对数学中探究性问题的含义作了简单的界定。探究性问题与通常的课本习题之间虽然没有明确的界限,但我们仍然可以从探究性问题的五个重要特点看到,探究性问题在整个数学结构中的

意义和价值。

在第2章与第3章中，我们为读者提供了20个探究性课题，并且按照作者自己的兴趣和观点对问题作了初步的研究和探讨，分析了这些问题进一步发展的各种可能性，为实际的教学提供参考。这些问题大多是作者在自己的教学和研究过程中积累和选编而成的。其中有些问题虽然参考了有关的文献，但都不是照搬别人的例题，基本上每个探究性问题中都包含了作者自己的独立思考和研究，因此都具有一定的自身特点。对问题的选择大体遵循以下原则：

(1) 问题涉及的知识面限于中学阶段。

(2) 兼顾教学的趣味性与理论性。

(3) 所有的探究即使最终可能牵涉比较深奥的现代数学分支，但一定考虑到是否可能做到"高理论，低表达"，使得中学生能够接受。

(4) 问题本身不完全孤立，要与现代数学之间存在一定的关联，使探究具有实在的价值。

第4、5章是本书的理论探讨部分。这两章要探讨的问题是：怎样进行数学探究。这本来是一个难以简单回答的问题，但作为数学教育工作者我们不得不面对这个重要的问题。我们提出了"思想实验"的理论，并用许多典型的数学实例来分析和论证思想实验发生的真实过程。我们力图使数学探究过程成为一个可以加以研究和分析的实实在在的实验过程，使"思想实验"理论能够转化为一种可操作的教学过程。

第6章是在前五章的基础上再探数学教育的理论问题。本章虽然篇幅很短，但我们突出地选择了诸如建构主义、非形式化数学、知识的科学形态与教学形态、数学的非模式化研究等当前受到数学教育界广泛关注的典型问题，鲜明地表达了作者的观点和论据，希望通过自己的研究表达下面的论点：从数学出发研究数学教育。

本书仅仅是在所研究的问题方面抛砖引玉，诚望获得辛勤耕耘在数学教育事业上的同行的批评指正。

本书可供中学教师、师范院校学生、数学教育方向的研究生以及

其他从事数学教育研究的工作者阅读参考。

本书在撰写过程中得到数学教育界许多专家的支持和鼓励，特别是华东师范大学张奠宙教授始终热情勉励作者参与数学教育方面的研究工作，使作者有机会涉足这一领域的探讨和研究，作者对此深表感谢。同时感谢华东师范大学出版社支持本书出版，还对陈信漪老师在本书编排过程中认真细致的校核工作深表敬意。

目　录

1 问题探究的含义

1.1 探究性问题的特点

在数学教学活动中我们无法简单地把问题探究与解题严格地区分开来,数学课本中任何一道习题一旦经过证明就可以被称为定理。但是这种解题活动毕竟与真正的数学研究活动存在很大的差别。因为严格地说课本中的每道练习题都不是真正的数学问题,而仅仅是一些“假问题”,学生的解题活动也仅仅是一种掌握知识的过程。下面我们要加以讨论的“问题探究”是介于解题练习与数学研究之间的一类极其重要的数学教学活动。我们将引用一些实例来说明“问题探究”的含义和它的实际发生过程。

我们认为“问题探究”与解题练习的主要区别在于问题探究更多地强调以下五个方面发展的可能性。

一、与结构的关联性

强调所讨论的问题与某种数学结构之间的关联作用,这是与现代数学发展趋势密切相关的。美国科学基金会于 1998 年公布的《资深评估小组对美国数学科学的国际评估报告》中关于当代数学结构作如下的描述:

> 数学是各类科学中最抽象的科学。数学科学包括两个主要方面:第一方面,也是较为抽象的方面,是对结构、模式以及模式的结构和谐性的研究。探究抽象模式结构中的对

称性和规则性是纯粹数学的核心。第二个方面，是对世界上，通常是物理学、生物学和商业中的事件或系统进行建模研究，包括建立一个明确的数学模型，用解析法或计算法来求解数学模型，开发求解特定模型的一般工具[1]。

可见现代数学的主要特点是对模式结构的探究，纯粹数学把结构的对称性和规则性作为研究的核心，因此问题探究的意义和价值取决于它对揭示模式结构的规则性所发生的作用。

如果我们想用简单的语言来描述20世纪以来的当代数学与以前数学的不同特点，那么结构主义是一个恰当的用语。结构主义数学不但从当代数学的每一个理论分支得到证实，大多数研究数学哲学的人也力图用结构主义来联系各种不同的观点。希尔伯特(Hilbert)元数学理论的创立者之一 P. Berneys 在他的一篇论文中这样表述他对数学本质的看法：

传统的观点认为数学是研究量的科学，这一观点起源于欧几里得(Euclid)的著作，在《几何原本》中几何学是以量的理论为基础的。但自从 M. Pasch 以来量的概念的特殊地位已经被取消，人们引进了若干关于位置和顺序的公理，这使得像线性数量这种简单的数学对象也具有某种结构特征，这是现代几何公理化的特点之一。在这种观点的变化之下，数学从传统的认为是量的科学改变为数学是研究结构的科学。但是数学的结构与物理的结构是有区别的，数学中的结构与它们在现实客体中的出现无关，因此数学结构的客观性是一种现象学的客观性，就好比一个音乐作品不可等同于对这个作品的不同演奏一样。因此可以说数学结构是一种理想化的结构。[2]

综合 Berneys 的观点可以认为数学是柏拉图(Plato)(理性)主义与结构主义相结合的科学。这是我们所有理论的一个基本出发点。

二、可扩展性

问题探究的价值总是在被讨论的问题对于理论结构的扩展过程

中体现出来的。显而易见,问题的可扩展性加大了它对于理论结构所产生的作用。如果建构主义的认知学说能够被接受的话,那么可扩展性显示了认知建构的实际发生过程。J. Piaget 指出:认知结构既不是在客体中预先形成了的,因为这些客体总是被同化到那些超越于客体之上的逻辑数学框架中去;也不是在必须不断进行重新组织的主体中预先形成了的。因此,认识的获得必须用一个将结构主义和建构主义紧密结合起来的理论来说明。[3]

复数最初是为解高次代数方程而被引入的,但是仅仅为了解方程这个目的而引入复数,看上去多少带有一些人为的性质。正因为这一原因,虚数在它产生之初的将近一个半世纪中并未得到普遍的认同和接受。直到 1831 年(注意:1843 年已经产生了 Hamilton 四元数,四元数系统比复数系统更抽象、更复杂)像 Augustus de Morgan 这样知名的数学家还在自己的著作《论数学的研究与困难》中说:"虚数$\sqrt{-a}$与负数$-b$只要它们作为问题的解出现,就说明一定有某种矛盾或谬误。只要涉及到实际含义,二者都同样是虚构的,因为$0-a$与$\sqrt{-a}$同样是不可思议的。"复数要不是在其后的解析函数理论的扩展中发挥实数系不可替代的作用,其意义和价值是可想而知的。另一方面只要看一看 1896 年 J. Hadamard 利用黎曼(Riemann)ζ函数成功地证明素数分布定理,复数系在数学中的作用和地位就显得无可辩驳了。

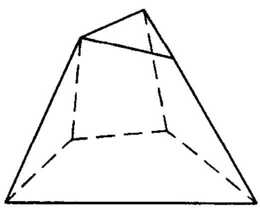
三、解法具有较多的启发性

在有了恰当的问题之后如何找到解决问题的正确途径便成为问题探究的核心。大致存在两类不同特点的解题方法。一类是构造法,此类方法较多地依赖于某个数学系统的已知结构。这类解法或者求助于比较复杂的算法,或者可以通过对系统的结构分析而逐步地逼近最后的求解方案。大多数课本中练习题的解法都属此类。另一类是所谓"启发法"(heuristic),这类方法则更多地依赖于心智的创造力。解题的最终陈述常常简明直观,方法新颖独特。这类解法的背后可能隐含某种新的思想,因而常常会导致更深层次问题的解决。

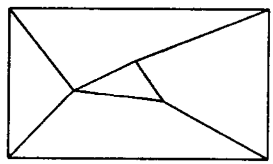
多面体的欧拉(Euler)定理是一个很好的实例。欧拉定理断言，简单(单连通)多面体的顶点数 V、边数 E 与面数 F 满足关系 $V+F=E+2$。

这个在中学立体几何中显得有些独特的定理最初是出于什么考虑而获得的呢？平面几何中“三角形内角和为 π”这个定理给我们留下的强烈印象是：它不依赖于三角形的量度性质(形状和大小)，可以把它看成三角形的一个特征性质。与此相关的是凸 n 边形的内角和：只与边数有关。由此产生的一个自然类比的问题是：多面体平面角的和是否也具有这种美妙的性质呢？答案是肯定的。解法如下：

设想把多面体压缩(投影)到它自身的一个面上，这种压缩可以改变多面体各条边的长度，但不改变多边体每个面的边数。



已知多面体



投影到一个面上

图 1-1

设已知多面体的 F 个面分别是边数为 S_1, S_2, …, S_F 的多边形，于是多面体平面角的和 $\sum=(S_1-2)\pi+(S_2-2)\pi+\cdots+(S_F-2)\pi=(S_1+S_2+\cdots+S_F)\pi-2\pi F=2\pi E-2\pi F=2(E-F)\pi$。

另一方面，假定底面是一个 r 边形，则多面体投影在底面内部的 $V-r$ 个顶点的平面角的和为 $2(V-r)\pi$，底面多边形内角和是 $(r-2)\pi$，投影后所有面的内角总和为 $2(V-r)\pi+2(r-2)\pi=2(V-2)\pi$。投影过程保持原多面体每一个面的内角和不变，因而总和不变，即 $\sum=2(V-2)\pi$。于是 $2(E-F)\pi=2(V-2)\pi$，$V+F=E+2$。定理得证。

评述：到现在为止我们仅仅求助于简单的多边形内角和的计算

就证明了欧拉定理。证明方法从形式上看是构造性的。从这个意义上我们可以把欧拉定理看成三角形内角和定理的一个平行推广。但是从多面体到其中一个平面的投影方法具有独特的启示性。由于上面方法的启发性,可以把问题导向一个全新的角度。欧拉定理实际上等价于下面的平面图问题。如果把平面图中的每个圈看作平面图的一个面,那么有下面定理。

定理 连通的平面图 $V-E+F=1$。

上面这一想法最终将导致代数拓扑学中的单复形概念以及由此衍生出来的同调群理论。多面体的欧拉定理最终将推广成为拓扑学中的极其重要的关于欧拉特征的 Euler-Poincaré 定理。[4]

四、能导致新的问题

数学热衷于寻求新的问题,数学把形式优美的问题看作自己的生长点。因此成功的探究不但产生新颖的数学定理、思想和方法,而且还能帮助我们从新的视角找到新的问题。虽然问题探究的直接目的是为了寻求问题的解答,但是寻求解答却并不是问题探究的唯一目的。特别是在一时无法找到最初问题的答案时往往把探究的方式调整为在原有的问题中寻找新的问题,也许新的问题最终成为解决老问题的突破口。

我们有很多的实例说明在原有的问题中探求新的问题的重要性。现在大家已经知道,产生于 360 年前的费马(Fermat)问题的解决,并不是在逐一地对无穷多个不同的指数 n 证明方程 $x^n+y^n=z^n$ $(n\geqslant 3)$ 不存在正整数解,费马问题的解决最后是在全新的"谷山-志村模函数"问题之下获得解答的。感兴趣的读者不难在介绍费马大定理的文章中了解到:在漫长的三个半世纪中虽然人们并未找到解决费马问题的最后方法,但是在费马问题的基础上衍生出来一系列新的问题却对现代数学的发展产生了重要作用。

五、问题包含更多的理性

选择什么样的问题作为探究的对象才显得更有价值呢?这是一个极其复杂的问题,它甚至涉及到我们对数学哲学背景的思考。希