体面线点

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

体面綫点

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

一九五六年·上海

体　面　綫　点

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社出版
(上海湖南路9号)
上海市書刊出版業營業許可証出015号

中科藝文聯合印刷廠印刷　新華書店上海發行所總經售

开本：787×1092　1/32　印張：2　字数：45,000
1956年9月第1版　1956年9月第1次印刷
印数：1—70,000本

統一書号：13076·49
定　　价：(7) 0.19 元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高初中数学各科包括几何、算術、代数、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻地理解教材內容。我們希望通过这套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本“体面綫点”的小册子，系根据中学数学教学大綱修訂草案及初級中学課本平面几何第一章“緒論”編寫的。它对於体面綫点的概念作了比較詳細的敍述，并对移形公理和合同公理的意义、綫段与角的測量及几何学的發生与發展，都作了必要的說明和介紹。

本会在編寫本册前曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分別由孙佩珍、郭如仪兩同志提供材料，而由黃松年同志执筆寫成，再經楊荣祥、范际平兩同志校訂，最后由楊荣祥、黃松年兩同志作了修正。虽然这样，但由於我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956年6月

目　錄

几何学与几何圖形

什么是几何学呢？初学几何学的人都必然会提出这样一个疑問來。我們說，**几何学是研究几何圖形性質的学科，也就是研究几何圖形的形狀大小和相互位置的一門学科**。那末什么是几何圖形呢？我們又說，我們生活在自然界中，眼睛所見到的一切，不論是一株樹，或是一張桌子、一塊黑板、一扇窗子等等，如果我們用几何学的眼光來观察，都分別把它們当作是几何圖形。这是什么緣故呢？因为我們几何学里所研究的几何圖形都是从客观实际中抽象出來的，我們抽象其共同的性質，作为研究几何圖形的內容；所謂共同的性質就是指客观存在的物体表面的形狀，譬如一根圓形的木料和一个鉛鉄筒甚至一根竹桿，尽管它們的質量不同，但它們表面的形狀給予我們的印象，抽象出來的几何圖形都看作圓柱体。又如桌面、地板、天花板也尽管它們的質量不同，給予人們的印象，抽象出來的几何圖形都当作平面。又如直鋪的鉄軌、电綫、拉緊的繩子、从一个細孔透过來的太陽光綫，这一切給予人們產生的印象看作几何圖形上的直綫。再如一顆顆的細沙或者用鉛筆或鋼筆在紙上所画下的一点点的痕跡，給予人們的印象是抽象成几何圖形上的点。**而几何圖形也就是人們从实际經驗的積累，在自然界中不断的观察各种事物，將獲得的印象加以抽象概括而產生的，而面、綫、点就是構成一切几何圖形的基本元素。**

关於几何体，我們概括的說，**凡佔有空間有限的部分的几何圖形我們称之为几何体**。而几何体的界限，也就是几何体的外

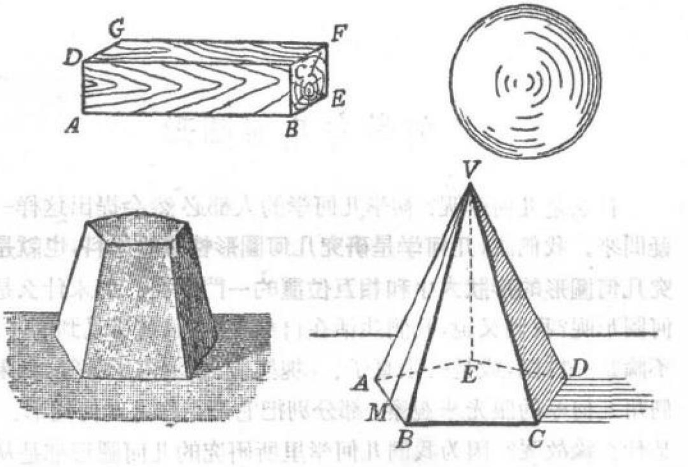

圖 1

表，我們称之为面，如圖 1 中木料及球的表面。而面的边界，就是兩个面的交界我們称之为綫，如 DC、CF 等。几何体上三条綫的交界也是三个面的交点我們称之为点，如木料之角頂 A、B 等。**而几何圖形是看作点、綫、面的集合。但是在客观物体中，只有体的存在，面、綫、点是依附於体而存在的，也就是說在客观实际中不可能有一个弧立的面，或綫，或点的存在。**例如那怕是很細小的一根头髮，它还佔有空間的一定部分，是一个圓柱体。

但是反过來講，**由於我們研究几何学是需要研究几何圖形的形狀、大小，和位置的，我們为了研究的需要，常將点、綫、面、体分別的研究，这並不是說它們是互不关联的，**因此我們又得着体、面、綫、点抽象的概念，所謂体除有一定的位置外，体是有長、寬、厚的。而面除开有一定的位置外，它只有長和寬。而綫只研究它的長度，当然綫同样仍有一定的位置的。而点認为只有一定的位置。但是这样抽象的說法与前面所說面、綫、点都只能依

附於体的存在而存在是否矛盾呢？我們認为並不矛盾，也並不脫离实际的，这只不过是一个問題的兩个方面。从实际的客观存在來講，面、綫、点都只能依附於体而存在的。但我們研究几何圖形的目的在於了解各种几何圖形的性質及其变化規律，進一步运用它和掌握它以解决生活实际和生產实踐中的問題，因此我們抽象的將几何圖形自成一个理論系統予以研究，目的在於更好地指導和推动实踐。例如矩形的檯子、櫈子、玻璃等我們只抽象的研究其表面矩形的性質，我們了解和掌握了矩形的性質以后也能適用於一切表面为矩形的物体了。因此几何学其所以成为抽象的学科，其作用和精神也在於此。

不僅几何学是具有抽象性，就是以前我們学習算術，研究整数及分数的性質及其四則运算，同样是具有抽象性。我們只研究这个数及其运算，但是不管这个数是表示什么东西；相反的說，如果我們掌握了某一种运算法則是適合於客观实际中任何量的計算。这正如恩格斯說：“数和形的概念不是从任何地方得來，而僅僅是从現实世界中得來的。……和数的概念一样，形的概念也完全是从外面世界得來的，而不是在头腦中从純粹的思維中產生出來的。要能达到形的概念，先应当存在具有一定形狀的物体，而且应把这些形狀拿來比較。純粹数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的，这些資料表現於非常抽象的形式之中，这一事实只能表面地掩盖它的來自現实世界的根源。可是为要能够在其純粹狀态中專研究这些形式和关系，那么就必須完全使它們脫离其內容，把內容放置一边作为不相干的东西；这样我們就得到沒有面積的点，沒有厚度和寬度的綫，……”①

在中学里，所研究的几何学僅限於初等几何学，**在初等几何**

① 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社 1956 年版第 37－38 頁。

学的范疇又分为平面几何与立体几何；立体几何是研究空間圖形性質的学科，而平面几何是研究平面上几何圖形性質的学科，也就是將一个物体的表面抽象的在一个平面上來研究。因此構成平面上的几何圖形只有点和綫的兩个元素，也就是由点与綫所集合起來形成的各种几何圖形；而空間的立体几何圖形是由面、綫、点三个元素的互相集合而成的。顯然我們只有先从平面几何的概念着手才能進一步研究空間圖形的立体几何，因此我們先学習平面几何也为了進一步研究立体几何打好基礎。

形成平面几何的圖形是只限於直綫与圓弧所構成的几何圖形，其他性質的曲綫圖形就不屬於平面几何研究的对象了。

在整个几何史上，人們知道从客观实际中抽象成几何圖形从而研究其圖形的性質，也同其他的科学一样是由於社会的生產需要而發生和發展的，在这里我們有談談几何学的歷史淵源的必要。

談起几何学，使我們联想到埃及尼罗河的故事。埃及是一个古老的國家，境內有一条著名的尼罗河，河的兩岸土地肥沃，物產丰富，因此使埃及成为西洋文化的發祥地。相傳在 4000 多年以前，尼罗河每年有定期的泛濫，水漲时沿河兩岸的土地淹沒，水退后，河床变易，陸标流失，沿河兩岸土地界限不明，为了划分土地，时常發生糾紛。当时埃及的劳动人民，为了明确自己耕地的大小，消除这种無謂的糾紛，因而从实际劳动經驗的累積中發明了簡易的田地測量法。他們繪好了自己耕地的形狀，用步伐測出它周界的長度，以作为划分土地的依据，由於这种原始的面積測量及地形圖繪制的經驗不断的累積和不断的提高，因而得出了各种的几何圖形，產生了初步的几何学。約在 3800 年前，埃及有一个傳教士名叫阿默斯，他將許多埃及劳动人民簡易測量及繪制耕地圖形的經驗彙集起來，錄在一本手抄本上，这本

手抄本在几何学的歷史上称为有名的阿默斯手册。在这手抄本上除了錄有測量面積的几何圖形以外，还有当时埃及劳动人民無比智慧和創造性劳动的金字塔的几何形体的圖形。后來希臘与埃及經济交流，希臘人泰勒斯到埃及經商，他很喜欢埃及的文化，便留居学習，不久就勝过了当时統制知識的埃及教士們，將埃及只有零星实际問題的几何学，提高發揮加入一些遍普性的公理和定理，由於埃及与希臘經济的交流，埃及的文化也随之流入希臘，当时几何学成为一切学術工作者的必讀学科。如大哲学家柏拉圖便在門上寫道"不学几何学的人，請勿入此門，"他們認为学習几何学是培养邏輯思維能力很好的方法。在公元前338年，希臘人欧几里德在埃及亞力山得里亞大学教課，为了教材的需要，將埃及与希臘的几何学組成了有系統的学科。他当时編寫了一本有名的几何学原本，这本書共分15卷，其中1、2、3、4、6卷均系关於平面几何学的內容，第5卷討論一般的比例圖形，第7、8、9卷系关於算術方面問題，第10卷討論直綫上的点，最后5卷系討論立体几何学問題，我們現行中学几何教材，就是欧几里德几何学。

关於几何学的發生和發展与实际生產需要面積測量的关系，我們又可以从几何学这个名詞的來源得到有力的証明。在埃及称几何学为γη(地)μεγρεω(測量)。而几何学流入希臘以后希臘人称几何学为γεωμερια，也是地——測量的意思。后來再譯成拉丁文称为Geo-metria，同样是地——測量的意思。再譯成英文称为Geo-metry，如果拿中文直譯是量地学的意思。我們称之为几何学系由於在明朝的时候有一个宰相名叫徐光啓(公元1631年)，他当时很喜欢研究天文数学，并从当时在我國傳教的意大利人利馬竇学習西洋的科学文化。他当时翻譯了欧几里德几何学英文本，并將英文Geo-metry的前三个文字Geo

拼音譯成漢語几何之音，因此我們称为几何学之名系由此而來。

我們自己的祖先也很早累積了許多几何学的知識，这些几何学的知識也同古代埃及人一样由於实际的生產劳动中有進行面積測量的需要而累積起來的。如夏禹治水，商高和陈子測日景，得出了运用直角三角形中边長之比为 3:4:5 或1:1:$\sqrt{2}$时斜边上所作正方形面積等於兩直角边所作正方形面積之和从而導出了勾股定理；又如据考据黑陶文化时期(約紀元前10000年)的陶器花紋就有菱形、正方形和圓內接正方形等圖案；又如在墨翟的著作中（紀元前 480—390 年）就有許多有关几何圖形之类的知識。我們祖先这些傑出的研究，对整个几何学及其他科学的發展來講，同样有很大的作用。

由此看來，几何学既然是由於社会的生產需要而產生和發展起來的，整个几何学是体現了人类从事於生產劳动中積累的經驗，因此我們学習并研究几何圖形的性質、掌握它們的变化規律，其目的在於运用它以解决实际問題，如進行实际的面積測量和改進生產工具提高生產力等等。也就是使我們掌握这些实际的基礎知識能更好的为生產建設服务。在实际的劳动生產中就有許多关於几何圖形的实际問題。在建筑工程与物理学上与几何知識有不可分割的关联，例如鉄道轉灣处、交叉处的設計，桥樑隧道的修建等等都須有几何学的知識。又如進行農業規划、提高單位面積的產量及發展集体農庄，都需要运用几何知識來正确的測量耕地的面積。再如工業基本建設中对厂房的修建、地形的勘測也都首先需要測繪几何圖形。又如我們常听到在今天社会主义工業建設中安裝机器如要求一顆地脚螺絲的誤差不能相差一根头髮絲直徑的八分之一，这也要求我們对几何圖形須有精确的計算。其他我們在日常生活中甚至对环境的佈置如何才能美观这也需要几何圖形对称的概念等等。从这里我們可以

看到几何学的实际用处。此外几何学如同算術一样对培养我們邏輯思維能力有很大的作用，所謂邏輯思維就是科学的思想方法，用辯証的观点來分析問題。这个任务是通过課内学習課外作業的計算、証明、作圖。及測量实習來不断的培养的，而且在几何課程比其他的一般数学課程更为顯著，这是由於几何学它本身抽象性更突出的緣故。

关於几何圖形，我們在初一階段学習簡單的面積和体積計算的时候，已接触到一些，对初二学生來講，并不是陌生的。因此我們在开始講几何圖形的时候，就可以从初一算術課本中講过的一些几何圖形，或者从課堂内客观存在的物体來說明，通过这些感性的直观教学，对初学几何的人來講，是非常有益的。

定义、公理——移形公理合同公理

我們知道几何学是抽象的研究客观物体表面的形狀大小及位置等性質的学科，但是为什么几何学会独立的自成一个体系的学科呢？这是由於几何学通过邏輯推理的手段而將几何圖形的性質系統的組織而成为一个理論体系。如欧几里德將埃及零星的几何知識組成为有系統的学科，直到今日几何学有很大的發展，也就是借助於邏輯推理作为手段。几何圖形來自於客观实际，但在研究圖形性質的过程中表面上好像离开了客观現实着重於邏輯推証，而实質上与現实生活中的一切事物在緊密的結合互相参証以指導我們对現实進一步的認識和了解，所以邏輯推理在几何学的研究中佔有極其重要的作用。

什么叫做邏輯推理呢？我們平常分析某一种事物的現象，总是先分析它的發生的前因，最后才得出这事物現象的后果；也就是**从已知的具体的条件出發，而推導出未知的抽象的結論。这种从已知到未知，从具体到抽象的推理方法而導出最后終結的正确的过程，是符合於辯証的科学的思想方法，我們称之为邏輯的推理。** 我們整个数学各科都貫穿了这个精神，但在几何学來講更为顯著。因此我們通过数学的学習，能積極的培养我們邏輯思維能力，無怪乎人們說数学是鍛鍊思想的体操，其意义就在於此。

我們平常分析某一种事物的現象，从前因逐步推導后果的过程中，常借助於一些法則（如風俗、習慣、气候等等）作为立論的根据，因此几何学進行邏輯推理同样也不能缺少立論的根据，

它常借助於說明某些几何圖形性質的定义和公理作为推理依据的，也正如恩格斯說："数学上的所謂公理(Axiome)是数学需要來作为其出發点的少数思想規定。"①

什么叫做定义呢？就是用一种判断性的語言反映某一种事物的关系，而这种判断性的語言有制約性的只說明一个名称或術語的意义，我們称之为定义. 例如在算術里对於加法的定义是："从两个已知数求出它們的和的运算"，而这个"从两个已知数求出它們的和的运算"是一句判断性的語言，說明了加法的定义．又如"平面几何学是研究平面上的圖形形狀大小及其位置等性質的学科"，这句判断性的語言說明了平面几何的定义．再如"点只有位置沒有長短厚薄和寬闊等性質"，这是几何学上对点的定义．

什么叫做公理呢？当用一种判断性的語言來說明某一种事物的規律，这种眞理是为大家所公認不加証明就能确定它的成立的叫做公理. 譬如我們人走路总認为走直路近而走弯路远，为什么知道走直路近而走弯路远呢？这是經过人們無数次的生活实踐累積的經驗而公認的，因此我們对於公理的定义又可以简明的說："**凡是不加証明而采用的眞理謂之公理**"．这里所謂不加証明是很难以進行推理的証明，而只有經驗的積累和实踐的証明，由於千百万劳动人民生活实踐与生產实踐中不断的經驗積累而公認因此称为眞理．所以公理的正确与否看它能否与客观实踐相符．实踐就是眞理的标准，过去有些資產階級学者如康德(18世紀)等人說："公理是先天的与現实無关"．这种說法顯然是錯誤的、唯心的．

在数学里有適用於数学各科的公理称为数学公理，也有只適用於几何圖形性質的公理特称为几何公理，当几何公理中專

① 恩格斯："辯証法与自然科学"，人民出版所1951年版，第121頁．

应用於几何作圖方面的公理又称为公法(或公設)。

我們研究几何圖形的性質，如果沒有定义和公理作为基礎，那末抽象的邏輯推理是沒有依据的，这样就不可能有自成为一理論体系的几何学存在。因此定义和公理在几何学中佔有極重要的地位。而几何圖形性質中首先采用的公理是移形公理和合同公理。

什么叫做移形公理呢？移形公理是：如果平面上有一点 A，我們將 A 这点在这平面上任意移动，如果当 A 点移动时它的方向、时間、距离、速度都是一定时，顯然我們在这平面上可以得到对应 A 於的一点 A_1。如果我們命 A 点移动时，它的方向、时間、距离、速度都是一定用 S 來表示，則可以得到 $A_1=SA$。在这里須注意当方向、时間、速度、距离都是一定时，A 点移动后在这平面上对应於 A 点的 A_1 点是唯一的。如果是一条直綫 b 在一个平面上移动而它的方向、时間、速度、距离也是一定时，同样可对应的得到一条直綫 b'，而 $b'=Sb$ 的。同样对於一个平面 P 在空間移动，它的方向、时間、速度、距离一定时，則必有对应的一个平面 P'，卽 $P'=SP$。对於一个几何体 A 在空間移动，它的方向、时間、速度、距离一定时，則必有对应的一个几何体 A_1，卽 $A_1=SA$。这也就是說**对於任何一个几何圖形，如果將它移动变換到另一个位置上而成为另一个几何圖形，虽然它的位置改变而它的形狀大小都不会改变，它还是与原來位置上的几何圖形一样的。像这种"几何圖形可以移动位置而不会变更其形狀大小"的性質是適合於任何几何圖形的，我們称之为移形公理。**如圖 2 中三稜錐 A 从甲位置移动到乙位置以后为三稜錐 A_1，而 A 与 A_1 兩个三稜錐的形狀大小完全相同的，实际上三稜錐 A 就是三稜錐 A_1，只不过位置变化而已。

但我們須注意到，凡几何圖形可移动位置而它的形狀大小

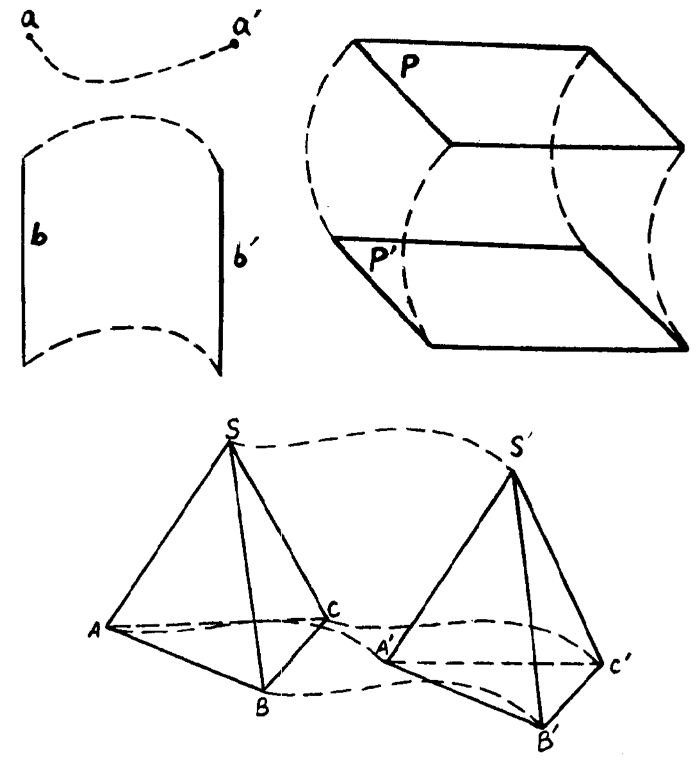

圖 2

不变的公理，并不能說明客观存在的物体也都具有这个性質。例如拿了一塊固体的冰放在火爐边，則原來固体狀态的冰融化而成液体的水了。又如我們不小心將一只鷄蛋由桌面上跌到地下，則鷄蛋壳受到振动而破裂，它的形狀也起了变化。从这些例子可以看出，对於客观物体，如作为一个普遍性的眞理的移形公理來說，它是不適合的，因为如作为一般物体的公理就須能代表所有物体都具有这样的性質。但我們要問这条公理如何來的呢？它

是否脱离实际呢？我們說它并非脫离实际的。几何圖形是从客观物体中抽象而來，在几何学里是只抽象的把它們表面的形狀大小位置來作为研究的內容。但一般物体除了具有这些形狀大小位置等表面性質以外，还有物理性質及化学性質等。因此几何体就不同於是物体。几何体及其他几何圖形有它独立的只反映形狀大小位置等性質的公理存在，而一般物体如果不研究其物理性質这条公理也能適合的。实际上这条公理本身仍然是从客观存在中不断的观察和經驗的積累。因为一般物体在物理变化微小或沒有的情况下若变更它們的位置，而形狀大小不会变更的。例如，一只茶杯从甲桌上移放至乙桌上，只它將它放好，它的形狀大小决不会改变的；如果不小心將茶杯跌在地下則由於茶杯受到強烈振动的物理变化，以致破碎，才会改变它的形狀。

关於移动的概念，在研究几何圖形的性質中同样佔有很重要的地位。通过动的概念才能進一步發現和了解几何圖形的性質及其变化的規律；也才能使抽象的几何学有丰富的內容。这些我們在后面討論各种平面几何圖形性質中將会逐步提及的。

由於几何圖形有移形公理的存在，因此我們通过移形公理又得出合同公理的性質。

什么叫做合同公理呢？若 F_1 表示一个几何圖形，如果將圖形 F_1 通过运动变換到圖形 F_2，則圖形 F_1 称为合同於(或称为符合於)F_2。这种合同的关系我們通常用≅的符号來表示的，因此可寫作 $F_1 \cong F_2$。

但是几何圖形的合同，又具有下面三个基本的性質：

1. 凡任何一个几何圖形总是合同於它的本身。这是什么意思呢？就是圖形 F_1 移动位置以后，它的形狀大小不变，即 $F_1 \cong F_1$，这种性質我們称为圖形的相互性。

2. 若有兩个几何圖形，当第一个圖形 F_1 合同於第二个圖形