Calculus-Computer-Based

Physics

《大学物理学》习题分析与解答

李元杰　陆　果　杨晓雪

高等教育出版社

《大学物理学》习题分析与解答

李元杰　陆　果　杨晓雪

高等教育出版社

内容提要

本书是与李元杰、陆果教授主编的《大学物理学》相配套的习题分析与解答，书中对教材中所有的习题进行了详细的分析，力图通过分析，使学生对相关的物理规律有更深的认识，拓宽解题思路，并通过讨论使学生进一步明确计算结果的物理意义。

本书不仅可作为李元杰、陆果主编的《大学物理学》作为教材的师生作为教学参考书使用，还可供使用其他教材的工科各专业和理科非物理类专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

《大学物理学》习题分析与解答/李元杰，陆果，杨晓雪．—北京：高等教育出版社，2004.2

ISBN 7-04-012980-9

Ⅰ.大… Ⅱ.①李…②陆…③杨… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099491 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市南方印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2004年2月第1版
印　　张	17.25	**印　　次**	2004年2月第1次印刷
字　　数	420 000	**定　　价**	21.80元

郑重声明

策划编辑　胡凯飞

责任编辑　王文颖

封面设计　于文燕

责任绘图　黄建英

版式设计　胡志萍

责任校对　杨雪莲

责任印制　孔　源

目　录

绪　论

基础训练题

0-1　两矢量的标、矢积　已知两矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$，求：

(1)各矢量的长度；(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 间夹角；(4)各矢量的方向余弦；(5)矢量和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与矢量差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；(6) 矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解：(1) $a=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$，　$b=\sqrt{1^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3+8-30=-25$

(3) $\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}=\dfrac{-25}{\sqrt{50}\sqrt{41}}=-0.5522$，　$\alpha=123.5°$

(4) $\cos\alpha_1=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{3}{\sqrt{50}}$，　$\cos\alpha_2=\dfrac{b_x}{b}=\dfrac{-1}{\sqrt{41}}$

(5) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$

(6) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(4\times6+2\times5)\boldsymbol{i}+[(-5)\times(-1)-6\times3]\boldsymbol{j}+(2\times3+1\times4)\boldsymbol{k}=34\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$

0-2　矢量代数　已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=11\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$；(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 α.

解：(1) $\boldsymbol{a}=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]/2=\dfrac{1}{2}(6\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=33-5+35=63$，$\cos\alpha=63/(\boldsymbol{a}\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|)=63/(\sqrt{83}\sqrt{147})$

0-3　试证明，若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 则 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$.

解：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$，　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

由题意有

$$a^2+b^2+2ab\cos\alpha=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

$$4ab\cos\alpha=0$$

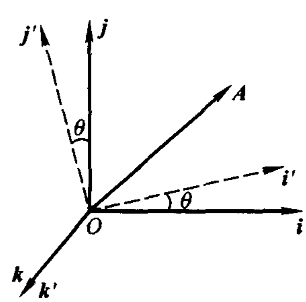
$$\alpha=\pi/2$$

0-4　不变性　考虑直角坐标系中的一矢量 $\boldsymbol{A}$.现将坐标系绕 z 轴旋转 θ 角.

(1) 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 θ 表示 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$；

(2) 用 $A_{x'}$、$A_{y'}$、$A_{z'}$ 和 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 表示 $\boldsymbol{A}$，将此表达式变换到 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，从而求出 $A_{x'}$、$A_{y'}$、$A_{z'}$ 和 A_x、A_y、A_z 的关系；

(3) 证明 $A_x^2+A_y^2+A_z^2=A_{x'}^2+A_{y'}^2+A_{z'}^2$.



题 0-4 图

解：(1) $\boldsymbol{i}'=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}'=-\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{A}=A_x'\boldsymbol{i}'+A_y'\boldsymbol{j}'+A_z'\boldsymbol{k}'$

$$\boldsymbol{A} = A'_x\boldsymbol{i}' + A'_y\boldsymbol{j}' + A'_z\boldsymbol{k}' = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

将(1)代入后两边进行比较得

$$A_x = (A'_x - A'_y)\cos\theta$$
$$A_y = (A'_x - A'_y)\sin\theta$$
$$A_z = A'_z$$

(3) 略.

0 - 5 已知$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$为平面矢量场绕闭合环路$C$的环量,定义平均涡旋强度$\overline{|(\nabla\times\boldsymbol{v})|} = \dfrac{\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\Delta S}$为$C$包围下的单位面积之环量,它描述面$\Delta S$上矢量场的平均涡旋强度.

定义极限$|\nabla\times\boldsymbol{v}| = \lim\limits_{\Delta_S\to 0}\dfrac{\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\Delta S}$为$\Delta S$包围的某点当$\Delta S\to 0$时该点的涡旋强度或旋度.

证明:$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

证明:

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = (\partial_y \boldsymbol{v}_z - \partial_z \boldsymbol{v}_y)\boldsymbol{i} + (\partial_z \boldsymbol{v}_x - \partial_x \boldsymbol{v}_z)\boldsymbol{j} + (\partial_x \boldsymbol{v}_y - \partial_y \boldsymbol{v}_x)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= (\partial_y \boldsymbol{v}_z - \partial_z \boldsymbol{v}_y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\partial_z \boldsymbol{v}_x - \partial_x \boldsymbol{v}_z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\partial_x \boldsymbol{v}_y - \partial_y \boldsymbol{v}_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= (\partial_y \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}y - \partial_x \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}x)\mathrm{d}z + (\partial_z \boldsymbol{v}_x\mathrm{d}z - \partial_y \boldsymbol{v}_x\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + (\partial_x \boldsymbol{v}_y\mathrm{d}x - \partial_z \boldsymbol{v}_y\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

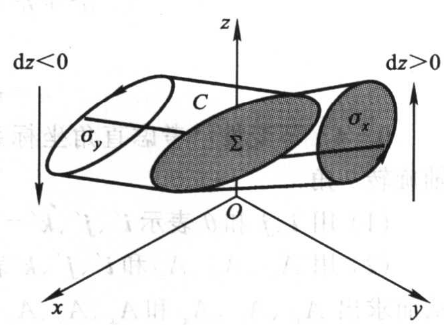
$$\iint_\Sigma(\partial_y \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}y - \partial_x \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}x)\mathrm{d}z = \int\mathrm{d}z\left(\int\partial_y \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}y - \int\partial_x \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int\left(\boldsymbol{v}_z(x, y+\Delta y\big|_{\sigma_x}, z) - \boldsymbol{v}_z(x,y,z)\right)\mathrm{d}z + \boldsymbol{v}_z(x+\Delta x\big|_{\sigma_y}, y+\Delta y\big|_{\sigma_x}, z) - \boldsymbol{v}_z(x, y+\Delta y\big|_{\sigma_x}, z)\mathrm{d}z$$

$$= \int\left(\boldsymbol{v}_z(x+\Delta x\big|_{\sigma_y}, y+\Delta y\big|_{\sigma_x}, z) - \boldsymbol{v}_z(x,y,z)\right)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_C \boldsymbol{v}_z\mathrm{d}z$$

同理



题 0 - 5 图

$$\iint_\Sigma(\partial_z \boldsymbol{v}_x\mathrm{d}z - \partial_y \boldsymbol{v}_x\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \oint_C \boldsymbol{v}_x\mathrm{d}x$$

$$\iint_\Sigma(\partial_x \boldsymbol{v}_y\mathrm{d}x - \partial_z \boldsymbol{v}_y\mathrm{d}z)\mathrm{d}y = \oint_C \boldsymbol{v}_y\mathrm{d}y$$

所以

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

第一章　质点运动学

基础训练题

1－1　月亮绕地球运行的轨道近似为圆形，半径为 3.85×10^{8} m，周期为27.3天，问月亮相对地球运动的向心加速度数值是多少？

解： $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{4\pi^2R}{T^2}=\dfrac{4\times3.14^2\times3.85\times10^8}{(27.3\times24\times3\ 600)^2}\ \mathrm{m/s^2}=2.73\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$

1－2　(a)地球的半径为 6.37×10^{6} m，求地球赤道表面一点相对地球中心的向心加速度，以 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位.(b)地球绕太阳运行的轨道半径为 1.5×10^{11} m，求地球相对太阳的向心加速度，以 $\mathrm{m/s^2}$ 单位.(c)天文测量表明太阳系以近似圆形的轨道绕银河系中心运动，半径约为 2.8×10^{20} m，速率为 2.5×10^{5} m/s.求太阳系相对银河系的向心加速度，以 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位.(d)求这些加速度每对的比值.

解：(a) $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{4\pi^2R}{T^2}=\dfrac{4\times3.14^2\times6.37\times10^6}{(24\times3\ 600)^2}\ \mathrm{m/s^2}=3.37\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$

1－3　当某物体在空气中(或其他流体)下落时，由于摩擦的影响，物体的速率逐渐趋于一个终极速率 v_t，假定垂直下落的物体有一加速度分量为

$$a_y=-g+bv^2$$

式中 $b=0.002\ \mathrm{m^{-1}}$，求 v_t.(提示：当物体的速率接近终极速率时，它的加速度趋于零).

解： $v_t=\sqrt{\dfrac{g}{b}}=\sqrt{\dfrac{9.8}{0.002}}\ \mathrm{m/s^2}=70\ \mathrm{m/s^2}$

题1－3图

1－4　抛体的水平射程 R 为48 m，它的初速率为33 m/s，(1)求抛射角.(2)是否有对应 R 和 v_0 的另一个抛射角？如果有，求角度.如果没有，试解释.

解：(1) 水平射程：

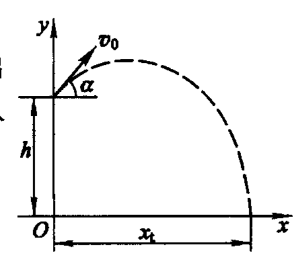
$$R=v_0^2\sin 2\alpha/g$$

$$\sin 2\alpha=\frac{Rg}{v_0^2}=\frac{48\times9.8}{33^2}=0.432$$

$$\alpha=13^\circ$$

(2) 77°.

1－5　从阳台上以31 m/s的初速度和24°的抛射角掷出一球，掷出点距地面 $h=8.2$ m，求(1)从掷出点到球打在地上的水平距离 x_t；(2)从掷出点到球打在地上的直线距离 l.



题1－5图

解： $x=v_0\cos\alpha t,\quad y=v_0\sin\alpha t-\dfrac{1}{2}gt^2$

(1) 由上两式得

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

$$-8.2 = x_t\tan 24° - \frac{9.8}{2\times 31^2\times\cos^2 24°}x_t^2$$

$$x_t^2 - 73x_t - 1344 = 0$$

$$x_t = 88.3\ \text{m}$$

(2) $l = \sqrt{h^2 + x_t^2} = \sqrt{8.2^2 + 88.3^2}\ \text{m} = 88.7\ \text{m}$

1－6　由位矢求速度、加速度和轨迹　一质点位置由 $\boldsymbol{r} = A(\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$给出. α 为常数. 求：

(1) 质点在 $t=0$ 到 $t=1/\alpha$ 内的位移及这段时间内的平均速度；

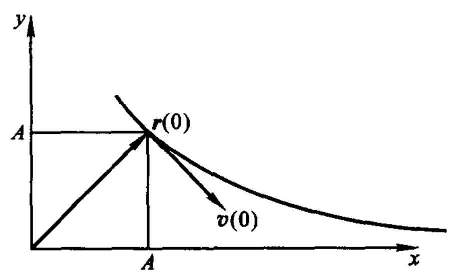
(2) 在 $t=1/\alpha$ 时的速度和加速度；

(3) $t=0$ 到 $t=1/\alpha$ 内的平均加速度；

(4) 任意时刻的速度、加速度；

(5) 质点的运动轨迹.

解：(1)



题 1－6 图

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \boldsymbol{r}(0) = A[(\mathrm{e}-1)\boldsymbol{i} + (\mathrm{e}^{-1}-1)\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \alpha A[(\mathrm{e}-1)\boldsymbol{i} + (\mathrm{e}^{-1}-1)\boldsymbol{j}]$$

也可

$$\boldsymbol{v} = \alpha\int_0^{1/\alpha}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \alpha\int_0^{1/\alpha}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \alpha\int_0^{1/\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha\Delta\boldsymbol{r}$$

(2) 因 $\boldsymbol{v} = \alpha A(\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{i} - \mathrm{e}^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$，　$\boldsymbol{a} = \alpha^2 A(\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$

故
$$\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha A(\mathrm{e}\boldsymbol{i} - \mathrm{e}^{-1}\boldsymbol{j}),\quad \boldsymbol{a}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

(3) $\bar{\boldsymbol{a}} = \alpha\int_0^{1/\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \alpha^2 A[(\mathrm{e}-1)\boldsymbol{i} - (\mathrm{e}^{-1}-1)\boldsymbol{k}]$

(4) 见(2)解.

(5) 为绘轨迹考虑极限情况通常会很有用.

在 $t=0$ 时，

$$\boldsymbol{r}(0) = A(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha A(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

在　$t\to\infty(\alpha>0)$时，　$\mathrm{e}^{\alpha t}\to\infty, \mathrm{e}^{-\alpha t}\to 0$

故此时　$\boldsymbol{r}\to A\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}\to\alpha A\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{i}$

1－7　求速度、加速度　设尺 AB 的端点 A 与 B 沿直线导槽 Ox，Oy 滑动，而 B 端以匀速 c 运动，求尺上 M 点的轨迹方程，速度，加速度. 设 $MA = a$，$MB = b$，$\angle OBA = \theta$.

解：M 点坐标$(b\sin\theta, a\cos\theta)$.

消去参变量，得

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;\quad 0\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant a$$

速度分量：

$$\dot{x}=(b\cos\theta)\dot{\theta},\quad \dot{y}=(-a\sin\theta)\dot{\theta}$$

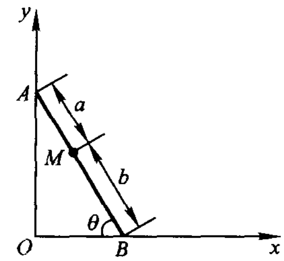
B 点坐标：

$$x_1=0,\quad y_1=(a+b)\cos\theta$$

依题意

$$\dot{y}_1=-c$$

有 $\dot{\theta}=\dfrac{c}{a+b}\dfrac{1}{\sin\theta}$，故

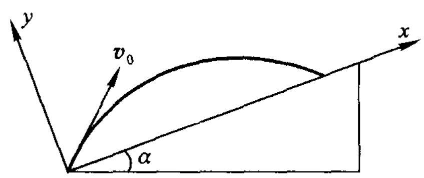


题 1-7 图

$$\boldsymbol{v}_M=\frac{c}{a+b}[b\cot\theta\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{a}_M=-\frac{b^4c^2}{(a+b)^2}\frac{1}{x^3}\boldsymbol{i}$$

1-8 抛体运动 一小山坡与地平面成一角度 α，问：如以初速率 v_0 从山脚下向山坡上发射炮弹，问发射角 θ(从地平算)为多大时，炮弹沿小山坡有最大射程.



题 1-8 图

解：取坐标系如图，依题意有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g\sin\alpha,\quad d^2y/dt^2=-g\cos\alpha$$

当 $t=0$ 时，$x=y=0$，有

$$v_x=v_0\cos(\theta-\alpha),\quad v_y=v_0\sin(\theta-\alpha)$$

由此可得

$$x=v_0t\cos(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha,\quad y=v_0t\sin(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha$$

对应落地点的时间：

$$t=2v_0\sin(\theta-a)/g\cos a$$

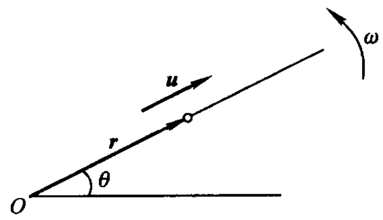
射程 S：

$$S=x\Big|_{t=t'}=\text{常数}\left[\sin\alpha+\sin2\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

故当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$ 时有最大射程.

1-9 极坐标中求速度、加速度 设一根细棒以恒定角速度 ω 绕棒端点 O 旋转，另有一带孔小环套在棒上，在 $t=0$ 时，环开始从 O 点出发，以恒定速率 u 沿棒向外运动，求小环的速度、加速度.

解：取平面极坐标系，有



题 1－9 图

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$$

式中，$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 分别为沿 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 方向的单位矢量，故

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

由题意 $\dot{\theta} = \omega$，$\dot{r} = u$，$\ddot{\theta} = 0$，$r = \omega t$，则

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{e}_r + r\omega\boldsymbol{e}_\theta, \quad \boldsymbol{a} = -ut\omega^2\boldsymbol{e}_r + 2u\omega\boldsymbol{e}_\theta$$

小环的径向速度为常数，横向速度随 t 线性增加．径向加速度随 t 线性增加，而横向加速度为常数．

1－10　切向、法向加速度　一质点沿圆摆线 $s = 4\alpha\sin\theta$ 弧线运动，若 $\dot{\theta} =$ 常数，则其加速度亦为一常数，试证明之．

解： s 为弧长（轨迹曲线）

θ 为轨迹曲线上切线与 x 轴之间夹角

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4\alpha\omega\cos\theta$$

式中 $\omega = \dot{\theta} =$ 常数．

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -4\alpha\omega^2\sin\theta \quad \text{（切向加速度）}$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ 为曲线的曲率半径，$\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 4\alpha\cos\theta$，故

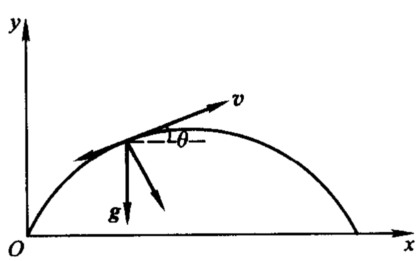
$$a_{\mathrm{n}} = 4\alpha\omega^2\cos\theta \quad \text{（法向加速度）}$$

总加速度：

$$a^2 = a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2 = 4\alpha\omega^2 = \text{常数}$$

我们没指明任何参考系而将运动分为切向、法向，这样分解的好处是不依坐标的选择，而仅取决于曲线的形状（a_{n} 指向曲线的凹侧为正）．

1－11　求曲率半径　一质点以初速 v_0 在与水平成仰角 θ_0 角的方向被抛出，忽略空气阻力，求质点 t 时刻的切向和法向加速度及曲率半径 ρ．



题 1－11 图

解： 设 t 时刻 $\boldsymbol{v}$ 与水平成 θ 角，则

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = g\cos\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = -g\sin\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\theta = \frac{v_x}{v}$$

其中　$v_x = v_0\cos\theta_0$，　$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$

故

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\theta_0 + g^2t^2}$$

由

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}$$

有
$$\rho=\frac{v_0^2-2v_0\ gt\sin\ \theta_0+g^2t^2}{g\cos\ \theta}$$

其中 $\cos\theta=\frac{v_0\cos\theta_0}{v}$.

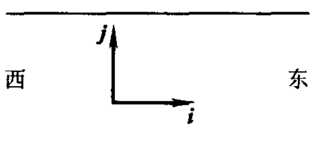
1-12　相对速度　江水由西向东,水对岸流速 $v_1=3$ m/s,江宽 $b=2.4$ km.欲使船在 $t=10$ min 内,由南向北横渡此江,问驾驶人应使船在什么方向航行? 船对水的航速 v_2 为多少?

解: 船同时参与流速$\boldsymbol{v}_1$ 和航速$\boldsymbol{v}_2$ 两种运动,合成为$\boldsymbol{v}$,由图示坐标:

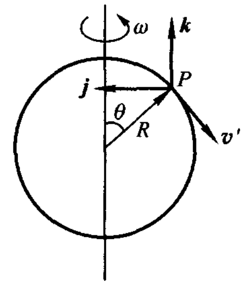
$$\boldsymbol{v}=\frac{b}{t}\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}_1=3\boldsymbol{i}$$

由
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$
$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{v}$的大小及方向均可由$\boldsymbol{v}_2$ 的表达式求出.



题 1-12 图



题 1-13 图

1-13　科里奥利加速度　P 处质点在一半径为 R 的球上以速度 v'沿球的经线匀速运动.球以匀角速 ω 绕竖直直径转动,求 P 点的绝对加速度.

解:转动坐标系 $\boldsymbol{ijk}$.其中,$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 在经圈面内,$\boldsymbol{i}$ 则垂直经圈面.

P 点沿$\boldsymbol{j}$ 方向的牵连加速度:

$$\boldsymbol{a}_t=-\omega^2\boldsymbol{r}=\omega^2R\ \sin\ \theta\boldsymbol{j}$$

相对加速度:

$$\boldsymbol{a}=-\frac{v'^2}{R}\sin\ \theta\boldsymbol{j}-\frac{v'^2}{R}\cos\ \theta\boldsymbol{k}$$

科里奥利加速度:

$$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=2\omega\boldsymbol{k}\times(-v'\sin\ \theta\boldsymbol{k}-v'\cos\ \theta\boldsymbol{j})=2\omega v'\cos\ \theta\boldsymbol{i}$$

故总加速度:

$$\boldsymbol{a}=2\omega v'\cos\ \theta\boldsymbol{i}+\left(\omega^2R\sin\ \theta-\frac{v'^2}{R}\sin\ \theta\right)\boldsymbol{j}-\left(\frac{v'^2}{R}\cos\ \theta\right)\boldsymbol{k}$$

提高训练题

1-14　一物体沿直线运动的加速度为 $a=-kv^2$,k 为一常数.在 $t=0$ 时 $v=v_0$,求:

(1) 位移和速度表为时间的函数;

(2) v 是 x 的函数.

解:(1) $-kv^2=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\mathrm{d}t$, $\int_{v_0}^{v}\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$, $v=\dfrac{v_0}{1+v_0kt}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{1+v_0kt},\quad \mathrm{d}x=\frac{v_0}{1+v_0kt}\mathrm{d}t,\quad \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{v_0}{1+v_0kt}\mathrm{d}t$$

$$x=x_0-\frac{1}{k}\ln\frac{1}{1+v_0kt}$$

(2) 由上式有

$$-k(x-x_0)=\ln\frac{1}{1+v_0kt}=\ln e^{-k(x-x_0)}$$

可得出

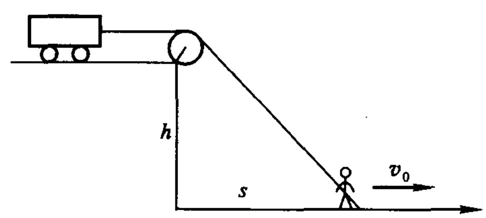
$$v=v_0e^{-k(x-x_0)}$$

1-15 高 h 的平台上有一质量为 m 的小车,用绳子跨过滑轮,由地面上的人以匀速 v_0 向右拉,当人从平台脚下向右走了 s 距离时,问:

(1) 车速 v;

(2) 车的加速度 a;

(3) 车走过的距离.



题 1-15 图

解:(1) $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $x=l_0-\sqrt{h^2+s^2}$(l_0 为绳子全长), 其中$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0$.

由此有

$$v=-\frac{sv_0}{\sqrt{h^2+s^2}}$$

(原点设在滑轮处,x 轴沿水平方向指向左为正,上式中的负号表示车沿 x 的负方向运动.)

(2) $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

(3) $v=-\dfrac{sv_0}{\sqrt{h^2+s^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}v_0$, $\mathrm{d}x=\dfrac{-s\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2+h^2}}$

$$-\Delta x=\sqrt{s^2+h^2}\Big|_{s=0}^{s=\sqrt{s^2+h^2}-h}$$

1-16 一物以 $v_0=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 被抛出,抛射角 $\alpha_0=60°$,略去空气阻力,问:

(1) 物体开始运动后的 1.5 s 末,运动方向与水平面的夹角 α 为多少? 2.5 s 末 α 又为多少?

(2) 抛出物体后经多少时间其运动方向与水平面成 $\alpha=45°$角,这时物体的高度如何?

(3) 在轨迹最高点处及落地点处的曲率半径为多少?

解:(1) $\tan\alpha=\dfrac{v_y}{v_x}=\dfrac{v_0\sin\alpha_0-gt}{v_0\cos\alpha_0}=1.732-0.98\,t$

$$\tan\alpha_1 = 1.732 - 0.98\times 1.5 = 0.262,\quad \alpha_1 = 14.68^\circ$$

$$\tan\alpha_2 = 1.732 - 0.98\times 2.5 = -0.718,\quad \alpha_2 = -35.67^\circ$$

(2) $\tan 45^\circ = 1.732 - 0.98t = 1,\quad t = 0.75\ \mathrm{s}$

$$y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 10.2\ \mathrm{m}$$

(3) 最高点 $a_n = \dfrac{(v_0\cos\alpha_0)^2}{\rho} = g,\quad \rho = \dfrac{(v_0\cos\alpha_0)^2}{g} = 10.2\ \mathrm{m}$

最低点 $a_n = \dfrac{v_0^2}{\rho} = g\cos 60^\circ,\quad \rho = \dfrac{v_0^2}{g\cos 60^\circ} = 81.5\ \mathrm{m}$

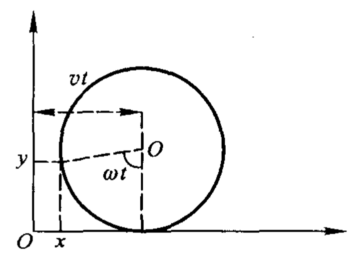
1-17 一轮胎在一直线上做无滑滚动,它的中心以恒速率 v 移动,一小石子卡进了胎的花纹中,在 $t=0$ 时,它和路面接触,求石子的位置、速度、加速度.

解: $$x = vt - R\sin\omega t = vt - R\sin\left(\frac{v}{R}t\right)$$

$$y = R - R\cos\frac{vt}{R}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v - v\cos\frac{vt}{R},\quad v_y = \frac{dy}{dt} = v\sin\frac{vt}{R}$$

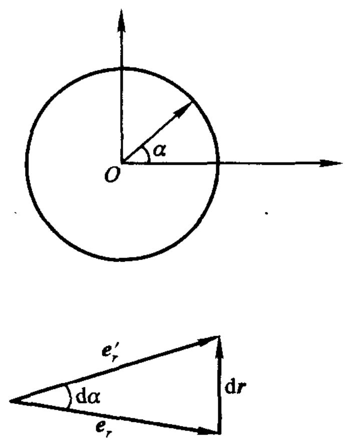
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{v^2}{R}\sin\frac{vt}{R},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v^2}{R}\cos\frac{vt}{R}$$



题 1-17 图

1-18 已知一质点沿半径为 a 的圆周运动,角速度 $\omega = bt$(b 为常数),试用直角坐标和平面极坐标写出质点的位矢、速度矢量、加速度矢量.

解: 直角坐标下:



题 1-18 图

$$\alpha = \int_0^t \omega dt = \int_0^t bt\,dt = \frac{bt^2}{2}$$

$$x = a\cos\alpha = a\cos\frac{bt^2}{2},\quad y = a\sin\frac{bt^2}{2}$$

$$v_x = -abt\sin\frac{bt^2}{2},\quad v_y = abt\cos\frac{bt^2}{2}$$

$$a_x = -ab\sin\frac{bt^2}{2} - ab^2t^2\cos\frac{bt^2}{2}$$

$$a_y = ab\cos\frac{bt^2}{2} - ab^2t^2\sin\frac{bt^2}{2}$$

极坐标下:$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = a\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$

$$d\boldsymbol{e}_r = 2|\boldsymbol{e}_r|\sin\frac{d\alpha}{2}\boldsymbol{e}_t = d\alpha\boldsymbol{e}_t = bt\,dt\boldsymbol{e}_t$$

$\boldsymbol{e}_t$ 为切线方向的单位矢量,

$$\boldsymbol{v} = abt\boldsymbol{e}_t$$

同理可证 $\dfrac{d\boldsymbol{e}_t}{dt} = -\dfrac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{e}_r = -bt\boldsymbol{e}_r$,则

$$\boldsymbol{a} = ab\boldsymbol{e}_t - ab^2t^2\boldsymbol{e}_r$$

1－19 一质点做平面运动，变化规律为 $r=R\mathrm{e}^{mt}$，$\theta=nt$（R、m、n 为常量），试求质点运动的速度、加速度.

解： $\boldsymbol{r}=R\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r$

$$\boldsymbol{v}=Rm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+R\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}=Rm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+R\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta=Rm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+Rn\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta$$

式中，$\boldsymbol{e}_\theta$ 为切线方向的单位矢量.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=Rm^2\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+Rm\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}+Rnm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta+Rn\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\\&=Rm^2\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+Rm\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta+Rnm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta-Rn\mathrm{e}^{mt}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r\\&=Rm^2\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r+Rmn\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta+Rnm\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta-Rn^2\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_r\\&=R\mathrm{e}^{mt}(m^2-n^2)\boldsymbol{e}_r+2Rmn\mathrm{e}^{mt}\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

1－20 半径为 a 的圆盘以角速度 ω 绕其中心轴（过盘心且垂直于圆盘平面的直线）旋转有一甲虫以速率 u 由盘边缘沿着圆盘的一条直径向盘心爬（ω、u 均为常数），求甲虫的位矢、速度、加速度. ［$(a-ut)\boldsymbol{e}_r$；$-u\boldsymbol{e}_r+\omega(a-ut)\boldsymbol{e}_\theta$；$-r\omega^2\boldsymbol{e}_r-2u\omega\boldsymbol{e}_\theta$］

1－21 在靠近月球表面处以 $\boldsymbol{v}_0=(0\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$ m/s 投下一球，球以 $\boldsymbol{a}=(0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$ m/s² 做加速运动（向下），求它 5 s 后的速度.

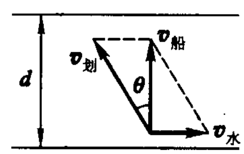
解： $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t(-2\boldsymbol{k})\mathrm{d}t=(5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-2\boldsymbol{k}t=5\boldsymbol{j}-(3+2t)\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{v}_{t=5}=5\boldsymbol{j}-13\boldsymbol{k}$$

1－22 一人在静水中划船速率 4.0 km/h，(1)现在他在江中划，江水速率 2.0 km/h，若他想从岸边出发到达正对岸，应以何方向划行. (2)设江宽 4.0 km，按上述选定的方向，他要多长时间渡江？(3)如果他希望最短时间渡江，应向何方向划？

解：(1) $\sin\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}_{水}}{\boldsymbol{v}_{划}}=\dfrac{2}{4}$，$\theta=30°$

(2) $t=\dfrac{d}{\boldsymbol{v}_{船}}=\dfrac{d}{\boldsymbol{v}_{划}\cos30°}=1.15$ h



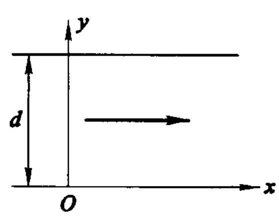
题 1－22 图

(3) 设船头指向与江的横向成 θ 角时渡江时间最短：

$$t=\frac{d}{\boldsymbol{v}_{划}\cos\theta}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=0$，得 $\theta=0$ 或 $180°$，后者不合理，舍去. 可见当船身与岸垂直时过江时间最短.

1－23 一宽 d 的河流速与到河岸的距离成正比，在岸处流速为 0，河心处，流速值为 c，一小船以相对速度 u 沿垂直水流方向行驶，求船的轨迹和靠岸点.



题 1－23 图

解： $\boldsymbol{v}_{水}=ky$，由题意 $k=\dfrac{2c}{d}$，则

$$\boldsymbol{v}_{水}=\frac{2c}{d}y\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_{船对水} = u\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_{船} = \boldsymbol{v}_{船对水} + \boldsymbol{v}_{水} = \frac{2c}{d}y\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

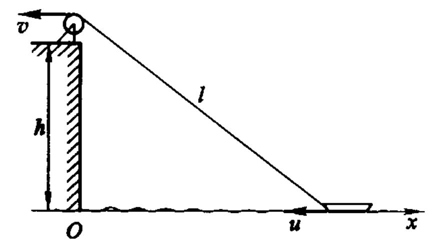
其中
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2c}{d}y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}u = \frac{2c}{d}y, \quad \int_0^x u\,\mathrm{d}x = \frac{2c}{d}\int_0^y y\,\mathrm{d}y, \quad y^2 = \frac{ud}{c}x \quad (轨迹曲线)$$

靠岸点
$$x = \frac{cd}{u}, \quad y = d$$

1－24 湖面上有一条船，在岸边高崖上的船夫通过绞车以匀速率 v 收绳，将船拉向岸边. 如果绳子的质量可以忽略，试问船的速率 u 比收绳速率 v 是大还是小？船的加速度如何？

解：因小船做直线运动，故可取其运动轨迹为直角坐标系的 x 轴，取绞车对水面的垂足 O 为坐标原点. 在任意时刻 t，小船的位置 x 满足关系：



题 1－24 图

$$x^2 = l^2 - h^2$$

将上式两边对时间求导数，可得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

由于崖上的船夫以匀速率 v 收绳，因此有 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = -v$.
由上式可得船的速度和加速度的分量分别为

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v$$

$$u_y = 0$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x^2}v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{lv}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{x}\frac{x}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{h^2v^2}{x^3}$$

$$a_y = 0$$

由此可见，船的速度和加速度的方向均与 x 轴的正方向相反，且加速度的数值随着 x 的减小而迅速增大.

1－25 小船过河模型 小船过河是比均匀重力场中的抛体运动物理内容更丰富的典型运动学模型，因为船速有各种方案(匀速、加速)，水的流速有各种不同的分布(均匀、线性、抛物线分布等)，研究起来具有较大的拓展空间.

观察(1) ① 河水静止，小船以匀速垂直河岸过河；② 河水匀速下流，小船随水流而下；③ 上面二运动合成为一直线匀速运动.

观察(2) 小船沿垂直河岸方向加速开动，河水匀速沿水平向下流，合成抛物线运动；

观察(3) 河水流速成对称线性分布，二岸边为零，河中心为 c，小船沿垂直河岸方向匀速 u 开动，合成一对称曲线轨迹，增大 c 值观察轨道变化. 基本方程为

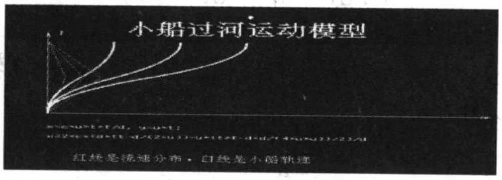
船速：
$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = u$$

河水速：
$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \begin{cases} 2cy/d, & 0 \leqslant y \leqslant d/2 \\ 2c(d-y)/d, & d/2 \leqslant y \leqslant d \end{cases}$$

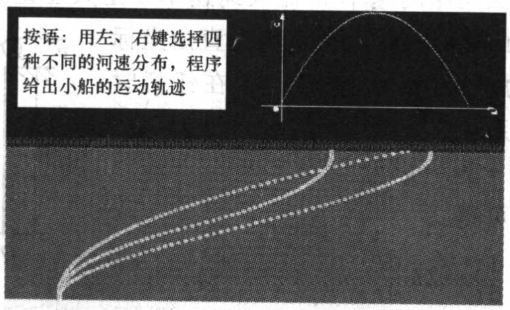
试编程研究河水流速成对称抛物线分布的情况，给出小船过河轨迹.（提示：$v=c-4c(d/2-y)^2/d^2$，$u=$恒量.）

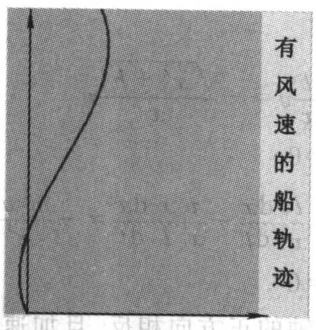
$$c-x=k(d/2-y)^2 \quad (y\leqslant d/2)$$

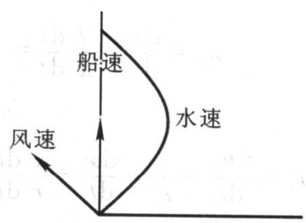
由 $x=0, c=k(d/2)^2$，得 $k=4c/d^2$，所以 $v=c-4c(d/2-y)^2/d^2$.



下面是拓展的例子：







有数字显示的小船过河：