USTC 中国科学技术大学 21世纪教改系列教材

分形原理及其应用

FENXING YUANLI JIQI YINGYONG

孙 霞 吴自勤 黄 昀/编著

中国科学技术大学出版社

分形原理及应用

孙 霞 吴自勤 黄 畇 编著

中国科学技术大学出版社

2003 · 合肥

图书在版编目（CIP）数据

分形原理及应用/孙霞，吴自勤，黄畇编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2003.10

ISBN 7-312-01606-5

Ⅰ．分… Ⅱ．①孙… ②吴… ③黄… Ⅲ．①分形理论 ②分形理论—应用—分子生物学 ③分形理论—应用—金融投资—分析 Ⅳ．O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 057841 号

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026，发行电话：0551-3602905，3602906）
合肥义兴印务有限责任公司印刷
全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm 1/32 印张：8.75 字数：227 千
2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—3 000 册
ISBN 7-312-01606-5/O・274 定价：15.00 元

前　言

自然界是复杂和美丽的。过去由于理论计算和实验技术的局限，科学家们无法对自然界做完美的描述；传统的科学只能把复杂的问题简化成为一个线性问题来研究。对自然界中出现的非线性现象也只能按线性理论作一定的微扰处理。经典物理学中的牛顿力学可以精确计算太阳系行星的轨道并且准确预测日蚀和月蚀的时间，所以经典科学被公认为是一门决定论的科学。只要科学规律准确、初始状态被精确测定，随后的状态就可以完全地确定下来。

20 世纪 50~60 年代以来，情况发生了变化，非线性科学及相应的复杂性研究开始成为前沿的研究领域。首先，通过描述浅水波运动的非线性偏微分方程的求解发现了孤子（soliton）。其次，在气象等非线性动力学过程的计算机求解中偶然发现了混沌（chaos），即在两次同样初始条件下的计算中逐渐出现差异很大的曲线。这就是说，一个决定论系统可以引起显著的无规涨落。混沌中类似随机现象的根源是非线性方程中不断分岔所引发的初值敏感性，因为实际上很难对初值确定得非常精确，于是近似相同的初值在随时间演化过程后给出了很不相同的貌似随机的结果。初值敏感性又被通俗地称为“蝴

蝶效应”，它表示在一个地点的蝴蝶扇动翅膀引起的气流变化会在另一个遥远的地点引起一场暴风雨。初值敏感性导致过程的不可预测性。混沌过程在相空间的轨迹非常复杂，它们可以无限地不断发展，愈来愈细化并且从不交叉，形成非常复杂的图形，需要用分形（fractal）理论进行表征。混沌在自然界中普遍存在，如湍流、生态竞争、金融市场价格的波动等。包括混沌、分形、孤子的非线性科学是线性科学的重大发展。

由于计算技术和计算机图形学的进展，分形几何得到了迅速的发展。分形这个名词是 Mandelbrot 在 20 世纪 70 年代为了表征复杂图形和复杂过程首先将拉丁文 Fractus 转化后引入自然科学领域的，它的原意是不规则的、支离破碎的物体。一般英语辞典中有一个相近的词 fracton，其意义是碎片或分数。

在分形名词使用之前的一个世纪，一些数学家就研究过不少奇异的、不光滑的集合，如 1872 年 Weierstrass 提出了一种处处连续、处处不可微的 Weierstrass 型函数；1883 年 Cantor 提出了 Cantor 集；1890 年 Peano 构造成一个能填充平面的 Peano 曲线；1904 年 Koch 提出了 Koch 曲线；1915 年 Sierpinski 提出了 Sierpinski 缕垫和海绵等。这些都属于规则的分形图形，它们是数学家按一定的规则构造出来的、具有严格的自相似性的分形图形，它们都属于自相似分形集。

1913 年 Perrin 对变换无穷的布朗运动轨迹进行了深入的研究，明确指出布朗运动轨迹不具有导数。自然界

的许多事物，如连绵起伏的山峦轮廓线；四通八达的江海河川；蜿蜒曲折的海岸线等等也具有不光滑性和不规则性。它们和几何学中的规则图形是不同的，这表现在对它们进行测量时，其被测值（如长度、面积、体积等）的大小一般随测量尺寸的变化而发生着变化，在一定测量范围内两者间存在着幂函数关系。为了测量这些集合，1915 年豪斯道夫（Hausdorff）引入了豪斯道夫维数的概念，这类统计自相似性图形和曲线的豪斯道夫维数一般都不是整数，而是一个分数值。20 世纪 20 年代到 70 年代，维数理论得到了进一步的发展，引入了多种不同定义的维数使分形理论初具雏形。但这些研究大多局限于纯数学领域，基本上没有在其他学科中得到应用。

Mandelbrot 在 1977 年出版了《分形：形状、机遇和维数》（Fractal: Form, Chance and Dimension）一书，1982 年又出版了《自然界的分形几何》（The Fractal Geometry of Nature）一书。在这两本书中他将分形的理论及应用推动到一个全新的阶段。在这个阶段中分形理论本身得到迅速的发展、并得到科学界的广泛重视，同时在物理学、化学、生物学、地学、材料科学、表面科学、纳米科学乃至经济学等广泛的领域得到了应用。

非线性科学的一个主要任务是研究自然界的复杂性，目前一般认为，孤子、混沌和分形是非线性科学的主要组成部分。随着研究工作的开展，它的内容在不断地扩大，神经网络、元胞自动机、复杂系统等都包含在非线性科学内。非线性科学现在还是一门正在发展中的

科学分支。本书主要介绍与分形有关的部分。

从 1980 年起分形及其应用在我国得到重视，黄畇、姚凯伦等开始在“物理”杂志上介绍分形，有几所高校开始设置分形课程，到 80 年代末，国内开始出现混沌和分形的专著。1990 年格莱克著、张淑誉译、郝柏林校的《混沌开创新科学》出版，1993 年郝柏林主编的非线性科学丛书出版，其中有郝柏林的《从抛物线谈起——混沌动力学引论》（1993 年），杨展如的《分形物理学》（1996 年）等。1992 年赵凯华、朱照宣、黄畇在北京大学举办了非线性物理讲习班并编印了《非线性物理导论》的讲义，一时在国内形成一个分形教学和研究的高潮。在此期间，中国科学技术大学基础物理中心也开展了分形的教学和研究工作，除邀请北京大学黄畇、中国科学院金属所龙期威来校举行分形讲座外，吴自勤先后和辛厚文、郑久仁、孙霞还合作开设了“分形原理及应用”的研究生课。2000 年起，中国科学技术大学为提高学生的创新素质，开始为大学生开设研讨班课，我们开设了和计算机技术结合的“非线性科学中的分形”课。在研究工作方面，众多教师（张庶元、丁泽军、王晓平等）和研究生（张人佶、段建中、侯建国、李伯泉、巴龙、李华、王兵、王戴木等）完成的“薄膜中的分形晶化研究”和“固体中电子散射的 Monte Carlo 模拟及分形现象的研究”也分别得到 1997 年中国科学院自然科学一等奖和 1996 年国防科工委科技进步二等奖。开展的其他研究课题还有多重分形在超薄膜初期生长模拟、粗糙薄膜

原子力显微像表征和股市指数曲线表征中的应用。研究生（王兵、王衍、熊刚等）完成的“分形图像处理系统”软件也获得全国大学生发明大奖赛三等奖等。这本教材就是在这些分形教学和研究工作的基础上完成的。

由于我们的教学对象分别是各个专业（数学、物理学、化学、生物学、地学等）的硕士生和三、四年级大学生，因此，在本书中着重介绍分形和非线性科学中的一些基础知识、基础理论和它们的应用。对一些偏深的数学论证，一般都从简。在叙述上着重介绍物理概念和分形在实际领域中的应用。其目的是能使本书具有良好的可读性，便于各个专业学生掌握和应用。

本书的第一章简要地介绍混沌的基本概念、几个典型的混沌过程以及混沌过程引起的复杂性和自相似性，说明混沌和分形的关系。

本书的第二至第四章介绍分形、多重分形、自相似和自仿射分形的基本概念以及分维、分形谱的计算方法。对参考文献中出现的各种分形维数的计算方法做了介绍与比较，使读者能在科研应用中获得更多的信息和技巧。

本书的第五至第七章介绍几种和分形密切相关的模型。这里最著名的是扩散限制聚集（diffusion limited aggregation，DLA）模型、团簇-团簇凝聚（cluster cluster aggregation，CCA）模型和渝渗（percolation）模型。并结合一些实例对这些模型的物理图像、分形特征、实际的应用以及它们的局限性进行了讨论。

本书的第八到第十章介绍分形的一些应用。其中第

八章林氏系统利用分形可以由生成元迭代产生这一基本原理，在计算机上输入几条简单的规则就可以绘制出复杂优美的分形植物图形。迭代函数系统将确定性算法与随机性算法相结合，是模拟生物形态发生过程的成功的数学系统。第九和第十章利用分形和多重分形对基因的碱基序列、蛋白质的结构和复杂的金融数据作定量的分析和表征，得到的结果有参考价值，目前是分形应用研究的前沿课题。

最后在附录中对数值图像处理做了简单介绍，叙述了分形图像处理软件 FIPS 的功能和使用方法。FIPS 是本实验室编写的、用于分形计算的较为实用的工具软件，它包含了多种计算简单分维的方法及对二维、三维图形多重分形谱的算法。

本书在编写过程中与汪秉宏教授、陈慧平副教授做了多次有益的讨论，本书的出版得到了中国科学技术大学教务处的资助，在此特向以上个人和单位表示感谢。由于作者水平有限，书中不当之处敬请读者见谅。

编　者

2003.7

目　录

第一章　混沌和分形

第二章　分形和分维

第三章 多重分形

第四章　自仿射分形和分数布朗运动

第五章　分形生长

第六章　渝渗模型

第七章　元胞自动机

第八章 林氏系统和迭代函数系统

第九章 分形在生物大分子结构中的应用

第十章 分形在金融分析中的应用

附录　分形图像处理系统

第一章　混沌和分形

混沌与分形的关系十分密切，因此在介绍分形之前，需要先简单介绍混沌的基础知识，以便了解分形在混沌中的一些应用[1~5]。

混沌是一种确定性系统中出现的（或决定论规律所产生的）类似随机的过程。它首先是由 Lorenz（洛伦兹）[6]在流体热对流的简化模型的计算中观察到的。他当初（20 世纪 50 年代末）使用的是电子管计算机，速度很慢。他发现在同样条件下重复计算的气候结果起始时还一致，但经过一段时间后就出现了显著的差异。这种情况表明，由于非线性的 Lorenz 方程在长时间迭代过程中的分岔导致了结果的不确定性，所以长期天气预报必然失败。这就是说，一个决定论系统可以引起无规涨落，随机性不必由外界引入而可由系统内在的简单的确定的规律产生。1975 年李天沿和约克（Yorke）[7]首次在数学文献中使用“混沌”这一名词，用它来表示某些非线性函数的一维迭代（或映射）的类似随机的输出。

1.1　一维迭代 Logistic 方程

Logistic（逻辑斯谛）方程是一个很简单的非线性的抛物线函数，它可以表示为：

$$y=\lambda x(1-x),\quad (0\leqslant x\leqslant 1\quad 0\leqslant \lambda\leqslant 4) \tag{1.1.1}$$

这个函数以 x 的值代入得到 y 后，可以用 y 的值作为新的 x

值得出新的 y 值，这样的迭代可以不断地进行下去，因此这个函数可以采用以下的迭代形式：

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (0 \leqslant x_n \leqslant 1 \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 4) \tag{1.1.2}$$

其中 x_n 是 n 次迭代时的值，x_{n+1} 是 $n+1$ 次迭代时的值。这里迭代前后的值都是 x 值，n 次迭代得到的所有的值都可以在 x 轴上表示出来，因此它是一维迭代。这个迭代过程是通过抛物线函数把 x_n 变换（或映射）成 x_{n+1} 的过程，所以它常被称为 Logistic 映射或抛物线映射。

这个公式可以变换成以下的更简单的形式：

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^{\,2}, \quad (-1 \leqslant x_n \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 2) \tag{1.1.3}$$

文献中这两个公式都在使用，我们使用前一个公式。

前一公式中的 λ 是重要的决定系统迭代过程性质的参量，λx 为线性项，λx^2 为非线性项。这个公式很早就被 May（梅尔）用于年度生物种群数量的模拟[8,9]。他发现非线性参数的改变，不仅影响着平衡时群体的数值，而且还影响群体是否能够实现平衡。

迭代过程可以通过作图来表现。首先作 $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ 曲线，得到图 1.1 中的 x_n 值处于 0 和 1 之间的各个抛物线，λ 愈大，抛物线愈高。在我们限定的范围内，抛物线的最高值是 $\lambda = 4$，$x_n = 0.5$ 时得到的 x_{n+1} 是 1.0。图 1.1 中的四张图的 λ 分别为 0.8，2.5，3.1 和 3.8，均小于 4，x_n 和 x_{n+1} 轴的最大值都取为 1.0。在 $\lambda = 0.8$ 时，沿 x_n 轴取一个起始点 x_0（如 0.4），向上画一条直线到与抛物线相交，从 x_{n+1} 轴上得出结果值 x_1（如 0.192），用这个新值作为下一步的迭代值，这相当于图上向左的水平线和 45°分角线相交。接着，图中向下的垂直线和抛物线相交，这相当于从 x_{n+1} 轴上得出 x_2 值进行新的迭代。由于每一个 x_{n+1} 值都要反馈给同一个函数作为新的输入实现迭代，这样的水平线和垂直线就不断向左、向下延伸，最后趋向于 0，如图所示。由图可见，在