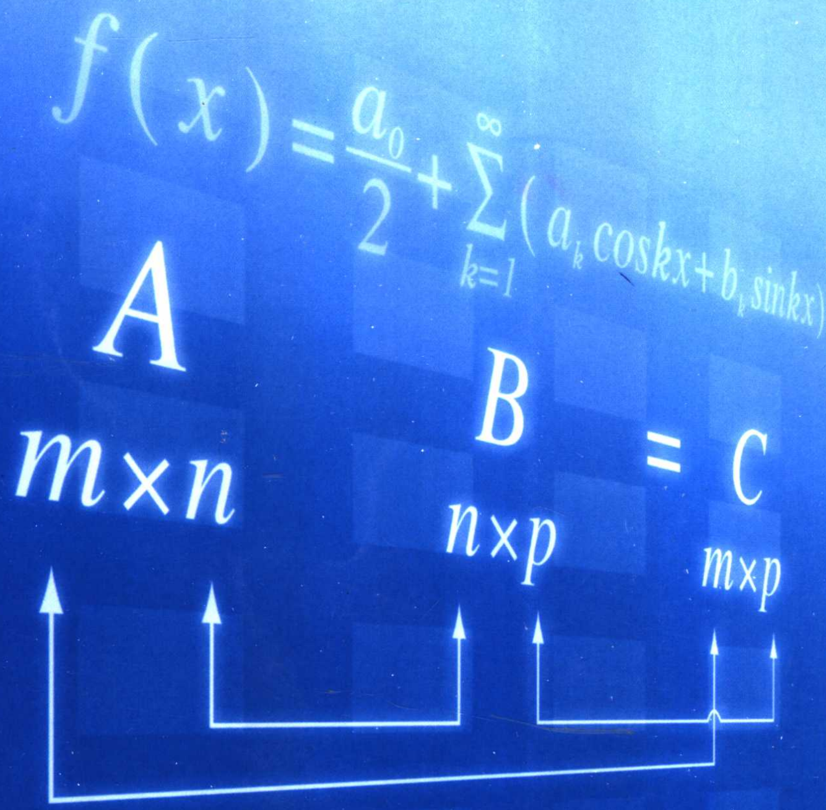
XIANXING DAISHU

线性代数

廖艾贤 编



西南交通大学出版社

线 性 代 数

廖艾贤 编

西南交通大学出版社
·成 都·

内容简介

本书的目的是为大学本科各专业的《线性代数》课程提供一本涵盖全部基础内容的清楚、简洁、亲切易学的教材。内容安排上，先讲线性方程组，线性代数的一些基本概念都由线性方程组引出。对一般教材重视不够的某些重要内容，如：初等行变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系，矩阵的行最简形是惟一的，矩阵乘法有四种实现方法等等，则给予了应有的强调和重视。本书力求让中等程度的学生自学时能看得懂。除课堂教学外，还可供函授、自学及准备考研时复习基础之用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 廖艾贤编. —成都：西南交通大学出版社，2003.8

ISBN 7-81057-708-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 廖… Ⅲ. 线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 006722 号

线 性 代 数

廖艾贤 编

*

责任编辑 唐元宁

封面设计 肖 勤

西南交通大学出版社出版发行

(成都市二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：87600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：11.75

字数：279 千字 印数：1—2000 册

2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-708-5/O·047

定价：15.00 元

序　言

本书的目的是为大学各专业的本科生提供一本清楚、简洁、亲切易学的线性代数教材，帮助学生克服学习这门课程所遇到的困难。编写过程中，作者对课程各部分之间的逻辑联系进行了反复的思考、消化和整理，力求按合理的顺序，用清楚的语言把有关内容介绍给读者。内容安排上，改变了目前一般先讲行列式的做法，先讲线性方程组。线性代数的一些基本概念，如：矩阵、向量、向量的加法和数乘、向量的线性组合、向量的线性相关和无关、向量组和矩阵的秩、矩阵的初等行变换和初等列变换、矩阵的分类等等，都由线性方程组引出。对目前一般教材重视不够的某些重要内容，如：初等行变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系；矩阵的行最简形是惟一的；高斯消元和高斯—约当消元不仅是化简线性方程组的方法，而且是分析和揭露向量组的线性关系的有效途径；矩阵乘法有四种实现方法，可根据需要灵活选用等等，则给予了应有的重视和强调。习题安排上，既有容易上手的简易练习，也有较难一点的习题，前者按节安排，后者放在各章的末尾。

本书的编写工作是作者近年来在西南交通大学峨眉校区任教期间完成的。在教学过程中，我深切感受到学生殷切盼望有一本好的线性代数教材的心情。学生的心情督促我不敢懈怠，并指引我在编写中充分考虑学生的需要。本书的编写一直受到峨眉校区校领导，以及教务处、基础部和教研室有关领导的关心、指导和支持，特别是受到任平弟副校长和教务处徐嘉宁副处长的关心、指导和支持，作者对他们深表感谢。编写过程中，蒙同窗好友荣德善教授审阅了1～3章的初稿，山西师范大学史及民教授、北京一机部自动化所戴绪愚研究员审阅了第1章初稿，峨眉校区数学教研室主任张跃老师、副主任徐昌贵老师分别审阅了第1章和第5章，左东、熊学和万美凯三位老师分别审阅了第2章、第3章和第4章，提出许多宝贵意见，马丽琼老师帮我纠正了正定实二次型判别定理证明中的不完善之处，作者对他们表示深深的感谢。本书的编写还受到西南交通大学数学学院院长何平教授和其他老师的关心、指导和支持，受到同窗好友唐经世教授、沈志云院士和山西肿瘤研究所刘永昌大夫的关心、鼓励和支持，作者对他们表示衷心的感谢。教材建设是课程建设的重要内容。一本好的或比较好的教材是建设一门优秀课程的必要条件。我是朝着建设一门优秀的大学本科《线性代数》课程的目标来编写这本教材的，一切以有利于学生的学习和成长为目标。力求让中等程度的学生能够看得懂；力求减少学生学习中的困难，以唤起他们的学习兴趣；力求在培养学生的数学思维能力方面，潜移默化，做出点滴贡献。我相信这些目标是正确的，但目前的这本书仅只是迈向目标的第一步，它还很不完善，还有待改进。衷心希望得到广大读者（包括有关的专家、老师

和学生）的批评指正。我一直认为：对一本书、一篇文章，经过认真的阅读思考，提出批评意见，或与作者共同探讨，是对作者的真正的帮助，是送给作者的最宝贵的礼物。我期待着这样的帮助和礼物，期待着和你交流。请按以下方式和我联系：

通讯地址：四川成都市二环路北一段西南交通大学北园 5206（邮编 610031）

联系电话：（028）87602594（成都），（0833）5197350（峨眉）

E-mail:LiaoAixian@yahoo.com.cn

廖艾贤

2003年6月

目　　录

第 1 章　线性方程组

第 2 章　矩　　阵

第 3 章　行　列　式

第 4 章　向量空间

第1章 线性方程组

1.1 线性方程组

线性代数研究多变量的线性函数关系. 最简单的线性函数是正比例函数 $y=kx$, 若自变量不止一个, 因变量也不止一个, 就得到多变量的线性函数

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n.$$

式中, x_1, …, x_n 是 n 个自变量; y_1, …, y_m 是 m 个因变量. 自变量的指数都是 1, 而且不出现自变量的乘积. 若 m 个因变量为已知, 分别为 $y_1=b_1$, $y_2=b_2$, …, $y_m=b_m$. n 个自变量为未知, 问题是: n 个自变量取怎样的值, 才能使 m 个因变量取已知的值? 则多变量的线性函数关系成为如下的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

它由 m 个方程组成, 含 n 个未知量, m 和 n 可以相等, 也可以不相等. x_1, …, x_n 代表 n 个未知量. a_{ij}是已知量, 称为系数. 第一个下标 i, 表示是哪个方程的系数. 第二个下标 j 表示是哪个未知量的系数. 等号右边的 b_1, …, b_m 也是已知量, 称为常数项.

定义 1.1.1 一个方程组, 若所有的未知量的指数都是 1, 而且不出现未知量的乘积, 称为**线性方程组**.

解方程组是求能使方程组的每个方程都成立的未知量的值. 主要思路是: 在不改变方程组的解的条件下, 把方程组化简.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, & (1) \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1, & (2) \\ 2x_1+3x_2+x_3=4. & (3) \end{cases}$$

解 从(2)式减去(1)式的 3 倍, 得

$$-7x_2-6x_3=-10. \quad (4)$$

从(3)式减去(1)式的 2 倍, 得

$$-x_2-x_3=-2. \quad (5)$$

经过这两步, 原方程组化简为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, & (1) \\ \quad -7x_2 - 6x_3 = -10, & (4) \\ \quad -x_2 - x_3 = -2. & (5) \end{cases}$$

用$-\frac{1}{7}$乘(4)式等号两边得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, & (1) \\ \quad x_2 + \frac{6}{7}x_3 = \frac{10}{7}, & (6) \\ \quad -x_2 - x_3 = -2 & (5) \end{cases}$$

把(6)式加给(5)式，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, & (1) \\ \quad x_2 + \frac{6}{7}x_3 = \frac{10}{7} & (6) \\ \quad -\frac{1}{7}x_3 = -\frac{4}{7}. & (7) \end{cases}$$

从(7)式得 $x_3=4$，代入(6)式得 $x_2=-2$，将 x_3、x_2 的值代入(1)式得 $x_1=3$. 即 $x_1=3$，$x_2=-2$，$x_3=4$ 是最后这个方程组的解.

现在的问题是，最后这个方程组的解是不是原方程组的解. 也就是，从原方程组化简到这个方程组，所采取的每个步骤，是否改变了方程组的解？我们采取了两种化简步骤：

1. 把某一方程的若干倍加给另一方程(包括从另一方程减去某一方程的若干倍，因为加上负的若干倍就是减去正的若干倍).

2. 用一个不为零的数同时乘某一方程的等号两边.

第二种步骤不会改变方程组的解是很明显的. 现在我们来证明第一种步骤也不会改变方程组的解.

设原方程组的第 i 个和第 k 个方程为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \tag{a}$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \tag{b}$$

式中，$1 \leqslant i < k \leqslant m$，$m$ 为方程数. 把第 i 个方程的 r 倍加给第 k 个方程，得

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + r(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = b_k + rb_i. \tag{b'}$$

所得到的新方程组除第 k 个方程由(b)式变为(b′)式外，其余都和原方程组相同.

原方程组的解能使它的每个方程成立，其中包括(a)式和(b)式，但若(a)式和(b)式同时成立，则(b′)式成立. 可见，原方程组的解也是新方程组的解.

新方程组由老方程组得来，(b)式$+r\times$(a)式，得(b′)式. 老方程组也可由新方程组恢复得出，(b′)式$-r\times$(a)式，得(b)式.

新方程组的解能使它的每个方程成立，其中包括(a)式和(b′)式，但若(a)式和(b′)式同时成立，则(b)式成立. 可见，新方程组的解也是原方程组的解.

把这两方面结合起来，就是新方程组和原方程组有相同的解.

定义 1.1.2　线性方程组的三种初等变换是：

1. 交换两个方程在方程组中的位置.

2. 用一个不为零的数同时乘某一方程的等号两边.

3. 把某一方程的若干倍加给另一方程.

定理 1.1.1 线性方程组的三种初等变换不改变方程组的解.

这里，我们加上了“交换两个方程在方程组中的位置”，它显然不改变方程组的解.

1.2 矩阵 向量

例 1.1 的化简过程为

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ -7x_2-6x_3=-10 \\ -x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_2+\frac{6}{7}x_3=\frac{10}{7}, \\ -x_2-x_3=-2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_2+\frac{6}{7}x_3=\frac{10}{7}, \\ -\frac{1}{7}x_3=-\frac{4}{7}. \end{cases}$$

实际上，也可略去未知量 x_1、x_2、x_3 和等号不写，表述如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

这样，我们把一个线性方程组的系数和常数项按其所在位置排列成一个矩形数阵，来代表这个方程组. 用这个矩形数阵的变化表示方程组的化简过程.

定义 1.2.1 把一些数按横行竖列排成的矩形数阵称为**矩阵**.

矩阵一般用中括号括起来，也有用小括号的. m 行 n 列的矩阵，记为 $m\times n$ 矩阵. m 个方程，n 个未知量的线性方程组，它的系数排列成一个 $m\times n$ 矩阵，称为它的**系数矩阵**. 再把常数项作为最后一列加上，得到一个 $m\times(n+1)$矩阵，则称为它的**增广矩阵**.

组成一个矩阵的那些数，称为它的元素. 矩阵一般用大写英文字母表示，如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等等. 矩阵的元素用对应的小写英文字母表示. a_{ij}表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的那个元素.

只有一行或一列的矩阵，也称为向量. 其中，只有一行的称为行向量，只有一列的称为列向量. 一个 $m\times n$ 矩阵，有 m 行 n 列，我们可以说它由 m 个 $1\times n$ 的行向量组成，也可以说它由 n 个 $m\times 1$ 的列向量组成. 比如，例 1.1 的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

它的第三行$[2 \quad 3 \quad 1 \quad 4]$是一个由 4 个数组成的 1×4 的行向量. 这 4 个数的先后次序不能随便更改. 因为它代表的是 $2x_1+3x_2+x_3=4$ 这个方程，如果这 4 个数的次序有改变，比如说变成$[3 \quad 2 \quad 1 \quad 4]$，代表的就是另一个方程 $3x_1+2x_2+x_3=4$.

定义 1.2.2 一个有先后次序的数组(简称**有序数组**)称为**向量**. 把这些数排成一行称为

行向量，排成一列称为**列向量**．组成一个向量的那些数，称为它的分量．一个向量有几个分量，就是一个几维向量．

如$[2\quad 3\quad 1\quad 4]$是四维行向量，$\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$是三维列向量．

向量一般用小写的希腊字母表示，如 α、β、γ 等．

一个 $m\times n$ 矩阵，由 n 个 m 维列向量组成．用 $\boldsymbol{A}$ 表示这个矩阵，用 α_1，α_2，…，α_n 表示它的 n 个列向量，则

$$\boldsymbol{A}=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_n].$$

其中
$$\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix},\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

一个 $m\times n$ 矩阵，由 m 个 n 维行向量组成，用 $\boldsymbol{A}$ 表示这个矩阵，用$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_m$ 表示它的 m 个行向量，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_m\end{bmatrix}.$$

其中
$$\tilde{\alpha}_i=[a_{i1}\quad \cdots\quad a_{in}],\ i=1,\ \cdots,\ m.$$

用增广矩阵代表线性方程组，把增广矩阵的每一行看成是一个行向量，"用一个不为零的数同时乘某一方程的等号两边"就成为"用一个不为零的数去乘某一行向量所有的分量"．这种运算称为向量的数乘．

定义 1.2.3　向量的数乘是用一个数去乘一个向量所有的分量．

如例 1.1 的增广矩阵的第一个行向量为 $\tilde{\alpha}_1=[1\quad 2\quad 1\quad 3]$，3 和 $\tilde{\alpha}_1$ 的数乘为 $3\tilde{\alpha}_1=[3\quad 6\quad 3\quad 9]$．同一矩阵的第一个列向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$，3 和 α_1 的数乘为 $3\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\9\\6\end{bmatrix}$．

用增广矩阵代表线性方程组，把矩阵的每一行看成是一个行向量，"把某一方程的若干倍加给另一方程"就成为：把某一行向量与某个不为零的数的数乘加给另一行向量．

定义 1.2.4　向量加法是按分量相加．和向量的每个分量等于相加的两个向量对应的分量之和．只有维数相同的列向量或维数相同的行向量才能彼此相加．

如例 1.1 的增广矩阵的 $\tilde{\alpha}_1=[1\quad 2\quad 1\quad 3]$和 $\tilde{\alpha}_2=[3\ -1\quad -3\quad -1]$相加，得 $\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2=[4\quad 1\quad -2\quad 2]$．

定义 1.2.5　两向量相等包含的内容是：两向量同为列向量或同为行向量，且维数相同，对应的分量都相等．

组成向量的数一般是实数和复数．实数和复数的加法满足加法交换律和结合律，乘法满足乘法交换律、结合律和乘法对加法的分配律．根据这些运算律，结合向量加法和数乘的定义，可得出**向量加法和数乘满足的八条基本的运算规则**：

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；　　（向量加法交换律）
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；　　（向量加法结合律）

3. $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$;

4. $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

5. $1\alpha=\alpha$;

6. $u(v\alpha)=(uv)\alpha$;　　　　（向量数乘结合律）

7. $(u+v)\alpha=u\alpha+v\alpha$;　　　　（向量数乘对数的分配律）

8. $u(\alpha+\beta)=u\alpha+u\beta$.　　　　（向量数乘对向量的分配律）

式中，u、v 代表数；α、β、γ 代表向量；$\mathbf{0}$ 代表零向量.

定义 1.2.6 分量都等于零的向量称为**零向量**，否则称为**非零向量**.

零向量也用阿拉伯数字 $\mathbf{0}$ 表示，它的维数可由它所在的式子和上下文得知. 如 $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$ 表示向量 α 和一个维数与 α 相同的零向量相加，仍得到向量 α.

$-\alpha$ 是向量 α 的**负向量**，由 α 与 -1 的数乘得出

$$-\alpha=(-1)\alpha.$$

$-\alpha$ 的每个分量都是 α 的对应分量的相反数. $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$ 表示向量 α 和它的负向量相加，得维数相同的零向量.

向量的加法和数乘，是线性代数两种最基本的运算. 这八条基本的运算规则，是线性代数一切运算的基础.

用增广矩阵的变化表示线性方程组的化简过程，则线性方程组的三种初等变换对应于矩阵的三种初等行变换，如表 1.1 所示.

表 1.1

线性方程组	增广矩阵
交换两个方程在方程组中的位置	交换增广矩阵的两行
用一个不为零的数同时乘某一方程的等号两边	用一个不为零的数乘增广矩阵某一行
把某一方程的若干倍加给另一方程	把增广矩阵某一行与某个不为零的数的数乘加给另一行

定义 1.2.7 矩阵的三种初等行变换是：

1. 交换矩阵的两行.

2. 用一个不为零的数乘矩阵某一行.

3. 把矩阵某一行与某个不为零的数的数乘加给另一行.

线性方程组的三种初等变换不改变方程组的解，增广矩阵的三种初等行变换不改变它所代表的线性方程组的解.

例 1.1 的系数矩阵的三个列向量是 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$. 用 x_1、x_2、x_3 分别和这三个列向量作数乘，得到 $x_1\alpha_1$、$x_2\alpha_2$、$x_3\alpha_3$，再把它们相加，得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_1\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\\3x_1\\2x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2x_2\\-x_2\\3x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_3\\-3x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2+x_3\\3x_1-x_2-3x_3\\2x_1+3x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

例 1.1 的线性方程组可表示为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，$\beta=\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$是常数项列向量.

一般来说，m 个方程、n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

可表达为 $$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.$$

式中，α_1，…，α_n 为系数矩阵的 n 个列向量；x_1，…，x_n 是 n 个未知量；β 是常数项列向量. $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$ 称为 α_1，…，α_n 的线性组合.

定义 1.2.8 向量的线性组合是向量的数乘和加法这两种基本运算的结合. 把若干个(比如说 n 个)维数相同的向量分别与 n 个数作数乘，再把数乘所得的 n 个向量加起来，所得到的向量称为这 n 个向量的线性组合，这 n 个数称为**线性组合的系数**.

比如，$3\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$，等号左边是三个三维列向量$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$的线性组合，组合的系数是 3、−2 和 4，得到三维的列向量$\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$.

m 个方程 n 个未知量的线性方程组也可理解为：怎样的 n 个系数能使系数矩阵的 n 个 m 维列向量的线性组合刚好和等号右边的 m 维的常数项列向量相等？

首先，有没有这样的系数能满足这样的要求？其次，如果有，是只有一组，还是有很多组系数能满足这样的要求？

这就是线性方程组有解还是无解，若有解，是只有一组解还是有很多组解的问题

练 习 1.2

1. 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\3\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}5\\4\\7\\-1\end{bmatrix}$，$\gamma=\begin{bmatrix}6\\2\\0\\9\end{bmatrix}$，求：

(1) $\alpha-\beta$； (2) $7\beta+3\gamma$； (3) $-\gamma+\beta$；

(4) $3(\alpha-7\beta)$； (5) $-3\beta-8\gamma$； (6) $2\beta-(\alpha+\gamma)$.

2. 承上题，求满足 $2\alpha-\beta+x=7x+\gamma$ 的向量 x.

3. 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}-3\\-1\\3\end{bmatrix}$，$\gamma=\begin{bmatrix}x\\-1\\y\end{bmatrix}$，$\delta=\begin{bmatrix}3\\u\\2\end{bmatrix}$，根据以下要求，求 x，y，u.

(1) $\gamma=\frac{1}{2}\alpha$；　　(2) $\beta+\gamma=\alpha$；　　(3) $\gamma+\delta=\beta$.

4. 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\3\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}3\\-2\\-4\\1\end{bmatrix}$，$\gamma=\begin{bmatrix}x\\-3\\-6\\y\end{bmatrix}$，$\delta=\begin{bmatrix}2\\u\\v\\4\end{bmatrix}$，根据下列要求，求出 x，y，u，v.

(1) $\gamma=3\alpha$，　　(2) $\gamma+\delta=\alpha$，　　(3) $\gamma-\alpha=\beta$.

5. 已知 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，向量 α 满足 $2(\alpha-\alpha_1)+3(\alpha_2-\alpha)=5(\alpha+\alpha_3)$，求 α.

6. 某单位有 30 名员工，若把这 30 名员工的工资列为一个 30 维的列向量，现将每位员工的工资都增加 8%，则新的工资向量和原工资向量有何关系？

7. 试就 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\4\end{bmatrix}$，$\gamma=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\0\end{bmatrix}$，$u=6$，$v=-2$ 验证：

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,\quad u(v\alpha)=(uv)\alpha,$$
$$u(\alpha+\beta)=u\alpha+u\beta,\quad (u+v)\alpha=u\alpha+v\alpha.$$

8. 写出下列线性方程组的增广矩阵：

(1) $\begin{aligned}x_1-2x_2&=0,\\3x_1+4x_2&=-1,\\2x_1-x_2&=3;\end{aligned}$　　(2) $\begin{aligned}x_1\quad+x_3\quad\quad&=1,\\2x_2-x_3\quad+x_5&=2,\\2x_3+x_4\quad&=3;\end{aligned}$

(3) $\begin{aligned}x_1\quad+x_3&=1,\\-x_1+2x_2-x_3&=3;\end{aligned}$　　(4) $\begin{aligned}x_1&=1,\\x_2&=2.\end{aligned}$

9. 写出下列增广矩阵所代表的线性方程组：

(1) $\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\2&1&1&3\\0&-1&2&4\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$.

1.3 线性方程组的有解和无解

一个向量和一组向量的线性组合相等，我们说这个向量能由这一组向量线性表示.

定理 1.3.1 一个线性方程组，若常数项列向量能由系数矩阵的全体列向量线性表示，则方程组有解，否则无解.

例 1.2 解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3, & (1)\\3x_1-x_2-3x_3=-1, & (2)\\-2x_1+3x_2+4x_3=3. & (3)\end{cases}$$

解 用增广矩阵表示化简过程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

r_2 表示矩阵的第 2 行，r_1 表示第 1 行，r_2-3r_1 表示从第二行减去第 1 行的 3 倍.

化简得到的这个方程组无解. 因为它的系数矩阵的三个列向量的第三个分量都为零，而常数项列向量的第三个分量却不为零，常数项列向量无法由系数矩阵的全体列向量线性表示，故这个方程组无解. 而原方程组与化简得到的这个方程组有相同的解，故原方程组无解.

化简得到的这个方程组无解. 因为它的第三个方程

$$0x_1+0x_2+0x_3=-1$$

无解，未知量 x_1、x_2、x_3 的任何值都无法使这个等式成立. 这个方程组无解，因为它包含一个无解的方程. 原方程组无解，因为它和这个方程组有相同的解.

定理 1.3.2 线性方程组用三种初等变换化简，若出现

$$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=\text{一个不为零的数},$$

这样的无解方程，则原方程组无解，否则有解.

1.4 向量组的线性相关和线性无关

例 1.3 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, & (1) \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1, & (2) \\ -2x_1+3x_2+4x_3=4. & (3) \end{cases}$$

解 这个方程组的前两个方程和例 1.1 相同，只有第三个方程不同.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \tilde{\alpha}_2-3\tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_3+2\tilde{\alpha}_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \begin{array}{l} \\ \\ \tilde{\alpha}_3+2\tilde{\alpha}_1+(\tilde{\alpha}_2-3\tilde{\alpha}_1) \end{array}$$

化简到这里，出现了一个零行向量，它由行向量 $\tilde{\alpha}_3+2\tilde{\alpha}_1$ 加行向量 $\tilde{\alpha}_2-3\tilde{\alpha}_1$ 得出

$$\tilde{\alpha}_3+2\tilde{\alpha}_1+(\tilde{\alpha}_2-3\tilde{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

化简，得 $$\tilde{\alpha}_3+\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1=\mathbf{0}, \tag{a}$$

或 $$\tilde{\alpha}_3=\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2. \tag{a$'$}$$

式中，$\tilde{\alpha}_1$、$\tilde{\alpha}_2$、$\tilde{\alpha}_3$ 是原增广矩阵的三个行向量. 它们都不是零行向量，因为它们分别代表一个方程，每个方程的系数和常数项并不都是零. (a)式表明，从这三个不是零行向量的向量出发，进行线性组合，得出了一个零行向量，而线性组合的系数是 1、1 和 -1，并不都是零. (a$'$)式表明，$\tilde{\alpha}_3$ 可由 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 线性表示. 总之，这三个行向量之间有一定的关系. 用线性代数的语言来说，这三个行向量线性相关.

定义 1.4.1 一个向量组，取其全部向量作线性组合. 若只有组合的系数全为零才能使线性组合为零向量，则称**该向量组线性无关**. 若组合的系数不全为零也能使线性组合为零向量，则称**该向量组线性相关**.

向量组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$线性相关，因为 $3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

向量组$[1\quad 2\quad 1\quad 3]$，$[3\quad -1\quad -3\quad -1]$，$[-2\quad 3\quad 4\quad 4]$线性相关，因为$[1\quad 2\quad 1\quad 3]-[3\quad -1\quad -3\quad -1]-[-2\quad 3\quad 4\quad 4]=[0\quad 0\quad 0\quad 0]$.

向量组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$线性无关，因为只有 $0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$才能等于$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

向量组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$线性无关，因为只有 $0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$才能等于$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$线性无关，因为只有 $0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$才能等于$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

向量组$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$线性相关，因为 $c\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，系数 c 可取任何值，$c\neq0$，该式仍成立.

向量组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$线性相关，因为 $0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$c\neq0$，该式仍成立.

定理 1.4.1 含零向量的向量组线性相关.

不含零向量，只含一个非零向量的向量组线性无关.

不含零向量，只含非零向量的向量组线性相关的充要条件是：向量组至少由两个非零向量组成，且其中至少有一个向量可由其他向量线性表示.

证 含零向量的向量组，包括只含一个零向量的向量组和含不止一个向量，其中至少有一个零向量的向量组. 取这样的向量组的全部向量作线性组合. 为使线性组合为零向量，只需使所有非零向量的系数为零，而零向量的系数可取任何值. 故含零向量的向量组线性相关.

不含零向量，只含一个非零向量的向量组线性无关，因为要从一个非零向量得到零向量，只有让非零向量和零作数乘才行.

现在来证明定理的第三个命题，先证必要性.

由于只含一个非零向量的向量组线性无关，故只含非零向量的向量组，若线性相关，则它至少由两个非零向量组成.

设有 n 个非零向量 α_1，…，α_n，n 为不小于 2 的自然数. 这 n 个非零向量线性相关，则有 α_1，…，α_n 的线性组合为零向量

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=\mathbf{0},$$

而组合的系数 c_1，…，c_n 不全为零. 设 $c_i\neq0$，则

$$\alpha_i=-\frac{c_1}{c_i}\alpha_1-\cdots-\frac{c_{(i-1)}}{c_i}\alpha_{(i-1)}-\frac{c_{(i+1)}}{c_i}\alpha_{(i+1)}-\cdots-\frac{c_n}{c_i}\alpha_n.$$

α_i 可由向量组中其他向量线性表示.

再证充分性.

设有 n 个非零向量 α_1，…，α_n，其中 α_i 可由其他向量线性表示

$$\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{(i-1)}\alpha_{(i-1)}+k_{(i+1)}\alpha_{(i+1)}+\cdots+k_n\alpha_n.$$

移项，得
$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{(i-1)}\alpha_{(i-1)}-\alpha_i+k_{(i+1)}\alpha_{(i+1)}+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}.$$

式中，α_i 的系数不为零．于是，非零向量 α_1，…，α_n 的线性组合为零向量，而组合的系数不全为零，α_1，…，α_n 线性相关．

推论 1 由不少于两个非零向量组成的向量组线性无关的充要条件是其中任何一个向量都不能由其他向量线性表示．

推论 2 设有 r 个同维的向量线性无关(r 为自然数)，则由这 r 个向量加上另一个同维的向量构成的向量组线性相关的充要条件是：所加的这个向量可由原来的 r 个线性无关的向量线性表示；无关的充要条件是：所加的这个向量不能由原来的 r 个线性无关的向量线性表示．

推论 3 两个非零向量线性相关的充要条件是两向量对应的分量成比例，无关的充要条件是两向量对应的分量不成比例．

定理 1.4.2 可以由某一向量组的一部分向量线性表示的向量，也可由这一向量组的全体向量线性表示．

证 设 α_1，…，α_m 为一列向量组(m 为自然数)，α_1，…，α_k 为其子向量组(k 为自然数，$k<m$)，向量 β 能由 α_1，…，α_k 线性表示：$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k$．则 β 也可表示为

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k+c_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+c_m\alpha_m.$$

式中，$c_{k+1}=\cdots=c_m=0$，即 β 也可由 α_1，…，α_m 线性表示． 证毕

一个线性无关的向量组，取其一部分，称为**线性无关向量组的部分组**．一个线性相关的向量组，再增加若干个同维的向量，称为**线性相关向量组的扩大组**．

设有线性相关向量组 α_1，…，α_k 及其扩大组 α_1，…，α_k，α_{k+1}，…，α_n，$n>k$．

α_1，…，α_k 线性相关

$\Rightarrow c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k=\mathbf{0}$ 而 c_1，…，c_k 不全为零

$\Rightarrow c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k+0\alpha_{k+1}+\cdots+0\alpha_n=\mathbf{0}$ 而其 n 个系数不全为零．

即：α_1，…，α_n 线性相关，线性相关向量组的扩大组仍线性相关．

设有线性无关向量组 α_1，…，α_n．α_1，…，α_k 为其部分组($k<n$)．α_1，…，α_n 线性无关，导致 α_1，…，α_k 也线性无关，因为若 α_1，…，α_k 线性相关，则 α_1，…，α_n 线性相关，与假设相违背．

定理 1.4.3 线性相关向量组的扩大组仍线性相关，线性无关向量组的部分组仍线性无关．

例 1.4 （研 1998—4*　选择题）　若向量组 α，β，γ 线性无关，α，β，δ 线性相关，则(　)．

(A) α 必可由 β，γ，δ 线性表示；　　(B) β 必不可由 α，γ，δ 线性表示；

(C) δ 必可由 α，β，γ 线性表示；　　(D) δ 必不可由 α，γ，β 线性表示．

解 α，β，γ 线性无关 $\Rightarrow\alpha$，β 线性无关．（定理 1.4.3）

$\left.\begin{array}{l}\alpha,\ \beta,\ \delta\ \text{线性相关}\\ \alpha,\ \beta\ \ \text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow\delta$ 可由 α，β 线性表示　（定理 1.4.1 推论 2）

$\Rightarrow\delta$ 可由 α，β，γ 线性表示．（定理 1.4.2）

应选(C)．

例 1.5 （研 1999－3　选择题）　设向量 β 可由向量组 α_1，…，α_m 线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：α_1，α_2，…，α_{m-1} 线性表示．记向量组(Ⅱ)：α_1，α_2，…，α_{m-1}，β，则(　)．

* 研 1998—4 表示 1998 年硕士研究生入学试题，数学 4．