吴孟达 李志祥 宋松和 编著

数学分析

上册

国防科技大学出版社

数　学　分　析

（上　册）

吴孟达　李志祥　宋松和　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内容简介

本书按“理工结合培养模式”要求而编写，注意引导学生用直观想象、类比、归纳及分析等常用的数学思维方法，理解和解决数学分析及其应用中的问题。主要内容：上册共九章讲述一元微积分，下册讲述多元微积分、级数论和常微分方程。本书可供高等院校数学专业、应用数学专业和对数学要求较高的工科专业作教材或参考书。

国防科技大学出版社出版发行

电话：(0731)4572640 邮政编码：410073

E * mail: gfkdcbs@ public.cs.hn.cn

责任编辑：潘生 责任校对：肖滨

新华书店总店北京发行所
湖南省新华书店 经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787 × 1092 1/16 印张：16.25 字数：319 千

2002 年 9 月第 1 版 2003 年 11 月第 2 次印刷 印数：1501-3000 册

*

上下册全套定价：46.00 元

前　言

本书是作者按“理工结合培养模式”要求而编写的。作者认为,无论是就数学、物理、力学等理科学科或是就应用光学、电子工程、计算机工程、机电工程、自动控制、航空航天等理论性较强的工程学科而言,高素质科技人才的标志是:他们不仅掌握基本的数学知识,而且能够理解数学家们在创造数学理论的过程中所体现出的思想、观点和方法。后者不仅是发展数学理论所需要的,而且也是应用现有的数学理论、学习新的数学理论所必备的。数学思维方法的传授,应该是数学教学的主要目标。

本书分为上、下册。上册的前八章包括了一元微积分的主要内容,其中的极限部分主要用几何直观的方法进行介绍,而在不定积分的计算部分增加了求解常微分方程的变量分离法,对定积分的概念和应用的介绍则强调了微元法的思想,这样的处理与物理课程能较好地衔接,而且也适合大学新生的特点。这一部分内容大约需要 80 学时。在学生学习了如何对数学概念和理论进行直观想象和应用以后,第九章将引导他们将这种思想转化为严谨的数学语言。这一章将需要 30 学时。

下册包括多元微积分、级数论以及常微分方程三个部分,其中多元微积分部分使用了少量线性代数的知识来处理向量值函数,故不仅节省了课时、突出所研究的问题的本质,而且为讲授“类比法、归纳法”等基本数学思维方法提供了材料,对学生熟悉代数理论以及进一步学习泛函分析则更有好处。本书含有一些涉及微分方程的内容,教师可根据不同的教学计划进行取舍。下册的全部内容共需要 130 学时。

如果将涉及微分方程的内容全部剔除,则本书的讲授学时约为 220 学时。

本书(及其所配备的 Powerpoint 课件)可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教材,也可供对数学理论要求较高的工科专业选用。

作者
2002 年 8 月
于国防科技大学

目　录

引　言 …………………………………………………………………… (1)

第一章　变量与函数 …………………………………………………… (9)

§1.1　实数集　绝对值 …………………………………………… (9)
§1.2　变量与函数 ………………………………………………… (13)
§1.3　基本初等函数　初等函数 ………………………………… (20)

第二章　极限的概念与基本性质 ……………………………………… (25)

§2.1　极限的概念 ………………………………………………… (25)
§2.2　极限的一些基本性质 ……………………………………… (36)
§2.3　无穷小与无穷大　阶的比较 ……………………………… (47)
§2.4　函数的连续性 ……………………………………………… (53)

第三章　导数与微分 …………………………………………………… (59)

§3.1　导数的概念 ………………………………………………… (59)
§3.2　求导法则 …………………………………………………… (70)
§3.3　微分的概念 ………………………………………………… (77)
§3.4　高阶导数与高阶微分 ……………………………………… (86)

第四章　微分中值定理与 Taylor 公式 ……………………………… (92)

§4.1　微分中值定理 ……………………………………………… (92)
§4.2　不定式的定值法 …………………………………………… (102)
§4.3　Taylor 公式 ………………………………………………… (107)

第五章　微分学的应用 ………………………………………………… (116)

§5.1　最大最小值问题 …………………………………………… (116)
§5.2　函数作图 …………………………………………………… (122)
§5.3　求解非线性方程的 Newton 切线法 ……………………… (127)
§5.4　曲线的曲率与密切圆 ……………………………………… (131)

第六章　原函数与不定积分 …………………………………… (137)

§6.1　原函数的概念　基本积分公式 ………………………… (137)
§6.2　不定积分中的换元法、分部积分法……………………… (144)
§6.3　有理函数的积分、解微分方程的分离变量法………………… (153)

第七章　定积分 ………………………………………………… (163)

§7.1　定积分的概念与基本性质 ……………………………… (163)
§7.2　微积分学基本定理 ………………………………………… (173)
§7.3　定积分的分部积分公式、变量替换公式…………………… (180)

第八章　定积分的应用 ………………………………………… (191)

§8.1　平面图形的面积 …………………………………………… (191)
§8.2　体积的计算 ………………………………………………… (197)
§8.3　曲线的长度 ………………………………………………… (199)
§8.4　力矩和重心的计算 ………………………………………… (203)

第九章　分析基础 ……………………………………………… (206)

§9.1　数列极限的定义 …………………………………………… (206)
§9.2　数列极限的一些基本性质的证明 ………………………… (212)
§9.3　收敛原理 …………………………………………………… (219)
§9.4　函数的极限 ………………………………………………… (225)
§9.5　闭区间套定理、聚点原理及有限覆盖定理………………… (231)
§9.6　有界闭区间上的连续函数的性质 ………………………… (238)
§9.7　连续函数的可积性 ………………………………………… (245)

参考文献………………………………………………………… (251)

引　言

微积分是继 Euclid 几何之后,数学科学中的一个最大的创造,它对自然科学以及数学科学中其他分支的影响,超过了所有其他的数学学科.微积分是从 17 世纪兴起的、现在叫做分析学的庞大的数学分支的开端.虽然它的一些思想起源可以追溯到公元前三世纪,但微积分的创立,首先是为了解决 17 世纪主要的科学问题而引起的.

为叙述方便起见,这里把作为微积分学起源的科学问题分为以下三种主要类型:

第一种类型的问题是:求曲线的切线;已知 $s=s(t)$表示物体移动的距离 s 与时间 t 的依赖关系,求物体在任一时刻 t 的速度 $v(t)$和加速度 $a(t)$;求函数的最大值与最小值.

第二种类型的问题是:已知物体的加速度 a 与时间的依赖关系 $a=a(t)$,求速度 $v(t)$和距离 $s(t)$.显然,这种问题相当于第一类问题的反问题.

第三种类型的问题是:求曲线长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一质点上的引力.

这里提到的问题中,有些问题(例如求曲线的切线的问题)似乎是纯几何问题,但它们同时也对于科学应用具有巨大的重要性.例如,在 17 世纪,光学是非常重要的科学研究.而要研究光线通过透镜的通道,就必须知道光线射入透镜的角度以便应用折射定律.我们都知道,重要的量是光线与曲线的法线之间的夹角.由于法线是垂直于切线的,所以问题就归结为求出切线.

以上这些问题看起来是互不关联的,但它们中却隐含着一类共同的数学问题.正是对这种问题的数学本质的研究推动了微积分学的产生和发展.我们将通过例子来简要地说明微积分学所研究的基本问题以及研究问题时所使用的基本观点和方法.对于这里所涉及的各种概念,读者暂时只需了解它们的大意就行了,不必拘泥于它们的严格表述和细节.

首先,微积分中所用的基本方法是所谓**无穷小分析法**(又称为**极限方法**),这种方法的起源可以追溯到公元前三世纪的 Archimedes 的工作.我国古代数学家刘徽所提出的用圆内接正多边形推算圆面积的“割圆术”也属于这类方法.

例 1.“割圆术”　根据三角形的面积公式,对于圆内接正 n 边形,面积公式

为：$S_n=\frac{1}{2}l_nh_n$，其中 h_n、l_n 分别是正 n 边形的边心距和边长.

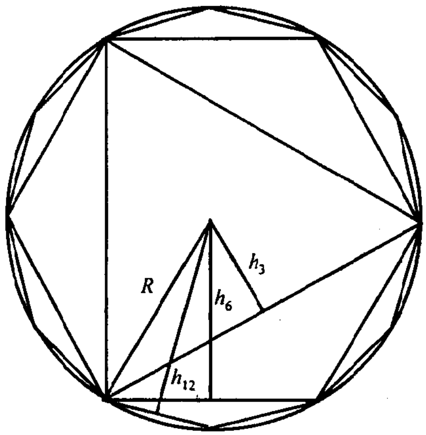

图 0-1

从直觉上看，随着边数 n 的增加，正 n 边形的面积应该接近于圆面积；与此同时，正多边形的边心距越来越接近于圆的半径，正多边形的边长越来越接近于圆周长.这也就是说，"在 n 趋于无穷的过程中，正 n 边形的面积无限接近于圆面积，且正 n 边形的边长无限接近于圆周长、正 n 边形的边心距无限接近于圆半径"，因此，圆面积应该是

$$S=\frac{1}{2}(2\pi R)R=\pi R^2.$$

例 1 中的作法，从几何的角度看是"**以直代曲**"(用正多边形代替圆)，随着边数的增加，被舍弃的那些弓形的总面积随之减少，因此，取极限得圆面积.而从计算的角度看，则是"**以近似值代替精确值**"，随着边数的增加，误差也随之减少，因此，取极限得精确值.这里，对近似值序列"**取极限**"的含意就是：让所考虑的过程无限延伸，从而得到近似值变化的最终趋势.

现在，我们来看看对第一类问题的处理方法.

例 2.求曲线 $y=\frac{x^3}{3}+C$ 在给定点 $M=(x,y)$ 的切线(其中 C 是任一取定的常数).

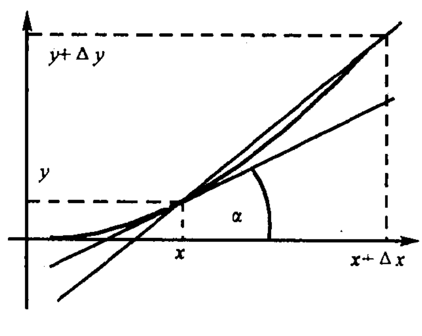

图 0-2

我们知道，只要求出过点(x,y)的切线斜率，则根据点斜式便可得切线的方程.

为此,先在曲线上点(x,y)的附近任取一点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$,过这两点作曲线的割线.割线当然永远不会与切线重合,两者的斜率也就不会相等.

但从几何上看,当点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$沿着曲线$y=\dfrac{x^3}{3}+C$无限接近于点(x,y)时,割线会无限接近于切线.从而以割线代替切线时,所产生的误差将无限减少.因此,在点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$的上述移动过程中,所产生的斜率误差也应该逐渐减少,而且会无限接近于零,即割线的斜率会无限接近于切线的斜率$\tan\alpha$.由初等数学可知,割线的斜率为

$$\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{3\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3}{3\Delta x}=x^2+x\Delta x+\frac{\Delta x^2}{3}$$

因此,点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$无限接近于点(x,y)(即Δx趋于零)时,割线的斜率无限接近于x^2.所以,曲线在点(x,y)处的切线斜率$\tan\alpha$应该是x^2.从而曲线$y=\dfrac{x^3}{3}+C$在给定点$M=(x,y)$的切线方程为

$$Y-y=x^2(X-x).$$

例2中的作法是,先求切线斜率的近似值(割线的斜率).然后,考察这种过程中近似值的变化趋势:如果近似值的变化趋势是无限接近于某个常数A、同时又知道误差无限减少,则A就是要求的精确值.从几何上看,这相当于先是"局部地以直代曲"(用割线代替曲线)得近似值,然后取极限得精确值.

例3.求自由落体的瞬时运动速度和加速度.　　根据物理学知识,作匀速直线运动的物体的速度是$v=\dfrac{s}{t}$,其中s表示物体所走过的路程,t表示所需的时间;而自由落体在时间t内所走过的路程为$s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$.

为了求得在时刻t处的瞬时速度,我们先求自由落体在时间区段$[t,t+\Delta t]$内的平均速度:$\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}g\dfrac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}g(2t+\Delta t)$.当$\Delta t$很小时,物体的速度在时间区间$[t,t+\Delta t]$内变化很小,物体的运动可以近似地视为匀速直线运动.在这段时间区间内,物体的平均速度就是物体在每一时刻的瞬时速度的近似值;当Δt无限接近于0时,平均速度无限接近于时刻t处的瞬时速度.因此,在时刻t处的瞬时速度是$v=\dfrac{1}{2}g(2t)=gt$.用同样方法,我们可以求得在任一时刻t处的瞬时加速度是$a=g$.

例3中的作法是,先求瞬时速度的近似值(即平均速度),以该近似值代替区间

$[t, t+\Delta t]$内任一时刻的瞬时速度(称为"以定代变").然后,取极限得精确值.对一般的运动 $s=s(t)$,也是这样去定义瞬时速度 $v=v(t)$ 以及瞬时加速度 $a=a(t)$的.

容易看出,尽管例 2、例 3 中所涉及的问题的来源很不相同,但它们都归结为一个共同的数学问题:对给定函数 $y=f(x)$,考虑当 Δx 无限趋于零时,比值

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的变化趋势,或者说,求这个比值当 Δx 无限趋于零时的极限值.对给定函数 $y=f(x)$求这种极限值的过程,我们称之为求函数 $y=f(x)$在 x 处的导数.这个导数当然是依赖于 x 的函数,我们称之为原来函数的**导(函)数**,记作 $y=f'(x)$.(按这种说法,例 2 证明了:对任一常数 C,函数 $y=\frac{1}{3}x^3+C$ 在任一点 x 处的导数是 x^2,即这个函数的导函数是 $y=x^2$;例 3 则证明了:函数 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 的导函数是 $v=gt$,而函数 $v=gt$ 的导函数是 $a=g$).

为了方便起见,我们称原来的函数 $y=f(x)$是这个新函数 $y=f'(x)$的**原函数**.(按这种说法,例 2 证明了:对任一常数 C,函数 $y=\frac{1}{3}x^3+C$ 都是 $y=x^2$ 的原函数;例 3 则证明了:函数 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是 $v=gt$ 的一个原函数,函数 $v=gt$ 是常数函数 $a=g$ 的一个原函数).总之,第一类问题就是:对给定函数 $y=f(x)$,求其导函数 $y=f'(x)$;而第二类问题则是:对给定函数 $y=f(x)$,求它的某个原函数(寻找函数 $y=g(x)$,使得 $g'(x)\equiv f(x)$).

对前述第三类基本问题,处理方法是与下面例子的方法是类似的.

例 4.计算曲线下的面积(曲线与坐标横轴之间的面积). 假若曲线 $y=f(t)$是平行于 x 轴的直线(设 $f(t)\equiv C$, $C>0$ 为常数),则此问题是简单的:区间长度乘以 C 就是曲线 $y=f(t)$下的面积.然而,右图中的这个曲边梯形是由曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 以及 x 轴上的区间$[0,1]$所围成的. 由于梯形的上边是弯曲的,我们不能用初等方法计算.

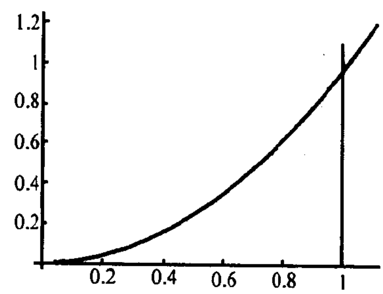

图 0-3

现在,我们把这个曲边梯形分割成等宽的小曲边梯形,然后再近似地把这些小梯形看

作矩形:这里,每一小矩形与相应的小梯形等宽,而小矩形的高度则取小梯形的左边的边长($y=x^2$ 在各小区间左端点的值).

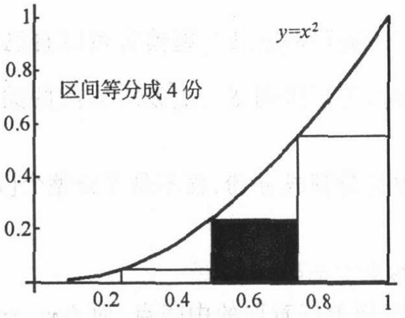

图 0-4

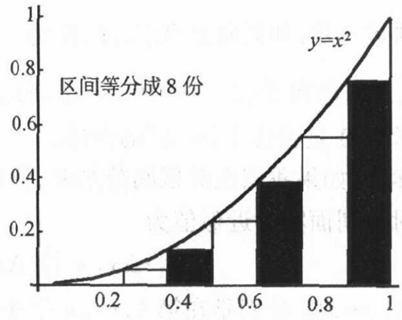

图 0-5

在这种"以直代曲"的意义下,曲边梯形的近似值为:

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].\quad(1)$$

从几何直观来看,随着分割的无限趋密,被舍弃的小曲边梯形的总面积(即误差)也随之减少.因此,只要考虑 S_n 的变化趋势,就可以知道曲边梯形的面积.利用前 n 个自然数之和的公式得

$$S_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}).$$

随着分割的无限趋密(即 n 无限增加,$\frac{1}{n}$ 趋向于零),S_n 趋向于$\frac{1}{3}$.因此,曲边梯形的面积应该等于$\frac{1}{3}$.

例 4 中的作法可概括为:分割,局部"以直代曲",再求和得近似值.由于在分割无限细化的过程中,近似值的近似程度无限增加,所以只要考虑近似值的变化趋势便可得到精确值.也就是说,让这个分割无限细化的过程无限延伸,如果近似值无限接近于某个常数,则此常数为精确值.亦即:在用特殊方法得到近似值以后,再用极限方法得到精确值.

实际上,在构造和式(1)时,我们还可以比例 4 考虑得更多一些:例如,我们可以将各矩形的高取成 $y=x^2$ 在各小区间右端点的值,则对新的近似值序列

$$\overline{S_n}=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

可得同样结论.由此可知,如果将各矩形的高取成 $y=x^2$ 在相应小区间上任意一

点的值,则所得的近似值序列$\widetilde{S_n}$满足:$S_n \leqslant \widetilde{S_n} \leqslant \overline{S_n}$,可见仍有近似值序列$\widetilde{S_n}$趋向于$\frac{1}{3}$.

再进一步,如果将区间[0,1]换为一般的区间$[a,b]$,则读者可以自己验证,S_n、$\overline{S_n}$及$\widetilde{S_n}$趋向于$(b^3-a^3)/3$.只是在这时,为了得到S_n、$\overline{S_n}$及$\widetilde{S_n}$之间的关系,还需要考虑0是否位于$[a,b]$的内部.

然而,如果我们在对区间分割时,仅仅是分割成n份,而不是等分整个$[a,b]$,则此时得到面积的近似值为

$$\xi_1^2 \cdot \Delta x_1 + \xi_2^2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + \xi_n^2 \cdot \Delta x_n \tag{2}$$

其中$\xi_1,\cdots,\xi_N$分别是在第$1,\cdots,n$个小区间上任意取的中间点,而$\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n$分别是第$1,\cdots,n$个小区间的长度.从直觉上讲,当分割无限加细时(从而n趋于无穷,且每个小区间长度趋于零),(2)式仍应该无限接近于$(b^3-a^3)/3$.不过由于各小区间的长度不等,用初等方法无法判断(2)式当分割无限加细时的趋势.

对给定函数$y=x^2$求形如(1)、(2)这种式子的极限的运算,我们称之为:在区间$[a,b]$上对$y=x^2$求"**积分**"(积分的含意也就是先分细再累加的意思).上述极限值被形象地记为$\int_a^b x^2\mathrm{d}x$,其中x^2称为**被积函数**,符号$\int$表示"求和",$\int_a^b$表示"在区间$[a,b]$上求和",$\mathrm{d}x$则代表上述和式中的那些小区间的长度.按这种记号,$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$自然就表示在区间$[a,x]$上对函数$f(t)$作与例2同样的运算所得的结果,即:令分割无限加细,对下列和式

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n \tag{3}$$

取极限,所得结果记成$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$(其中,诸ξ_k、Δx_k具有(2)中同样的意义).如果设在所考虑的区间上$f(t)>0$,则符号$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$的几何意义就是:$y=f(t)$对应于区间$[a,x]$的一段曲线与x轴所夹的面积.

我们现在可用简洁的数学语言来描述17世纪的科学家们所遇到的问题了:第一类问题是求给定函数的导函数(以后我们会看到,求函数的最大最小值的问题也与导数有关);第二类问题,则相当于求给定函数的原函数.如此说来,对第二类问题,人们除了要给出一般性的计算方法以外,还需要研究:对什么样的函数,它的原函数一定存在.而第三类问题是对给定函数$y=f(t)$求积分$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$,但根据上一段的叙述,这类问题的直接计算往往是困难的.

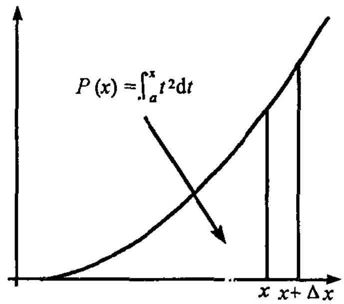

图 0－6

在 17 世纪，微积分学问题至少被十几位大数学家和几十位较之稍逊的数学家探索过，位于他们全部贡献的顶峰的是 Newton 和 Leibniz 的成就．为什么这样说呢？除了他们的其他贡献以外，原因就在于：Newton 和 Leibniz 分别独立地发现了导数和积分之间的联系，这一结果现在被称为**微积分学基本定理**．

以下我们就例 2 和例 4 的结果来叙述这个重要的结论：假定 $x\geqslant a$ 是任意一点，按照例 4 的做法，在区间$[a,x]$上，曲线 $y=t^2$ 下的面积是 $\int_a^x t^2\mathrm{d}t$．这个面积是随 x 而变动的，我们把它记作 $P(x)$，即 $P(x)=\int_a^x t^2\mathrm{d}t$．

如果我们仿照例 2 的做法，求这个**可变动的面积**$P(x)$在 x 处的导数，那么会有什么结果呢？这时，我们要计算的是：当 Δx 趋于零时，比值$\dfrac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}$的极限值．为方便起见，设 $\Delta x>0$ 而且 $a\geqslant 0$，则由图 0－6 可知，

$$m\Delta x<P(x+\Delta x)-P(x)<M\Delta x\ ,$$

这里 m,M 分别为函数$y=t^2$ 在$[x,x+\Delta x]$上的最小值和最大值(对函数 $y=t^2$，m,M 可以很容易地计算出)．由上式可得

$$m\leqslant\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}\leqslant M.$$

同样由图可知，当 Δx 趋于零时，m,M 都应该趋于 $y=t^2$ 在 $t=x$ 处的值 x^2．因此，可变动的面积 $P(x)=\int_a^x t^2\mathrm{d}t$ 对变量 x 的导数就等于被积函数的值 x^2．这个事实可用式子表示为：$P'(x)=x^2$．即：“**可变动的面积的导数等于被积函数**”．Newton和 Leibniz 的贡献在于：他们发现这个事实对更一般的被积函数也成立，即：对相当广泛的函数 $y=f(x)$，若 $P(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $P'(x)=f(x)$．这就是所谓**微积分学基本定理**．

这个定理的重要意义是什么呢？首先，为了计算积分 $P(x)=\int_a^x t^2\mathrm{d}t$，我们只要去找这样一个函数，它的导函数等于 x^2（即要去找已知被积函数 $y=t^2$ 的原函数）.由例2的结论，我们知道：至少有 $y=\frac{1}{3}x^3+C$ 是这种函数之一（以后将证明 $y=t^2$ 的原函数一定具有这种形式），即

$$P(x)=\int_a^x t^2\mathrm{d}t\equiv\frac{1}{3}x^3+C.$$

一旦找到了被积函数的原函数，则在上式中令 $x=a$，面积 $P(a)$ 当然为零，从而求出 $C=-\frac{1}{3}a^3$，即 $\int_a^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}a^3$.这就为计算积分提供了一种统一的、简便的方法.与我们在例4中使用的特殊计算方法比较，这一方法的优越性是非常明显的．其次，关于前面所提到的第二类问题的理论部分：什么样的函数 $y=f(x)$ 一定有原函数的问题，微积分学基本定理提供了解决方法.因为只要证明了积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，则 $y=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的导数就等于给定函数 $y=f(x)$，也就是说，$y=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $y=f(x)$ 的一个原函数.所以，由于 Newton 和 Leibniz 的贡献，微积分学所研究的问题就形成了一个整体，解决这些问题的的各种方法也就构成了一个完整的理论体系.

总之，微积分的研究对象是在自变量的某种变化过程中函数值的变化趋势.具体一点，用前面提过的术语来说，微积分的两个主要研究对象是函数的**导数**和**积分**.微积分研究问题时所用的基本观点和方法则如前述各个例子所表明的，可归结为**极限**方法.

第一章　变量与函数

§1.1 实数集　绝对值

在本课程中,我们所说的"数"指的是实数. 实数可分为有理数、无理数两大类. 实数可以用数轴上的点来表示. 对于任意一个实数 a,其**绝对值**的定义为:

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

实数 a 的绝对值的几何意义为:代表 a 的那个点到代表 0 的点(原点)的距离等于 $|a|$."绝对值"概念和性质在分析数学中有着重要的作用,读者可以在本书下册以及后继课程中学到如何将"绝对值"概念推广为更一般的点之间的"**距离**".绝对值的基本性质除了我们在中学代数中所接触过的,如

$$|a|\geqslant \pm a,\quad |a|=|-a|,\quad |ab|=|a|\cdot|b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},|b|\neq 0$$

以外,还有所谓"**三角不等式**":$|a+b|\leqslant|a|+|b|$,这是用来研究极限的最重要的绝对值关系式.读者可以通过讨论不等式两边式子的平方的大小关系来证明这个不等式,并判断等式成立的条件.

例 1.1.1　试利用三角不等式证明:对任意实数 a,b,下式成立

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

证明:由于 $a=b+(a-b)$对任意实数 a,b 成立,故由"三角不等式"得

$$|a|=|b+(a-b)|\leqslant|b|+|a-b|.$$

因此,对任意实数 a,b 成立

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{1}$$

由 a,b 的任意性,在此式中交换 a 与 b 的位置,可得到

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|,\text{即}|a|-|b|\geqslant-|a-b|. \tag{2}$$

因此,由(1)、(2)可知对任意实数 a, b 成立 $-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|$.证毕.

数集是一个常用概念.把一些实数放在一起构成一个集合,这个集合称为一个数集.例如,全体整数构成的集 **Z** 称为整数集;全体正整数构成的集 **N** 称为自然数集;全体有理数构成的集合 **Q** 称为有理数集,等等.通常可以把这些常用数集表示

为

$$\mathbf{N}=\{n \mid n=1,2,\cdots\},\quad \mathbf{Z}=\{x \mid x=1,\pm 1,\pm 2,\cdots\},$$

$$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q},p,q\in Z,q\neq 0\right\}.$$

如果数 x 属于某个数集 X,我们就记为 $x\in X$.例如,$0.5\in\mathbf{Q}$,$3\in\mathbf{N}$.应该指出的是:数集中的不同元素是不相等的,例如由实数 1,2,3,2 构成的数集是$\{1,2,3\}$而不是$\{1,2,3,2\}$.按这种说法,读者熟悉的“数列$\{x_n\}$”与“集合$\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$”的含义是不同的,因为后者隐含着“当 $m\neq n$ 时 $x_m\neq x_n$”.

在各种数集中,最常用的是各种**区间**.所谓“区间”,从几何的角度讲,指的是数轴的“一段”上全部点构成的点集;从数集的角度讲,指的是这些点对应的实数构成的集合.例如整个数轴就是一个区间,这是两头都没有限制的区间,记为$(-\infty,+\infty)$或$-\infty<x<+\infty$,后一种记法直接指明属于这个数集的元素 x 的性质.类似地,左边没有限制而右边有限制的区间有两种:$(-\infty,a)$(即$-\infty<x<a$)及$(-\infty,a]$(即$-\infty<x\leqslant a$);它们的区别是前者不包含右端点 a,而后者包含右端点 a.对于两头都有限制的区间,则可根据端点是否包含在区间内分为以下四种类型:

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},\qquad (a,b)=\{x \mid a<x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\},\qquad [a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}.$$

分别称之为闭区间、开区间、左开右闭区间以及左闭右开区间;若 $a=b$,则$[a,b]$表示一个单点集,而其余三种区间均表示“空集”(不含任何点的集合).

有时,我们还要用到**子集**的概念.如果一个数集 A 是另一个数集 B 的一部分,则称 A 是 B 的一个子集.例如,前面提到的 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的子集;$[a,b]$是$-\infty<x<+\infty$的子集.

另外,我们常常用“**点的邻域**”来描述“**某个点的附近**”这一概念:对于给定正数 δ,“x_0 的一个 δ-邻域”指的是下列开区间:

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

它是由所有那些与 x_0 的距离小于 δ 的点组成的集合.该区间习惯上简记为 $O(x_0,\delta)$.

我们常用“**点集**”这个几何意味更浓的说法来称呼一个数集.正如读者在中学课程中所知道的那样,确定了原点、方向和单位长度的一条直线称为一条数轴,此时一个实数对应于一个数轴上的点;而一个数轴上的点对应一个实数,故数轴上的点集与实数集被认为是同一个事物.

然而,点集这个概念的内涵实际上是更广泛的:我们常常把要研究的数学对象当成某个空间中的“点”,然后再利用直观想象的方法建立相关的数学理论.例如,

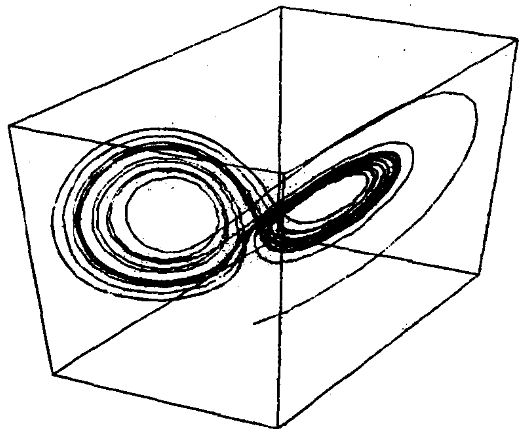

图 1-1-1

对于平面上的点集,我们把它与有序实数对(a,b)的集合等同起来:一个有序实数对(a,b),对应于平面上的一个点;而平面上的一个点,则对应于一个有序实数对(a,b)(它的第一个实数 a 是这个点的横坐标,第二个实数 b 是这个点的纵坐标).更一般地,对 n 个实数组成的有序数组$(a_1,\cdots,a_n)$,我们也称它为一个点;对于这种点构成的集合,我们称之为一个 n **维点集**.我们将在下册中研究这种点集上的微积分学.

图 1-1-1,是一个由计算机数学软件 Mathematica 生成的三维点集.它显示出 Lorenz 方程的任意一条解曲线的图像,这种解曲线的极限点构成的点集的数学本质(混沌)具有重大的科学意义和应用价值,是近几十年来科学家们一直在研究的重要问题.

当 $n>3$ 时,一个 n 维点集构成的图形当然是无法直接观察的,但我们却不能因此否认 n 维点集这个概念的重要意义.事实上,很多实际对象需要用 n 维点集来描述:例如,在时刻 t 飞机所处的空间位置就需要用四个参数(t,x,y,z)来描述;在时刻 t 飞机的运动状态往往需要用十个参数$(t,x,y,z,v_x,v_y,v_z,a_x,a_y,a_z)$,即时间、位置、沿各个方向的速度与加速度来描述.用 n 维点集来描述数学对象的好处是:我们可以借助于研究三维空间的概念、方法和理论以及直观想象来研究这种抽象的点集.

在数学的各分支中,各种不等式是极其重要的分析工具.在本节的习题中,我们给出了一些可以用数学归纳法证明的不等式,请读者自行证明.