

中国力学学会
第一次极限分析及塑性理论学术讨论会
论文选集

(内部资料)

中国力学学会編輯
科学出版社出版

中国力学学会

第一次极限分析及塑性理論学术討論会

論 文 选 集

(內 部 資 料)

中国力学学会編輯

科学出版社出版

1965

**中国力学学会
第一次极限分析及塑性理论学术讨论会
论文选集**

中国力学学会编辑

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 117 号

北京市书刊出版业营业许可证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行

*

1965 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1965 年 10 月第一次印刷 印张：9

印数：0001—1,200 字数：205,000

统一书号：13031·2208

本社书号：3358·13—2

定 价：1.40 元

前 言

中国力学学会和受教育部委托的大连工学院于 1963 年 8 月在大连共同召开了全国第一次极限分析及塑性理论学术讨论会。会上共宣读论文 40 篇,有不少论文是结合工程实际中的具体问题进行研究的。为了更广泛地交流经验,促进力学的发展,现将在会议上宣读过的较好的论文汇编出版。

本选集共收集了 15 篇论文全文刊登作为第一部分;凡已在全国性学报和高等院校学报发表过的论文,为了避免重复,本选集只刊登摘要作为第二部分;还有一部分在会议上宣读过的论文,只刊登题目以供读者参考。

选入的文章,出版前均经过审查并由作者作了必要的补充和修改。在此谨向大力支持本选集出版的编辑委员会、审稿者、作者及科学出版社表示深切的谢意。

中国力学学会

1964 年 11 月

目 录

第 一 部 分 (全文刊登)

在冲击载荷作用下结构塑性分析近况	王 仁 (1)
塑性分析在钢筋混凝土结构中的应用	杨式德 (23)
关于非均匀正交异性结构的塑性分析	熊祝华 (31)
钢筋混凝土连续梁内力重分布的特性和计算	曹居易、胡德炘 (38)
钢筋混凝土框架塑性内力重分布的试验研究	胡德炘、荣敬安 (43)
连续梁和框架弹塑性工作阶段内力计算的方法	成文山 (48)
受偏心拉伸杆件的定常蠕变及蠕变试验中偏心的影响	严宗达 (58)
关于复杂应力状态下的蠕变规律及简支圆板的近似计算	赵祖武 (67)
悬臂柱壳在侧向和轴向冲击载荷作用下的刚塑性分析	宋国玄、王 仁 (77)
三心顶盖极限承载能力	李康先、王德荣、李明园、胡宗陵 (86)
Mises 理想塑性壳的近似屈服面	曲圣年 (94)
顶端集中力作用下圆锥壳的极限载荷	黄观鸿、曲圣年 (105)
受侧向外压圆柱壳徐变屈曲变分解法	张 行 (116)
刚塑性体动力学的应力极值原理	古国纪 (123)

第 二 部 分 (摘要刊登)

论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理	钱令希、钟万勰 (131)
一般变分原理在结构极限分析中的应用	王长兴、林少培、陈浩然 (131)
用刚构常数法计算有侧移单层刚架塑性阶段的稳定问题	钟 朋、王荫长 (132)
按极限平衡法计算钢筋混凝土矩形板	王福明 (132)
矩形盒式薄壁构件的极限承载能力	钟万勰 (132)
薄圆管在轴压失稳后的极限载荷	黄玉珊 (133)
加环的圆筒壳在水压下的总体塑性稳定	李学道、韩继文 (133)
高压容器极限压力计算法	王仁东 (133)
结合壳极限承载能力的实验和计算	钱令希、周承侗、云大真 (134)
几何形状变化对于结构承载能力的影响	周承侗 (134)
理想塑性平面应力问题的屈服条件	周承侗 (134)
Prager 强化规律的力学模型和力学假设	乐美峯 (135)
脆性破坏统计理论现状	邬瑞锋 (135)
叶翰各点同时到达材料许用应力的设计方法	李敏华、李旭昌 (135)

• v •

第三部分 (题目刊登)

华东航空学院 1954—1956 年塑性弯曲理论与实验研究	胡沛泉等 (137)
铝合金静不定梁塑性弯曲试验研究报告	崔振源等 (137)
交叉梁系的塑性分析及极限破坏载荷	蒋詠秋等 (137)
在轴对称载荷作用下非均匀正交异性圆板的极限载荷	熊祝华、顾耀祖 (137)
不连续解在地基极限分析中的应用	沈珠江 (137)
结构的极限分析的线性规划解法中若干重要理论与实际问题	张承煦、张 行 (137)
考虑强化的无矩柱壳大变形问题	吴洪若、黄文彬 (137)
在无压边情况下首次压延筒件时凸缘屈曲条件的研究	
.....	匡震邦、东成德、权生华 (138)
固体弹塑性力学的势函数及应力应变关系	陈至达 (138)
关于塑性应力应变关系	杨海元 (138)

第 一 部 分

在冲击载荷作用下结构塑性分析近况

王 仁

(北 京 大 学)

一、引 言

这是塑性动力学的的一个课题。在突加载荷的作用下,物体变形的惯性力和其它力相比不能忽略,这就产生了动力学的问题。若载荷足够大,则将在物体內引起塑性变形,形成塑性动力学的问题。我们取一短棍为例说明,在棍的一端给以撞击,棍作为一个整体,其重心将得到一个加速度,不过仔细看棍內的应力分布,从打击端先有弹性波,后有塑性波传出,在棍內来回反射着,因而各点在各个时刻的应力和速度都不一样。不过由于棍子的尺寸较小,波的传播速度较快,在很短时间内,波就反射过多次,经过材料內耗的作用,波很快就消失,棍的各个部分将作等速运动。在应力超过弹性极限的地方会发生塑性变形,因而棍內最后的变形分布和靜力分析的结果很不相同。对于一个结构物来说,突加载荷可以由一个固体的撞击引起的,也可以是由液体或气体波动所施加的。前一情形我们称之为撞击载荷,需要考虑两个固体的质量和接触问题,载荷作用的时间一般较短,和波在结构物內传播的时间相近,常需要考虑波的传播问题。而后一种载荷,我们称之为冲击载荷,载荷作用的时间一般较长,这时可认为波已经消失,可不考虑波的传播过程,而只研究塑性动力变形问题。当然,对于块状物体,如半无限空间等,则都必须考虑波的传播问题。因而,塑性动力学可以粗略地分为研究这样两个问题:塑性波的传播和结构物在动载荷作用下的塑性变形分析。为了研究这两个问题,还需要研究在动载荷作用下的材料力学性质,寻求在这种情形下的状态方程。

由于对抗爆炸和抗震结构的研究以及用爆炸和冲击方法加工成形的研究,塑性动力学的问题在这十几年內得到重大的发展;目前已取得较系统的成果,这由近三年来发表的全面总结[1—5]就可看出;在文[1]中列了 442 篇文献,[2]中列了 212 篇文献,其余的也都列了大量文献。本文将撇开波的传播问题和材料的动力性质问题,而单就结构物(梁,板,壳)的塑性动力变形分析进行系统的介绍,我们还不考虑结构的动力稳定性问题。在这种情况下,可以不管载荷是怎样施加的,都称之为冲击载荷。

最先进行塑性动力分析的结构物是梁。1948 年 Bohnenblust^[6]对无穷长梁在中点得到一个速度的情形进行分析,在速度较小时,梁作弹性变形;在速度超过某一数值后,将出现塑性变形区,他利用与弹性分析类似的方法进行了分析,并且和 Duwez 等人的实验^[6]进行了比较,得到定性的符合。因为牵涉到加载,卸载,再加载等情形,分析相当复杂,在推广到有限长梁时遇到了困难。这时,随着刚塑性材料的极限分析理论的进展,Conroy^[7a]

在 1952 年提出用刚塑性的简化模型进行同样的分析,并指出在弹塑性分析中令弯曲刚度 EJ 增大则趋于刚塑性解,在速度较大时,两个结果也定性相似。不过,此文所用的方法还很繁复,且也不能用于有限长梁。同年, Lee 和 Symonds^[8] 提出有限长梁在中点受集中载荷的刚塑性分析,解法简单明确。此后梁的刚塑性分析乃得到很快的发展。同时此法立即被推广到圆板^[9]和柱壳^[10]中去了。

目前有限长梁的弹塑性分析也得到较好的结果,不过计算还相当繁复。此外,把弹塑性分析和刚塑性分析的结果以及和实验结果也进行了比较,并且还考虑了剪应变和转动惯量的影响,考虑到剪力,轴力和大变形等因素,以及在材料性质中包括应变率影响等情形。可以说对梁的塑性动力分析已较明确。至于板和壳的情形,弹塑性动力分析还做得很少,主要是在刚塑性分析方面做了一些工作。因为动力分析是在静力分析的基础上进行的,采用的假设还较粗糙,实验工作也很少,目前,在这方面还需要进一步明确刚塑性动力分析结果的意义,进一步的发展也有待于静力极限分析取得的成果。

在结构的动力分析中,我们仍采用静力分析中所用的小变形,直线等假定,并且在大多数情形忽略了应变率对材料性质的影响,因而直接应用了静态的屈服条件和流动法则¹⁾。

在动力分析中,由于考虑惯性力的作用,在载荷还没有上升到静极限载荷之前,在弹塑性物体的内部已可能有“无限制”的塑性变形,而在静态时,这里只能发生受约束的塑性变形;对刚塑性物体而言,则还没有开始变形。在变形的时候,弹塑性物体除了塑性变形外还将作弹性振动,若材料的鲍氏效应较严重,则还可能发生反复的塑性变形。而对刚塑性物体,完全忽略了弹性振动,因而到最大变形时,物体即停止运动。在刚塑性分析中,因为忽略了弹性变形,所以所求得的变形过程是不准确的,特别是在塑性变形还较小的初期差别较大。不过,因为弹塑性分析要繁复得多,若我们主要是求结构在冲击载荷下的最大残余变形,并且从而求出在整个变形过程中结构所能吸收的总能量,那么刚塑性动力分析还是很有用的。

对于刚塑性材料而言,在静态时,物体在静极限载荷作用下可以发生“无限制”塑性变形,载荷不能再增大。而在动态时,考虑了惯性力,则载荷尚可超过静极限载荷,甚至超过很多。超载的部分将产生加速度,若载荷在短时间后即行减小,则加速度也减小;当载荷小于静极限载荷时,因为物体内部的塑性变形耗损能比外载所做的功大,因而变成减速度。不过,由于惯性力的作用,即使载荷全部卸完,结构的变形仍将继续进行直到静止,最后得残余变形。当然,若这个载荷持续的时间太长,变形就会过大,仍将使结构丧失承载能力。

在刚塑性动力分析中,由于要考虑惯性力,在运动方程中包含了加速度项,因而不能象静力分析中那样分别用静力可能和运动可能的状态求极限载荷的上下限。所设的变形机构既要满足运动可能的条件,而所对应的加速度又和应力分布满足运动方程的要求,因而刚塑性动力分析总是从静态分析中的“完全解”出发的。在分析中,我们还将碰到动力分析的另一特点,那就是塑性铰的移动,以及从一个塑性铰逐渐扩大成为一个塑性区域或两个塑性铰逐渐合并成一个铰的种种情形,这就需要对间断线进行更一般的讨论。

1) 通常考虑应变率影响的办法是根据应变率的大小,改变屈服应力的值。也就是说应变率只影响屈服面在应力空间中的尺度,而不影响他的形状。

我们可以再看一个取自文[8a]的简单例题。图1表示一个长为 $2l$ 的自由梁,在中间受一个集中力 $P(t)$ 的作用。 $P(t)$ 的变化如图1c所示。当力 P 小于 P_0 (对应于 $\mu = Pl/M_i = 4$,这里以 M_i 表示梁截面的塑性极限弯矩)时,梁不变形而仅作刚体等加速运动。这时,我们可以把梁看成为各点有均布惯性力的作用和 P 相平衡。在 $P = P_0$ 时,这些惯性力所产生的弯矩足以在中点形成一个塑性铰。若 $P > P_0$,两侧绕中点向后转动的速度也增加,和各点前进的加速度抵消将使离中点较远的地方发生反方向的惯性力,从而在 $P = P_1$ 时(对应的 $\mu = 22.9$),在两侧 $x = 0.404l$ 处弯矩达到 M_i ,形成三个铰的形状。若 P 再行增加,两侧的铰点将继续向内移动,同样可以算出各点的运动情形。在卸载过程中,梁凭着惯性力继续变形,铰重行向外移动,在一定时刻消失,直到各点的惯性力不足以产生塑性变形为止,梁将以等速前进。从图1b看出,在载荷卸完以后,变形还将继续进行相当长的时间。

我们估计刚塑性分析在塑性变形比弹性变形大得多的情形下会给出较好的结果。怎样判別塑性变形是较大了呢?有人提出要求弹性曲率 $\ll$ 塑性曲率;也有人把材料假想成理想弹性,要求体内的最大弯矩 $\gg$ 塑性极限弯矩;现在较常用的是要求变形能的比值 $R \gg 1$,其中

$$R = \frac{\text{结构所吸收的塑性变形能}}{\text{结构所能吸收的最大弹性变形能}} = \frac{E_p}{E_e} \quad (1)$$

对梁做的实验证明,当 R 在10左右时刚塑性分析是适用的,也有实验说明 R 等于2—3时,刚塑性分析就相当好了。事实上后者也是合理的,因为在分母中选用了结构全部到达弹性极限时的总能量,而实际上结构中只有一部分材料达到弹性极限。

以下分别对梁、板、壳的塑性动力分析和最小原理的发展近况进行介绍。限于作者的水平,片面和错误的地方一定很多,望大家指正。

二、梁的塑性动力分析

关于梁的塑性动力分析,最近 Дикович 进行了全面的总结^[11]。Rawlings 也做了简单扼要的介绍^[12],他还提到怎样把它应用到刚架结构中去的问题。我们在这儿只介绍基本原理,以及补充一些最近的实验结果。

(一) 假设和基本方程

我们仍采用静态极限分析中应用的一些假设。在弯矩 M -曲率 K 图中(图2),用 OCD 表示理想弹塑性材料(对应于理想工字截面或夹层截面),用 OBD 表示理想刚塑性材料。在线性强化的情形,我们将用 OCE , OBF 等折线表示,这个假设忽略了弹塑性的过渡阶段,由此计算出来的挠度估计应比实际的低一些,不过影响不会很大。此外,在一般分析

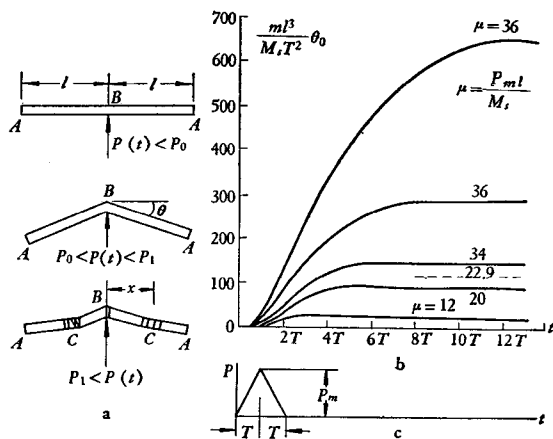


图1 自由梁受集中力的刚塑性动力分析

中都忽略了剪应变和转动惯量的影响,并且仍然认为变形较小。

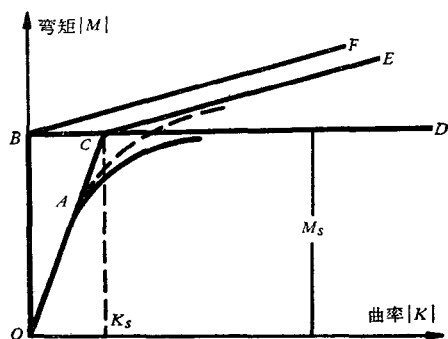


图2 M-K 关系图

对理想弹塑性材料有

当 $|M| < M_s$ 时, $\dot{M} = EJK(K = y'')$, (5)

当 $|M| = M_s$ 时, $\dot{K}$ 和 $\dot{M}$ 同号. (6)

对理想刚塑性材料, (5) 式改为

$$|M| < M_s \text{ 时 } \dot{K} = 0. \quad (7)$$

(c) 边界条件.

(d) 初始条件: $y(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = 0$,

(e) 塑性铰的运动规律:

对于理想塑性材料, 在 $|M| = M_s$ 的截面处, 将发生塑性铰, 在铰两侧的 y' 将是不连续的, 不过挠度 y 和速度 $\dot{y}$ 以及 M, Q 仍然是连续的. 在动力分析中, 塑性铰可以移动, 在它的两侧, 各力学量满足以下关系.

设塑性铰的位置为 $x = \xi$, 将两侧挠度 y 的连续性写成间断 $[y] \equiv y(\xi + 0) - y(\xi - 0) = 0$, 则随着铰的移动, 应该有

$$[\dot{y}] + \dot{\xi}[y'] = 0. \quad (8)$$

这里方括弧表示所含量在两侧的差. 又因在铰的两侧 $\dot{y}$ 也是连续的 (否则将导致铰所在的地方有无穷大的加速度, 或物体破裂), 因此 (8) 式说明只有在静止铰 ($\dot{\xi} = 0$) 处, 斜率 y' 才可能间断. 反之, 产生斜率间断的塑性铰也一定是静止铰, 而在移动铰处, y' 一定是连续的. 因而, 在 $\dot{\xi} \neq 0$ 时, 同样有关系:

$$[\dot{y}'] + \dot{\xi}[y''] = 0. \quad (9)$$

既然在塑性铰处 y' 是不连续的, 对移动铰, y' 虽然连续而 y'' 却有间断. 另外从 $\dot{y}$ 的连续条件, 得到随着铰的移动, 应该有

$$[y] + \dot{\xi}[\dot{y}] = 0. \quad (10)$$

因此, 在移动铰处, y 一定间断; 而在静止铰处, y 一定连续. 反之, y 连续的铰, 一定是静止铰.

此外由平衡要求得 M 必须连续, 因此随着铰的移动, 得

$$[\dot{M}] + \dot{\xi}[M'] = 0, \quad (11)$$

由于 $Q = M'$ 也是连续的, 因此 $\dot{M}$ 总是连续的. 若在此截面没有集中的外力作用, 这里的 $Q = M' = 0$.

采用一般符号规则, 并以一撇表示对 x 的一次微商 (沿梁轴), 一点表示对时间的一次微商, 我们有:

(a) 运动方程:

$$Q' = -(p - m\ddot{y}), \quad (2)$$

$$M' = Q, \quad (3)$$

消去 Q , 得基本方程

$$M'' = -(p - m\ddot{y}), \quad (4)$$

其中 $p(x, t)$ 是载荷, m 是单位梁长的质量.

(b) 应力应变关系和屈服条件:

以上只讨论了一个铰的情形,若有两个铰相交的情形,最好在 $x-t$ 平面上考虑铰的移动轨迹,问题就要复杂得多。

(二) 梁的弹塑性动力分析

Bohnenblust 在文[6]中处理无穷长梁在中点得一速度 v_0 的弹塑性动力分析,材料的强化性质是任意的,他采用弹性情形的同一参量变换式,设 $y = tf(x^2/t)$, 求得了挠度和弯矩分布,并且用较长的梁进行了实验,得到较好的定性结果。在这个解中,扰动以横波形式从中点开始向两侧传去,各点都将随时间而移动。对于有限长梁而言,这也是波传到支承以前的解,不过用这方法,很难满足有限长梁的端部条件。

目前对有限长梁,主要用的有以下两种方法,它们一般都用于理想弹塑性材料。

A. 模态 (Mode) 方法。这是一种逐次弹性的迭加法。由于对 $M-K$ 曲线采用了前述的假设,一个截面不是弹性的就是塑性的,因此可以随着载荷的增长,先从弹性梁做起。这时,一般的变截面情形的基本方程为:

$$[EJy''(x, t)]'' + m(x)\ddot{y}(x, t) = p(x, t). \quad (12)$$

在给定的初始条件和边界条件下, $y(x, t)$ 可以用基本模态 $\varphi_i(x)$ 展开^[11,13], 有了 y 以后,再由(5)式求出弯矩分布。随着载荷的增加,在 $t = t_1$ 时,某截面 C 的弯矩将达到极限弯矩 M_s 。此后,我们就从这里将梁分成两段,它们各有一端仍为原有的边界,而另一端 C 的力矩为 $M_s, Q_C = 0$ 。各段又按弹性方法计算,这时基本模态改为 $\psi_i(x)$, 初条件为 $y(x, t_1)$ 及 $\dot{y}(x, t_1)$ 。求出的解又需要保证在各段中都不超出 M_s 。在任何点到达极限弯矩时,再度分割。这样逐次迭加下去可以求出弯矩和挠度的变化过程。在计算中,还要保证截面 C 维持在塑性阶段,这里的折角应该是不断增长的。当这个折角不再增加或开始减少时 ($t = t_f$), 这里要发生卸载。这时,要把梁重新看成一个整体进行弹性计算。若此后不再发生新的塑性变形,则在 $t = t_f$ 时,对应最大的挠度及残余变形。

这个方法也可用于非理想塑性的情形, Greenspon^[16] 用 $M = K_r\theta + C_r$ 表示一般的强化情形以及失稳后的情形,其中 θ 表示铰的折角, $K_r > 0$ 为强化, $K_r = 0$ 为理想, $K_r < 0$ 为失稳后的情形。在解法上文[16a]利用 Mindlin 的可移边界方法。

对载荷和支承为对称,并且塑性铰较少又不移动的情形,用这一方法计算不太复杂,解过的问题较多。不过对铰较多及移动铰的情形,计算就极为复杂,因此,只能求解比静极限载荷略高的情形,对于载荷较高的情形还没见到什么结果。

B. 差分方法^[18]。把梁分成 n 段,质量集中在各段的端点,时间也分成若干短间隔,列出各集中质量的运动方程,可以得到代替(12)式的差分方程。在超过弹性极限的截面处将出现塑性折角,视折角的增大或减小可以判定这截面是否保持塑性。

用这个方法可以利用电子计算机计算发生多个铰和铰移动等情形,它比前一方法方便,而且近似性仍很好。Greenspon^[16b] 还说过这种方法的计算结果和实验比较接近。

此外 Plass^[14], Галин^[15] 等人用波传播的理论,用 $M, Q, \dots$ 等量沿特征线的关系处理

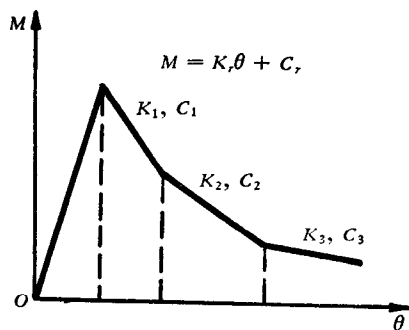


图3 强化材料及失稳情形的 $M-\theta$ 关系

了无限长梁受突载的情形,并且还考虑了剪应变和转动惯量。这是更精确的分析,在载荷作用时间短促时应用。

在附表 1 中收集了梁的弹塑性动力分析现有文献,由此可见其发展情况。目前公认以差分方法解题较好,不过发表的具体结果以及和实验的比较还很少见到,可供和刚塑性动力分析进行比较的结果也少。从现在的实验结果看,应变率的影响是较大的,而这方面的理论分析还没见到。至于剪应变和转动惯量的影响,除了用波动方法处理外,也没见有其他什么方法加以考虑。

(三) 梁的刚塑性动力分析

梁的刚塑性动力分析可以直接从(一)节各个方程和条件进行。一般在外载略大于静极限载荷时,可先采用静力分析完全解的变形机构,代入运动方程,从边界条件、连续条件、初始条件等就可以定出对应的弯矩分布及变形过程。当外载增大到一定数值时,这个弯矩分布将在某处超出屈服条件,根据这个情况修改原来变形机构,提出另一个适用于高载荷的变形机构,并且重复验证方程和条件。图 1 的例子可以说明这些步骤。

我们注意到梁的变形机构是几个由铰连接起来的刚性段组成的,因而实际上是把无限自由度的问题化为有限自由度来处理,这是刚塑性分析比弹塑性分析简单的主要原因。

另外,我们也可以把运动方程 1)在刚性段,直接应用动量和动量矩的守恒定理建立;2)在连续的塑性段,因 $|M| = M_s$, $Q = 0$, 直接使惯性力和外载荷相等来建立。这种做法有时比前一种作法更方便,现以悬臂梁为例来说明。

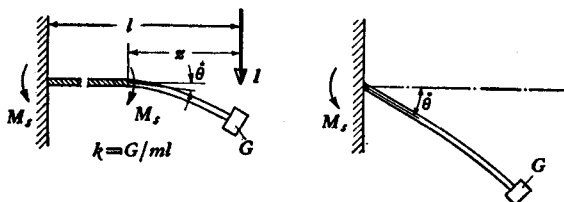


图 4 悬臂梁受端部冲量的两个变形阶段

图 4 表示带有端部重量 G 的悬臂梁,在 G 上受一冲量 I 。变形分两个阶段。在第一阶段(图 4a),塑性铰从自由端形成并逐步移向根部,靠外部分的弯矩小于 M_s ,故以角速度 $\dot{\theta}$ 作刚体转动,而靠内部分的弯矩均为 M_s ,所以静止不动。在移动铰处,角速度、曲率及加速度都有间断。在塑性铰到达根部以后进入第二阶段(图 4b),整个梁绕着固定于根部的铰作刚体转动。

在第一阶段,从动量及动量矩守恒定理得运动方程:

$$\frac{1}{2} m z^2 \ddot{\theta} + G \dot{\theta} z - I = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} m z^2 \dot{\theta} (l - z) + G \dot{\theta} z l + \frac{1}{3} m z^3 \dot{\theta} - I l = -M_s t, \quad (14)$$

由(13)式得当铰到达根部时的角速度 $\dot{\theta}_1$ 为

$$\dot{\theta}_1 = 2I / (1 + 2k) m l^2, \quad (15)$$

其中 $k = G/ml$ 为端重和梁重之比。我们注意 $\dot{\theta}_1$ 与 M_s 的值无关,故对不同 M_s 的梁, $\dot{\theta}_1$ 和第二阶段的动能是相同的。从(13), (14) 式中消去 $\dot{\theta}$ 可得铰位置的移动过程 $z(t)$ 。从(14)式可以定出第一阶段终了的时刻 t_1 :

$$t_1 = \frac{I l}{M_s} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1 + 3k}{1 + 2k} \right). \quad (16)$$

在第二阶段, $\dot{\theta}_1$ 是初始角速度, 全梁作整体转动, 从动量矩守恒定理得运动方程:

$$(Gl^2 + ml^3/3)(\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) = -M_i(t - t_1). \quad (17)$$

利用(16), (17)得角速度 $\dot{\theta}$ 为

$$\dot{\theta} = -\frac{3M_i(t - t_1)}{(1 + 3k)ml^2} + \frac{2I}{(1 + 2k)ml^2}. \quad (18)$$

当 $\dot{\theta} = 0$ 时, $t = t_f$, 梁停止运动, 得最终转角:

$$\theta_f = \frac{2}{3} \frac{1 + 3k}{(1 + 2k)^2} \frac{I^2}{M_i ml}, \quad (19)$$

$$t_f = t_1 + \frac{2}{3} \frac{1 + 3k}{1 + 2k} \frac{Il}{M_i} = \frac{Il}{M_i}. \quad (20)$$

这两个量是动力分析中常常要求出的量, 此外还要求出结构所吸收的能量, 在本问题中, 这就是总的能量输入 $I^2/2G$. 分阶段的塑性消耗变形能可以计算如下. 在第二阶段塑性铰不动, 因而所消耗的变形能为

$$E_{II} = M_i \theta_f,$$

和总能量的比为

$$\frac{E_{II}}{K.E.} = \frac{4}{3} \frac{(1 + 3k)k}{(1 + 2k)^2} = \frac{2\beta + 3}{3(\beta + 1)^2}, \quad (21)$$

其中 $\beta = ml/2G = 1/2k$. 第一阶段消耗的变形能为

$$\frac{E_I}{K.E.} = 1 - \frac{E_{II}}{K.E.} = -\frac{\beta(3\beta + 4)}{3(\beta + 1)^2}. \quad (22)$$

(21)及(22)式的变化在图6中表示. 当 $G \gg ml$ 时, 也即用很大的质量对悬臂梁进行撞击, 并且这质量随着梁继续移动的情形, 从(22)式可见 $E_I \rightarrow 0$, 即能量主要由第二阶段的运动机构吸收, 变形应该接近于绕根部的刚体转动. 当 $G \ll ml$ 时, 也即用很小的质量, 很高的速度, 如子弹的射入, 对悬臂梁进行撞击; 能量主要由第一阶段的运动机构吸收, 变形应该接近于在自由端受弯曲时的变形. 这种最终变形形状的变化便于用实验考核^[38].

对于曲梁的分析, 和上述完全相似地进行^[31-34].

梁的刚塑性动力分析工作做过较多, 现列在附表2中.

目前分析工作中得到的一些主要结果可概述如下:

a. 不同的载荷变化过程. 由于在冲击过程中, 载荷的变化规律不能确切掌握, 变化也较大, 因而要研究不同 $P(t)$ 形式对结果的影响. Symonds 在文[19]中称满足 $\int_0^t P(t)dt \geq tP(t)$ 的载荷为爆炸载荷 (Blast loading), 并专门讨论了这种载荷的各种形式. 分析结果说明, 对应于不同的 $P(t)$, 若载荷峰值 P_m 和总冲量 I 相同, 则最大变形相差在 $\pm 15\%$ 之内. 随峰值的提高, 差别的百分比减小, 从图1也可以看出此点; 因在高载时, 大部分变形在卸载后进行, 因而载荷的具体分布形式的影响就越来越小.

b. 不同的载荷分布区域. 若将集中力分散在很小的但是有限的区域上作用, Seiler 等在文[20, 26]中分析的结果说明, 变形机构的变化不大, 但作用点的残余转角 θ 将大大减小, 总吸收的能量也有些减小. 目前还没有用接触变形问题来处理这样的情形.

c. 大变形产生轴向力的影响. 对于两端不能内移的梁, 在变形时将产生轴向力. Symonds 在文[21]中做了较粗略的计算, 结果说明, 梁愈狭长, 即 l/h 愈大, 则轴向力愈大,

而且趋向于弦的结果;最终挠度大大减小,特别在冲量较大的情形下更是如此。

d. 剪应力的影响。Karunes 和 Onat^[22]和 Дикович^[11]所作的近似分析说明,在 $l/h < 5$ 的粗短梁中,剪应力影响逐渐显著。这种影响和支承条件有关。Дикович 的结果说明,对两端固定的均布载荷梁,在 $l/h = 5$ 时,考虑到剪力将使挠度加大 20%,在 $l/h = 2$ 时则加大 50%。但对两端简支的情形,挠度反而减小(参看文[11]中图 92 及 94)。

e. 应变率的影响。将理论分析结果和实验比较后发现,应变率对材料力学性质的影响会使最终挠度减小很多。目前一般^[35,36]先估计梁的平均应变率,对极限弯矩 M ,作一修正,经过这样对整个梁做一个平均的修正后,可使理论和实验结果符合得较好。在文[38, 40]中 Symonds 等人进一步考虑了各截面不同的应变率,作出较精确的分析,和实验的结果就符合得更好。若对每截面的应变率分别计算,变形机构也会改变,这时就不能再完全继承静力分析的机构了。例如在理想情形的铰处,应变率趋于无穷,如果考虑应变率的影响,铰应扩散成一个连续过渡的区域。变形机构改变以后,最终挠度等等当然也都改变了。在文[38, 40]中采用了一个经验公式

$$\dot{\epsilon} = D[(\sigma_t/\sigma_0) - 1]^p \quad (23)$$

来表示应变率的影响,这里 σ_0 是应变率为零时的屈服拉应力, σ_t 为对应 $\dot{\epsilon}$ 时的屈服拉应力, D 和 p 为材料系数。这样考虑应变率的影响,计算要复杂得多^[40],现在进行得还很少。

f. 还有一些其它结果,如强化的影响,实验表明影响并不显著;又如两端固定比两端简支能多吸收能量的问题,文[19]中说明,随着载荷的增大,多吸收的能量也就减少了;又如对悬臂梁的情形,也考虑过大变形的影响,因为这时不引起轴向力,对结果的影响不大;至于剪应变和转动惯量,只有在文[20]中考虑过,但对结果的影响却没有讨论。

(四) 实验工作

我们见到的关于弹塑性动力分析的实验较少^[6,41]。关于刚塑性动力分析的实验工作,在文[38]中做了系统总结,可以说有两种实验方案,其一是落体撞击实验,如图 5a 所示^[37],

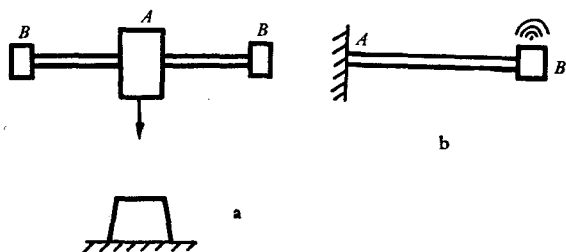


图 5、两种实验方案

可以用气枪等方法使 A 加速下降。撞击后,梁由初始均布速度继续运动,停止后,测出残余变形。由于物体在下落时有弹性振动不好控制,致使测得的结果较为分散。另外一种方案是冲击实验,如图 5b 所示^[35],这时试件固定不动,由重物、子弹或炸药爆炸产生冲击。这个方法重复

性较好,并且因为试件不动,可以在上面贴电阻片记录各点的应变历史。

为了校核理论分析的近似性,最好做悬臂梁的实验,它的优点较多: 1) 易于实现端条件; 2) 自由端的变形大,易于测量; 3) 轴向力的影响小; 4) 易于做理论分析(大变形和应变率影响的处理都是在这个情形下做的)。除了悬臂梁的实验以外,目前只做过两端夹住(但可以向内移)的梁的实验^[35b]。

我们举文[38b]中的实验结果为例(图6)。在悬臂梁的端部加上重量 G (图4),改变 G 的大小,可得到各种不同的 R 值,用以决定刚塑性分析的使用范围。试件采用软钢和铝合

金两种,前者对应变率敏感,屈服应力可以提高一倍以上,而后者一般认为对应变率不敏感。实验结果和理论结果的差别可以从图6中看出。这些差别一般和最终折角 θ_f 无关,因而剪应变、强化、大变形在造成这些差别中可能不重要。剪应变影响小和文[22]中的结论一致,因为所用的试件 $l/h > 20$ 。另外从测量中也得知几乎没有伸长,因而得出的初步结论为:差别主要是由应变率的影响造成的。例如在某一情形中,对软钢试件而言,若不考虑应变率的影响,理论结果为 $\theta_f = 71.5^\circ$,实验结果为 $\theta_f = 52^\circ$,如果按每截面的应变率分别计算的办法得 $\theta_f = 59^\circ$ 。另外,实验说明在 $R = 3-5$ 之间,实验结果和不考虑应变率的理论结果相符得好些,而随着 R 的增加(应变率也随之增加),相差也就大些。即使如此,可以认为,不考虑应变率的简单理论给出 θ_f 的一个第一次近似。

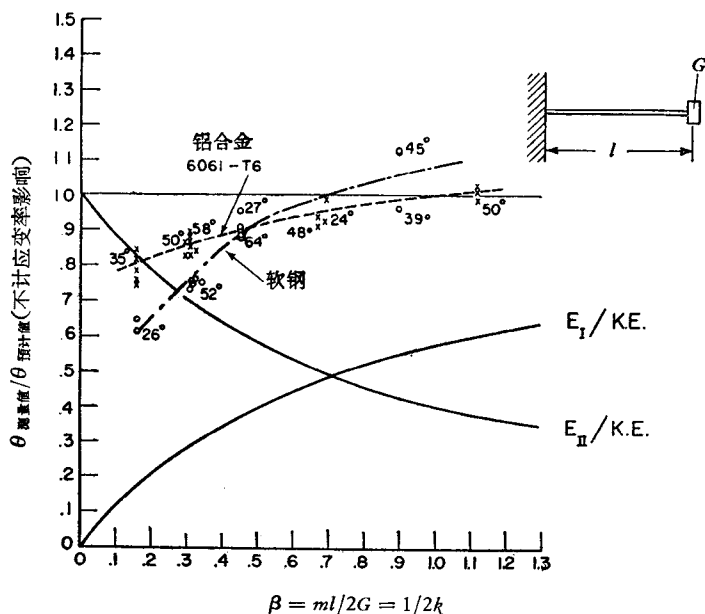


图6 悬臂梁冲击实验结果^[30b] (图中数字为最终折角 θ_f)

× 铝合金实验 ○ 软钢实验

此外, Humphreys 在文[32b]中介绍用高速照相观察曲梁在分布脉冲载荷下的变形,说明在刚塑性分析中假设铰之间可看成刚性是符合实际的。Baker 等人^[41]介绍用少量以至大量炸药以及在击波管中进行的实验,他们给出了弹性和塑性变形,并企图从变形反过来求载荷变化过程。文[42]谈到钢筋混凝土梁的动力实验,表明这时塑性变形也可较弹性变形大很多,因而可以应用刚塑性分析。

对于结构物进行的塑性动力分析还很少见到,文[43]讨论了一个简单框架受侧向冲击后塑性铰变动的情况。文[44]则讨论交叉梁架受均布载荷 $q(t)$ 作用后塑性铰的运动。由于作者对这方面不熟悉,估计遗漏的一定很多。

三、板的刚塑性动力分析

板的刚塑性动力分析可以分成三种类型,其一是极薄的板按膜来处理。Григорян 在文[45]中用类似于 Рахматулин^[4]的方法处理了无穷大板受集中初速 v_0 作用的弹塑性问

题, 得出和弦相似的结果。Hudson 和 Frederick^[46] 处理圆膜在均布初速 v_0 下的刚塑性大变形问题, 和水中爆炸的实验结果比较, 除弯矩较大的边缘区域外, 符合得相当好。在文[47]中进一步说明了这方面的实验工作。

第二类问题是板受剪力破坏的情形, 主要来自穿甲问题。Бахшиян 等人^[48,49] 考虑平板受直径为 $2R$ 的刚性圆柱体撞击, 考虑板中只有剪应力抵抗, 求出穿透速度和板的变形。这个问题以及薄板的穿透问题^[50], 由于国防上的需要, 在理论上和实验方面都做了不少工作, 有关这方面的总结可以参看文[1—3]。

第三类问题, 即板受弯曲变形的动力问题, 通常只考虑弯曲应力, 而忽略膜力、剪应变和转动惯量等。对于这类问题, 这里我们将着重加以介绍。在板的弹塑性动力分析方面, 只对无穷大板受集中初速 v_0 的问题进行过分析, 处理的方法完全类似于无穷长梁的参量变换, Hyers (参看文献[1]233 页) 和 Демьянов^[51] 都采用 $w = tf(r^2/t)$, 得到挠度变化的情形和梁中相似。

以下介绍板弯曲的刚塑性动力分析。

(一) 假设和基本方程

我们采用与静力分析中关于小变形薄板理论相同的假设; 以主弯矩 M_1 和 M_2 表示的

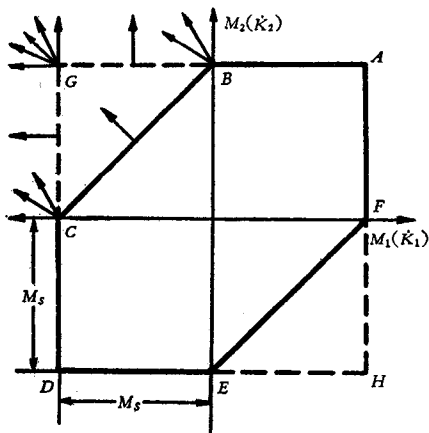


图7 Tresca 和 Johansen 屈服条件

屈服面如图 7 所示; 对应的主变形曲率增量 $\dot{K}_1$ 和 $\dot{K}_2$ 服从流动法则, 如图中第二象限的箭头所示。以下以轴对称情形为例, 说明基本方程和有关条件为:

a. 运动方程:

$$(rM_r)' - M_\theta = rQ = - \int_0^r [p(r,t) - \mu \ddot{w}] r dr, \quad (24)$$

其中 μ 是单位中面面积的质量。

b. 屈服条件和流动法则如图 7 所示, 其中 $M_1 = M_r$, $M_2 = M_\theta$, $\dot{K}_1 = \dot{K}_r = -\dot{w}''$, $\dot{K}_2 = \dot{K}_\theta = -\dot{w}'/r$ 。

c. 相应的边界条件和初始条件, 后者为 $w(r, 0) = \dot{w}(r, 0) = 0$ 。

d. 塑性铰圆的运动规律: 和梁的情形一样, 在铰圆处 $\dot{w}'$ (亦即 $\dot{K}_\theta$) 是不连续的, 它只能在 $|M_r| = M_r$ 处发生, 也即只能对应于屈服面上的 AH 和 DG 区间或角点 A, F, H, D, C, G 。在铰圆两侧的位移和速度 w 及 $\dot{w}$ 以及弯矩 M_r 及剪力 Q 是连续的。在动力分析中, 铰圆 (设半径 $r = \rho$) 可以移动, 随着它的移动, 我们有关系:

$$[\dot{w}] + \dot{\rho}[\dot{w}'] = 0, \quad (25)$$

即在静止铰的情形, 才可能有 w' 的间断。在移动铰的情形, $[\dot{w}'] = 0$, 从而又有

$$[\dot{w}'] + \dot{\rho}[\dot{w}''] = 0, \quad (26)$$

这里 w'' 将有间断。由 $\dot{w}$ 及 M_r 的连续性, 还有

$$[\ddot{w}] + \dot{\rho}[\dot{w}'] = 0, \quad (27)$$

$$[\dot{M}_r] + \dot{\rho}[\dot{M}_r'] = 0. \quad (28)$$

它们的物理意义和以前一样。

(二) 圆板轴对称问题的刚塑性动力分析

以上各方程和有关条件就足以解圆板轴对称问题的刚塑性动力问题,解法和梁的分析相似。在外载超过静极限载荷时,先采用静力分析完全解的变形机构,将对应于这种机构的屈服条件代入运动方程(24),就可以和边界条件一起解出弯矩分布,由初始条件可定出变形过程。随着载荷的增加,弯矩将在某处超出屈服条件,使前述变形机构不再适用。这时需要根据超出的情形另选变形机构重行分析。卸载时由于板元素的惯性力,板将继续变形直到静止,经过积分可求得最终的挠曲曲线和吸收的总能量。

现在以最先解决的受均布载荷作用的简支圆板问题^[9]为例说明如下。

载荷 $p(t)$ 的变化为一矩形脉冲,即

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } 0 \leq t \leq \tau \text{ 时 } \quad p(t) &= P, \\ \text{当 } \tau \leq t \text{ 时 } \quad p(t) &= 0, \end{aligned} \right\} (29)$$

在初始时,采用静力分析的变形机构,即在中点形成一个铰的圆锥:

$$w(r, t) = W(t)(1 - r/R), \quad (30)$$

上式已满足在简支边 $r = R$ 处 $w(R, t) = 0$ 的边界条件。对应的变形曲率增量为

$$\dot{K}_r = 0, \quad \dot{K}_\theta = \dot{W}/Rr. \quad (31)$$

这个变形机构只能对应于图 7 中 Tresca 六角形的 AB 边,因此 $M_\theta = M_s$, $0 \leq M_r \leq M_s$ 。将前一数值代入(24)式求解,得

$$M_r = M_s - \frac{1}{6} p r^2 + \frac{\mu}{12} \dot{W} r^2 \left(2 - \frac{r}{R} \right), \quad (32)$$

利用简支边界条件 $M_r(R, t) = 0$, 得

$$\dot{W} = \frac{12}{\mu R^2} \left(\frac{1}{6} p R^2 - M_s \right). \quad (33)$$

积分上式,并利用初始条件 $W(0) = \dot{W}(0) = 0$, 得

$$W(t) = \frac{p - p_0}{\mu} t^2. \quad (34)$$

其中 $p_0 = 6M_s/R^2$ 为静极限载荷,可见只有在 $p > p_0$ 时 $\dot{W} > 0$ 。将(34)式代回(32)式得弯矩分布

$$\frac{M_r}{M_s} = 1 - \frac{p r^2}{p_0 R^2} + \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) \frac{r^2}{R^2} \left(2 - \frac{r}{R} \right). \quad (35)$$

研究这个弯矩分布可以看到在中点有

$$M'_r(0, t) = 0, \quad M''_r(0, t) = 2 \frac{M_s}{R^2} \left(\frac{p}{p_0} - 2 \right). \quad (36)$$

在 $p < 2p_0$ 时, M_r 在中点有一最大值,在 $p > 2p_0$ 时,却有一个最小值。但因在中点处 $M_r(0, t) = M_s$, 所以当 $p > 2p_0$ 时,将在中点附近超出屈服条件,也就是说前述机构将不再适用。一般将 $p_0 < p < 2p_0$ 称为中载, $p > 2p_0$ 称为高载。在高载时,根据中点附近超出屈服条件的情况,可设一截锥形为变形机构,中间 $r < \rho$ 处为一平台,外边 $r > \rho$ 处为一锥体, $r = \rho$ 为一铰圆,它的大小与载荷大小有关。当 $p \rightarrow \infty$ 时 $\rho \rightarrow R$ 。随着 $p(t)$ 的变化, $\rho(t)$ 也在变化,也即这是一个移动铰圆。在卸载后, $p = 0$, 铰圆逐渐缩小直到