CHUDENGSHUXUE

初等数学

下册：三角、解析几何

湖南师范学院数学系

湖南人民出版社

初等数学

（下册·三角、解析几何）

湖南师范学院数学系编

*

湖南人民出版社出版

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷一厂印刷

*

1979年2月第1版第1次印刷

印数：1—180,000　　印张：13.75

统一书号：13109·47　　定价：0.78元

目　录

第一篇　平面三角

第二篇　平面解析几何

第三篇　空间解析几何

第一篇　平面三角

第一章　锐角三角函数

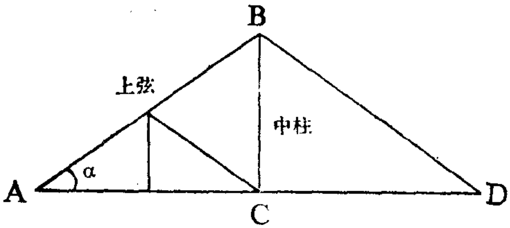
在生产实践中，经常要求线段的长度或角度的大小，而这种问题通常可以归结为求一个三角形的边长或角度的大小．由三角形中已知的边和角来计算未知的边和角，叫做解三角形．

关于直角三角形，我们知道：利用直角三角形两锐角互余的关系，可以解决由已知直角三角形的一个锐角求另一个锐角的问题；利用勾股定理，又可以解决由直角三角形的两边，求另一边的问题．这一章，我们将在这个基础上，进一步研究直角三角形中边和角之间的关系，引进解直角三角形的主要工具——锐角三角函数，然后讨论直角三角形的解法．

第一节　锐角三角函数的概念

工人师傅在制造屋架时，上弦AB与跨度AD的夹角α，即屋面的倾斜角(图1—1)，一般要随盖屋所用的材料来选定．如果用瓦盖的话，实践证明，选取$\alpha=26°34'$最为适宜．太小了，不利于泄水；太大了，瓦不易挂牢．在造屋过程中，经常碰到这

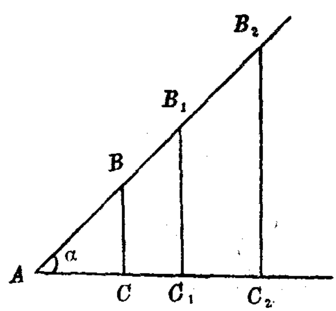
两方面的计算问题：一是确定了屋的宽窄（即跨度大小），如何去定中柱、上弦等材料的长短；二是从已有材料长短出发，估计它适于用作造多宽的房屋。这些计算，实际上就是已知直角三角形的一锐角α和一边，求其他边的问题.为此我们进一步探寻直角三角形的边与角的关系。



（图 1 — 1）

给定一个锐角α，以它为一个角，我们可以作出许多大小不一样的直角三角形（图1—2）来，例如$\triangle ABC$，$\triangle AB_1C_1$，……等等。

为了便于叙述，在这些三角形中，我们把AC、AC_1、……叫做角α的邻边；BC、B_1C_1、……叫做角α的对边；AB、AB_1、……叫做斜边。



（图 1 — 2）

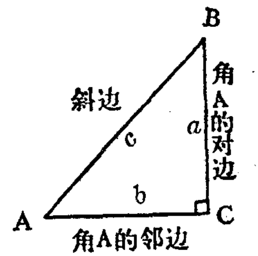
根据相似三角形的判定法，我们知道，这些直角三角形是相似的。即

$\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1 \backsim AB_2C_2 \cdots\cdots$

$$\therefore \quad \frac{\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\cdots\cdots=\text{一个定数}.$$

同理，其他任意两边的比也是一个定数。

这就是说，在直角三角形中，当一锐角α的大小一定时，它的三条边（α的邻边、对边和斜边）的长短虽然可以不是一定的，但用它的三条边所组成的六个比却各是一个确定的值。



（图 1—3）

我们把这六个比分别用符号表示如下：

（1）$\angle A$的对边和斜边的比叫做$\angle A$的正弦，用符号"$sinA$"表示，即

$$sinA=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

（2）$\angle A$的邻边和斜边的比叫做$\angle A$的余弦，用符号"$cosA$"表示，即

$$cosA=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

（3）$\angle A$的对边和$\angle A$的邻边的比叫做$\angle A$的正切，用符号"tgA"表示，即

$$tgA=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b};$$

（4）$\angle A$的邻边和$\angle A$的对边的比叫做$\angle A$的余切，用符号"$ctgA$"表示，即

$$ctgA=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\frac{b}{a};$$

(5) 斜边和$\angle A$的邻边的比叫做$\angle A$的正割，用符号“$secA$”表示，即

$$secA=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{c}{b};$$

(6) 斜边和$\angle A$的对边的比叫做$\angle A$的余割，用符号“$cscA$”表示，即

$$cscA=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}}=\frac{c}{a}.$$

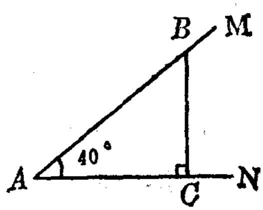
以上六个式子反映了直角三角形中，锐角和直角边、斜边之间的内在联系。我们将$sinA$、$cosA$、tgA、$ctgA$、$secA$、$cscA$总称为$\angle A$的三角函数。

注意：“$sinA$”是一个完整的符号，不能理解为$sin\times A$。其他三角函数的符号也是一样。

提问：$sinA$与$cscA$、$cosA$与$secA$、tgA与$ctgA$各有什么关系？

例 用作图法求40°角的六个三角函数值。

解 用量角器作$\angle MAN=40°$，在AM上取$AB=10cm$，作$BC\perp AN$，量得BC、AC的长分别约为6.4cm、7.7cm。



(图1—4)

$$\therefore\quad sin40°=\frac{BC}{AB}\approx\frac{6.4}{10}\approx0.64,$$

$$cos40°=\frac{AC}{AB}\approx\frac{7.7}{10}\approx0.77,$$

$$tg40^\circ = \frac{BC}{AC} \approx \frac{6.4}{7.7} \approx 0.83,$$

$$ctg40^\circ = \frac{AC}{BC} \approx \frac{7.7}{6.4} \approx 1.20,$$

$$sec40^\circ = \frac{AB}{AC} \approx \frac{10}{7.7} \approx 1.30,$$

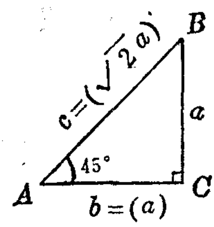
$$csc40^\circ = \frac{AB}{BC} \approx \frac{10}{6.4} \approx 1.56.$$

对每一个锐角来说，它的三角函数值，我们都能算出，若要求计算结果更精确一些，就得改进计算方法。

第二节　特殊角(45°、30°、60°)的三角函数

对于45°、30°、60°这几个特殊的角，由于它们的应用非常广泛，同时它们的三角函数值在形式上又比较简单，便于记忆，我们有特别加以研究的必要。

一、45°角的三角函数



（图 1－5）

在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$。设$BC=a$，则$AC=a$。由勾股定理，得

$$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a.$$

$$\therefore\quad sin45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

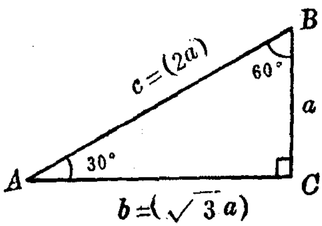
$$tg 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

分别取$tg45°$、$\cos 45°$、$\sin 45°$的倒数，得

$ctg 45° = 1$， $\sec 45° = \sqrt{2}$， $\csc 45° = \sqrt{2}$.

提问：由$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，是否可以得出当$A$为任意锐角时，总有$\sin A = \cos A$？

二、30°和60°角的三角函数



（图1—6）

在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$\angle B = 60°$.

设$BC = a$，则$AB = 2a$，由勾股定理，得

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

$$\therefore \quad \sin 30° = \cos 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg 30° = ctg 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$ctg 30° = tg 60° = \sqrt{3},$$

$$sec30° = csc60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$csc30° = sec60° = 2.$$

提问：当A为任意锐角时，是否有$sinA = cos(90° - A)$，$tgA = ctg(90° - A)$，$secA = csc(90° - A)$？

例 求下列各式的值：

（1） $2sin30° + cos60° + tg45°$；

（2） $sin^2 45° + tg^2 30° - 2ctg^2 60°$。*

解 （1） $2sin30° + cos60° + tg45°$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2};$$

（2） $sin^2 45° + tg^2 30° - 2ctg^2 60°$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

在很多生产实际问题的计算中，所遇到的并不都是求上述特殊角的三角函数值，往往碰到的是一般锐角的三角函数值．为了实际计算的需要和使用方便，前人把从0°—90°各角的三角函数值计算出来，列出表格，制成了«三角函数表»．它的查法已在«数学用表»中作了详细的说明．如果已知一个锐角的度数，就可以从表中查到它的各个三角函数值；反过来，已知一

* sin^2A就是$(sinA)^2$，或$sinA \cdot sinA$.

个锐角的一个三角函数值，也可以从表中查到这个角的度数。

特殊角0°、30°、45°、60°、90°的三角函数值，是我们今后经常用到的，应当熟练掌握。为了便于记忆，将它们列成下表：

函数值 / 角度 / 三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
正　弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
余　弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
正　切	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
余　切	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

从表中可以看出：当角度从0°逐渐增大经过30°、45°、60°到90°时，它的正弦值随着由0增大到1，余弦值则相反地由1减少到0，正切值从0开始逐渐增大，而余切值则与正切值相反地变化。例如

$\sin 23° < \sin 25°$，$\cos 75° - \cos 74° < 0$，

$tg 63° > tg 62°30'$，$ctg 33° - ctg 35°30' > 0$。

三、互余两角三角函数间的关系

在前面求特殊角的三角函数值时，我们发现：

$\sin 30° = \cos 60°$，$\cos 30° = \sin 60°$。

由于30°和60°互为余角，我们能不能说：任意锐角的正弦等于它的余角的余弦，任意锐角的余弦等于它的余角的正弦？

如图1—7，从三角函数定义知道：

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos(90°-\alpha),$$

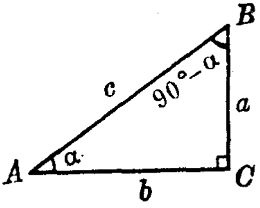
$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin(90°-\alpha);$$

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b}=ctg(90°-\alpha),$$

$$ctg\,\alpha=\frac{b}{a}=tg(90°-\alpha);$$

$$\sec\alpha=\frac{c}{b}=\csc(90°-\alpha),$$

$$\csc\alpha=\frac{c}{a}=\sec(90°-\alpha).$$



（图1—7）

通常，我们把正弦和余弦叫做互为余函数。就是说，正弦是余弦的余函数，余弦是正弦的余函数。同样，正切和余切、正割和余割也叫做互为余函数。这样，上面六个等式可以概括成一句话：一个角的三角函数等于这个角的余角的余函数。即

$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$，　　$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$，

$tg\alpha=ctg(90°-\alpha)$，　　$ctg\alpha=tg(90°-\alpha)$，

$\sec\alpha=\csc(90°-\alpha)$，　　$\csc\alpha=\sec(90°-\alpha)$。

例1　已知$\sin35°6'=0.5750$，$\cos70°=0.3420$，求它们的余函数$\cos54°54'$、$\sin20°$的值。

解　（1）$\cos54°54'=\sin(90°-54°54')$