

CHUDENGSHUXUE

初等数学

下册：三角、解斜三角形

湖南师范学院数学系

湖南人民出版社

初等数学

(下册·三角、解析几何)

湖南师范学院数学系编

*

湖南人民出版社出版

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷一厂印刷

*

1979年2月第1版第1次印刷

印数：1—180,000 印张：13.75

统一书号：13109·47 定价：0.78元

目 录

第一篇 平面三角

第一章 锐角三角函数 (1)	三、任意角的三角函数 (30)
第一节 锐角三角函数 的概念 (1)	四、几个特殊角(0° 、 90° 、 180° 、 270°) 的三角函数值..... (34)
第二节 特殊角(45° 、 30° 、 60°)的三 角函数 (5)	五、用有向线段表示三 角函数..... (36)
习题..... (10)	习题..... (38)
第三节 直角三角形的 解法..... (13)	第三节 同角的三角函 数之间的关系 (40)
习题..... (19)	一、倒数关系..... (40)
第二章 任意角的三角 函数 (22)	二、比的关系..... (40)
第一节 角 (22)	三、平方和的关系..... (41)
一、角的概念的推广... (22)	四、同角三角函数基本 关系式的应用举例 (43)
二、角的弧度制..... (23)	第四节 已知角的一个 三角函数值， 求其他各三角 函数值 (45)
第二节 任意角的三角 函数..... (26)	习题..... (48)
一、平面直角坐标系... (27)	
二、直角坐标系中的角 (28)	

第三章 诱导公式	(50)	及和差化积的	
第一节 同终边的角的		公式.....	(78)
三角函数之间		一、积化和差.....	(78)
的关系	(50)	二、和差化积.....	(80)
第二节 角 $-\alpha$ 与角 α 的		第三节 杂例	(82)
三角函数间的		习题.....	(85)
关系.....	(51)	第五章 任意三角形的	
第三节 角 $(90^\circ + \alpha)$ 的		边与角间的关	
三角函数	(52)	系	(88)
习题.....	(61)	第一节 正弦定律	(88)
第四章 三角恒等式	(63)	第二节 余弦定律	(93)
第一节 和差公式	(63)	第三节 解三角形的问	
一、两角和及两角差的		题	(98)
三角函数.....	(63)	第四节 利用对数解三	
习题.....	(70)	角形.....	(103)
二、倍角公式.....	(71)	一、半角定律.....	(103)
三、半角公式.....	(75)	二、正切定律.....	(108)
习题.....	(77)	第五节 三角形的面积	
第二节 关于正弦、余		(110)
弦的积化和差		习题.....	(114)

第二篇 平面解析几何

第一章 坐标法	(117)	第二节 两点间的距离	
第一节 有向线段	(117)	(123)
一、轴上有向线段.....	(117)	第三节 线段的定比分	
二、用坐标来计算轴上		点	(125)
有向线段的量和和长		第四节 曲线与方程	(130)
度.....	(121)		

一、曲线和方程的意义(130)	一、椭圆的定义和标准 方程.....(179)
二、已知曲线求它的方 程.....(133)	二、椭圆的性质.....(184)
三、已知方程求它的曲 线.....(139)	三、椭圆的画法.....(192)
习题.....(140)	四、椭圆的切线.....(193)
第二章 直线(144)	五、椭圆的一个性质的 应用.....(196)
第一节 直线的方程 ... (144)	第二节 双曲线(198)
一、点斜式.....(144)	一、双曲线的定义和标 准方程.....(198)
二、斜截式.....(148)	二、双曲线的性质.....(202)
三、两点式.....(149)	三、双曲线的切线、法 线方程.....(209)
四、一般式.....(150)	四、双曲线的画法和一 些应用.....(210)
第二节 直线型经验公 式.....(152)	第三节 抛物线(213)
第三节 两直线的夹角(156)	一、抛物线的定义.....(213)
第四节 点到直线的距 离.....(162)	二、抛物线的标准方程 和性质.....(214)
一、直线的法式方程... (162)	三、抛物线的画法.....(217)
二、化直线的一般方程 为法式方程.....(165)	四、抛物线的切线及其 应用.....(219)
三、点到直线的距离... (167)	第四节 小结(222)
四、被直线划分的两个 半平面.....(169)	习题.....(227)
习题.....(173)	第四章 坐标变换与二 元二次方程的 化简(232)
第三章 椭圆、双曲线、 抛物线(179)	第一节 坐标轴的平移(234)
第一节 椭圆.....(179)	

一、坐标轴的平移……(234)	二、极坐标和直角坐标 的关系……(259)
二、移轴对二元二次方 程系数的影响……(235)	三、曲线的极坐标方程 ……(261)
第二节 坐标轴的旋转 ……(240)	第二节 参数方程 ……(270)
一、坐标轴的旋转……(240)	一、参数方程的概念…(270)
二、含 xy 项的二元二次 方程的化简……(243)	二、参数方程和普通方 程的关系……(273)
第三节 二元二次方程 类型的判定 …(249)	第三节 几种特殊曲线 ……(278)
习题……(252)	一、等速螺线……(278)
第五章 极坐标、参数 方程……(256)	二、等加速螺线……(284)
第一节 极坐标 ……(256)	三、渐开线……(287)
一、极坐标的概念……(256)	四、摆线……(291)
	习题……(295)

第三篇 空间解析几何

第六章 空间直角坐标 系 ……(304)	的公式……(309)
第一节 空间的点的直 角坐标 ……(304)	三、分线段为定比的点 的坐标……(310)
第二节 空间解析几何 的几个简单问 题 ……(307)	第三节 曲面的方程与 方程的曲面 …(312)
一、坐标系平移后同一 点新旧坐标间的关 系……(307)	第四节 某些特殊方程 的曲面 ……(316)
二、求空间两点间距离	一、不含某个坐标的三 元方程的曲面……(316)
	二、只含一个坐标的方 程的曲面……(318)

第五节 曲线的方程(319)	第五节 直线的方程 ... (344)
一、空间曲线作为两曲 面的交线.....(319)	一、直线的标准方程...(344)
二、曲线与曲面的交点(321)	二、直线的参数方程...(345)
习题.....(322)	第六节 向量的内积 ... (347)
第七章 向量代数、空 间直线与平面(325)	一、向量的内积和它的 基本性质.....(347)
第一节 向量的概念 ... (325)	二、用向量的坐标计算 内积.....(351)
第二节 向量的加法与 减法.....(327)	第七节 平面的方程 ... (353)
一、向量的加法的定义 及性质.....(327)	一、平面的点法式方程(353)
二、向量的减法的定义 及性质.....(330)	二、平面的一般方程及 其讨论.....(354)
第三节 向量与数的乘 法(331)	第八节 平面与平面的 关系、直线与 平面的关系、 点与平面的关 系(358)
第四节 向量的射影与 向量的坐标 ... (334)	第九节 作为两平面的 交线的直线 ... (365)
一、向量在轴上的射影(334)	第十节 向量的外积 ... (367)
二、向量的坐标及方向 余弦.....(339)	一、向量的外积概念...(367)
三、向量对坐标基底的 分解.....(340)	二、外积的运算性质...(369)
四、用向量的坐标对向 量进行线性运算...(342)	三、用向量坐标计算外 积.....(372)
	第十一节 点到直线的 距离(374)
	第十二节 三向量的混 合积(376)

一、混合积及其几何意义.....(376)	第四节 其他几种常见的二次曲面 ... (405)
二、混合积的性质.....(377)	一、椭球面.....(405)
三、用向量的坐标计算混合积.....(379)	二、双曲抛物面.....(407)
第十三节 混合积的几何应用(380)	三、常见的二次曲面... (408)
一、平面的三点式方程.....(380)	习题.....(410)
二、四面体的体积.....(380)	一般三元二次方程.....(411)
三、二直线间的距离... (381)	附录 行列式初步(415)
四、二已知异面直线的公垂线.....(383)	第一节 二元一次方程组及二阶行列式.....(415)
习题.....(384)	第二节 三阶行列式 ... (421)
第八章 常见的曲面 ... (397)	第三节 行列式按行或列展开.....(427)
第一节 柱面的方程 ... (397)	第四节 三元线性方程组的求解公式.....(429)
第二节 锥面的方程 ... (400)	
第三节 旋转曲面(401)	

第一篇 平面三角

第一章 锐角三角函数

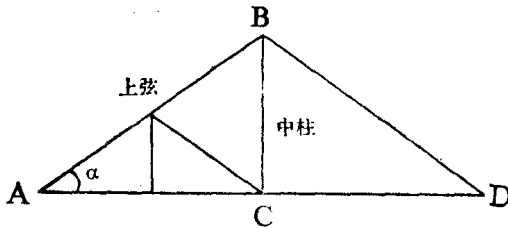
在生产实践中，经常要求线段的长度或角度的大小，而这类问题通常可以归结为求一个三角形的边长或角度的大小。由三角形中已知的边和角来计算未知的边和角，叫做解三角形。

关于直角三角形，我们知道：利用直角三角形两锐角互余的关系，可以解决由已知直角三角形的一个锐角求另一个锐角的问题；利用勾股定理，又可以解决由直角三角形的两边，求另一边的问题。这一章，我们将在这个基础上，进一步研究直角三角形中边和角之间的关系，引进解直角三角形的主要工具——锐角三角函数，然后讨论直角三角形的解法。

第一节 锐角三角函数的概念

工人师傅在制造屋架时，上弦 AB 与跨度 AD 的夹角 α ，即屋面的倾斜角(图1—1)，一般要随盖屋所用的材料来选定。如果用瓦盖的话，实践证明，选取 $\alpha = 26^\circ 34'$ 最为适宜。太小了，不利于泄水；太大了，瓦不易挂牢。在造屋过程中，经常碰到这

两方面的计算问题：一是确定了屋的宽窄（即跨度大小），如何去定中柱、上弦等材料的长短；二是从已有材料长短出发，估计它适于用作造多宽的房屋。这些计算，实际上就是已知直角三角形的一锐角 α 和一边，求其他边的问题。为此我们进一步探寻直角三角形的边与角的关系。

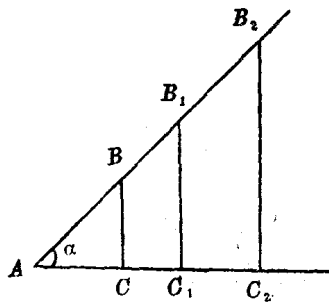


(图 1-1)

给定一个锐角 α ，以它为一个角，我们可以作出许多大小不一样的直角三角形(图1-2)来，例如 $\triangle ABC$ ， $\triangle AB_1C_1$ ，……等等。

为了便于叙述，在这些三角形中，我们把 AC 、 AC_1 、……叫做角 α 的邻边； BC 、 B_1C_1 、……叫做角 α 的对边； AB 、 AB_1 、……叫做斜边。

根据相似三角形的判定法，我们知道，这些直角三角形是相似的。即



(图 1-2)

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \dots\dots$$

$$\therefore \frac{\alpha \text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots = \text{一个定数.}$$

同理，其他任意两边的比也是一个定数。

这就是说，在直角三角形中，当一锐角 α 的大小一定时，它的三条边（ α 的邻边、对边和斜边）的长短虽然可以不是一定的，但用它的三条边所组成的六个比却各是一个确定的值。

我们把这六个比分别用符号表示如下：

(1) $\angle A$ 的对边和斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，用符号“ $\sin A$ ”表示，即

$$\sin A = \frac{\angle A \text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c},$$

(2) $\angle A$ 的邻边和斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，用符号“ $\cos A$ ”表示，即

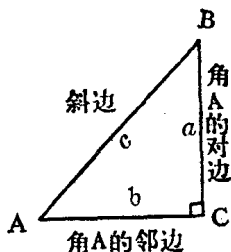
$$\cos A = \frac{\angle A \text{的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c},$$

(3) $\angle A$ 的对边和 $\angle A$ 的邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切，用符号“ $\text{tg} A$ ”表示，即

$$\text{tg} A = \frac{\angle A \text{的对边}}{\angle A \text{的邻边}} = \frac{a}{b},$$

(4) $\angle A$ 的邻边和 $\angle A$ 的对边的比叫做 $\angle A$ 的余切，用符号“ $\text{ctg} A$ ”表示，即

$$\text{ctg} A = \frac{\angle A \text{的邻边}}{\angle A \text{的对边}} = \frac{b}{a},$$



(图 1-3)

(5) 斜边和 $\angle A$ 的邻边的比叫做 $\angle A$ 的正割，用符号“ $\sec A$ ”表示，即

$$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{的邻边}} = \frac{c}{b}$$

(6) 斜边和 $\angle A$ 的对边的比叫做 $\angle A$ 的余割，用符号“ $\csc A$ ”表示，即

$$\csc A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{的对边}} = \frac{c}{a}$$

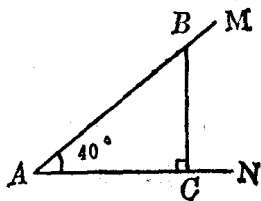
以上六个式子反映了直角三角形中，锐角和直角边、斜边之间的内在联系。我们将 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\operatorname{tg} A$ 、 $\operatorname{ctg} A$ 、 $\sec A$ 、 $\csc A$ 总称为 $\angle A$ 的三角函数。

注意：“ $\sin A$ ”是一个完整的符号，不能理解为 $\sin \times A$ 。其他三角函数的符号也是一样。

提问： $\sin A$ 与 $\csc A$ 、 $\cos A$ 与 $\sec A$ 、 $\operatorname{tg} A$ 与 $\operatorname{ctg} A$ 各有什么关系？

例 用作图法求 40° 角的六个三角函数值。

解 用量角器作 $\angle MAN = 40^\circ$ ，在 AM 上取 $AB = 10\text{cm}$ ，作 $BC \perp AN$ ，量得 BC 、 AC 的长分别约为 6.4cm 、 7.7cm 。



(图 1-4)

$$\therefore \sin 40^\circ = \frac{BC}{AB} \approx \frac{6.4}{10} \approx 0.64,$$

$$\cos 40^\circ = \frac{AC}{AB} \approx \frac{7.7}{10} \approx 0.77,$$

$$\operatorname{tg}40^\circ = \frac{BC}{AC} \approx \frac{6.4}{7.7} \approx 0.83,$$

$$\operatorname{ctg}40^\circ = \frac{AC}{BC} \approx \frac{7.7}{6.4} \approx 1.20,$$

$$\operatorname{sec}40^\circ = \frac{AB}{AC} \approx \frac{10}{7.7} \approx 1.30,$$

$$\operatorname{csc}40^\circ = \frac{AB}{BC} \approx \frac{10}{6.4} \approx 1.56.$$

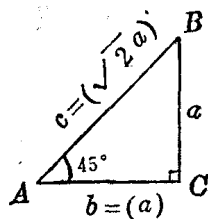
对每一个锐角来说，它的三角函数值，我们都能算出，若要求计算结果更精确一些，就得改进计算方法。

第二节 特殊角(45° 、 30° 、 60°)的三角函数

对于 45° 、 30° 、 60° 这几个特殊的角，由于它们的应用非常广泛，同时它们的三角函数值在形式上又比较简单，便于记忆，我们有特别加以研究的必要。

一、 45° 角的三角函数

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，
 $\angle A = 45^\circ$ 。设 $BC = a$ ，则 $AC = a$ 。由勾股定理，得



(图 1—5)

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a.$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

分别取 $\operatorname{tg} 45^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 的倒数，得

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1, \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}, \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

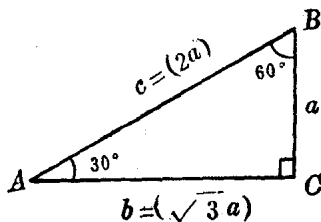
提问：由 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，是否可以得出当 A 为任意

锐角时，总有 $\sin A = \cos A$ ？

二、 30° 和 60° 角的三角函数

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，
 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ 。

设 $BC = a$ ，则 $AB = 2a$ ，由
勾股定理，得



(图 1-6)

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} \\ &= \sqrt{3}a. \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2.$$

提问：当 A 为任意锐角时，是否有 $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ ，

$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg}(90^\circ - A)$ ， $\sec A = \csc(90^\circ - A)$ ？

例 求下列各式的值：

$$(1) \quad 2\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ;$$

$$(2) \quad \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 30^\circ - 2\operatorname{ctg}^2 60^\circ. \quad *$$

解 (1) $2\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2};$$

$$(2) \quad \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 30^\circ - 2\operatorname{ctg}^2 60^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

在很多生产实际问题的计算中，所遇到的并不都是求上述特殊角的三角函数值，往往碰到的是一般锐角的三角函数值。为了实际计算的需要和使用方便，前人把从 0° — 90° 各角的三角函数值计算出来，列出表格，制成了《三角函数表》。它的查法已在《数学用表》中作了详细的说明。如果已知一个锐角的度数，就可以从表中查到它的各个三角函数值；反过来，已知一

• $\sin^2 A$ 就是 $(\sin A)^2$ ，或 $\sin A \cdot \sin A$ 。

个锐角的一个三角函数值，也可以从表中查到这个角的度数。

特殊角 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 的三角函数值，是我们今后经常用到的，应当熟练掌握。为了便于记忆，将它们列成下表：

函数值 三角函数 \ 角度	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
余弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
正切	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
余切	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

从表中可以看出：当角度从 0° 逐渐增大经过 30° 、 45° 、 60° 到 90° 时，它的正弦值随着由0增大到1，余弦值则相反地由1减少到0，正切值从0开始逐渐增大，而余切值则与正切值相反地变化。例如

$$\sin 23^\circ < \sin 25^\circ, \cos 75^\circ - \cos 74^\circ < 0,$$

$$\operatorname{tg} 63^\circ > \operatorname{tg} 62^\circ 30', \operatorname{ctg} 33^\circ - \operatorname{ctg} 35^\circ 30' > 0.$$

三、互余两角三角函数间的关系

在前面求特殊角的三角函数值时，我们发现：

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \cos 30^\circ = \sin 60^\circ.$$

由于 30° 和 60° 互为余角，我们能不能说：任意锐角的正弦等于它的余角的余弦，任意锐角的余弦等于它的余角的正弦？

如图1—7，从三角函数定义知道：

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha),$$

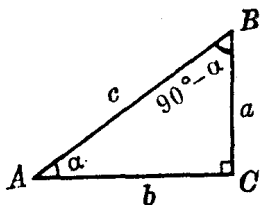
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha); \quad (\text{图 } 1-7)$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \csc(90^\circ - \alpha),$$

$$\csc \alpha = \frac{c}{a} = \sec(90^\circ - \alpha).$$



通常，我们把正弦和余弦叫做互为余函数。就是说，正弦是余弦的余函数，余弦是正弦的余函数。同样，正切和余切、正割和余割也叫做互为余函数。这样，上面六个等式可以概括成一句话：一个角的三角函数等于这个角的余角的余函数。即

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha),$$

$$\sec \alpha = \csc(90^\circ - \alpha), \quad \csc \alpha = \sec(90^\circ - \alpha).$$

例 1 已知 $\sin 35^\circ 6' = 0.5750$ ， $\cos 70^\circ = 0.3420$ ，求它们的余函数 $\cos 54^\circ 54'$ 、 $\sin 20^\circ$ 的值。

解 (1) $\cos 54^\circ 54' = \sin(90^\circ - 54^\circ 54')$