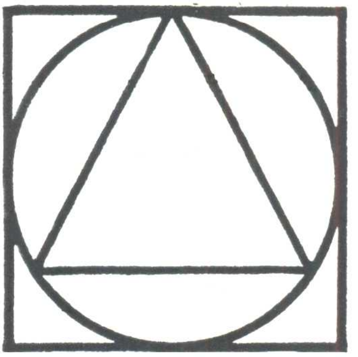
河南省数学学会

郑州市数学学会



高中
数学解难

高中数学解难

河南省数学学会
郑州市数学学会

河 南 教 育 出 版 社

高中数学解难

河南省数学学会

郑州市数学学会

责任编辑　刘宗贤

河　南　教　育　出　版　社　出　版

河　南　第　一　新　华　印　刷　厂　印　刷

河　南　省　新　华　书　店　发　行

787×1092毫米　32开本　11.125印张　218千字

1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷

印数：1—54,000册

统一书号　7356·65　　定价0.92元

前　言

为了帮助广大高中学生学好数学，我们组织部分有丰富教学经验的高中数学教师和对高中数学教学有较深研究的数学工作者，编写了这本《高中数学解难》。

《高中数学解难》以“解难”为宗旨，从高中数学教材中筛选出难以理解和难以掌握的内容，给以详尽地阐述。全书贯穿“透彻理解基本概念，牢固掌握基本方法，系统总结基本规律，灵活运用基本技巧”的精神，力求起到“解难”之作用。

本书是以六年制重点中学高中数学教材的内容和要求为基准进行编写的，在有利于掌握有关内容的前提下，个别地方略有提高。它不仅可以帮助广大高中学生攻破学习数学中的难关，而且也是进行高考复习的青年的良师益友，同时，还可供高中数学教师教学参考和大学低年级学生课外阅读。

参加这本书编写的有：丁培贵、马自力、王永华、王进德、王志勤、田培元、白学岭、刘天生、李保璋、肖猷球、初绍先、陈方田、陈潘庆、张绵潢，项昭义、胡世权、赵延洲、梁衍铎、郭锡洁、崔洪涛、黄承光、蔡云涛等同志，最后由田培元同志统一整编，马自力同志校阅。由于我们水平所限，错

误或不妥之处，诚恳欢迎广大读者指正。

河南省数学学会

郑州市数学学会

1983.8.

目　录

一、充分条件、必要条件和充要条件实例判断分析

充分条件、必要条件和充要条件在中学数学中是一个很重要的概念，它们主要揭示了命题的条件与结论之间的关系，弄清这些概念，对我们加深对命题成立条件的理解，提高推理论证的表达能力，都有一定的作用。

如何才能正确理解这种类型的题目呢？首先要弄清这三个概念与命题的四种形式的联系。我们知道如果条件A能保证结论B成立，那么就说A对于结论B的成立是充分的；如果没有条件A就没有结论B，那么就说条件A对于结论B的成立是必要的。若没有A则没有B，这是原命题的否命题，所以证明原命题的否命题成立即证明原命题的条件是必要的，而原命题的否命题与原命题的逆命题是等价的，因此证明逆命题成立就是证明原命题的条件是必要的。

什么是充分条件、必要条件和充要条件呢？

所谓充分条件，就是如果A成立，那么B成立，即$A \Longrightarrow B$，则A是B的充分条件。简单地说：如果原命题成立，但它的逆命题不成立，我们就说原命题的条件是充分的但不必要。

例如 对顶角相等；

两条异面直线没有公共点；

若$a=b$，则$am=bm$。

这些命题都成立，而它们的逆命题不成立，所以条件是充分而不必要。

所谓必要条件，就是如果B成立，那么A成立，即$B\Longrightarrow A$，如果A不成立，那么B不成立，即$\bar{A}\Longrightarrow\bar{B}$，则$A$是$B$的必要条件。简单地说：如果原命题不成立而逆命题成立，则我们说原命题的条件是必要的但不充分。

例如 被5整除的自然数的个位数字都是5；

若$\sin A=\sin B$，则$A=B$。

这些命题都不成立，而它们的逆命题都成立，所以条件是必要的而不充分。

所谓充要条件，是既有$A\Longrightarrow B$，又有$B\Longrightarrow A$，即A既是B成立的充分条件，又是B成立的必要条件，则A为B的充分必要条件。简单地说：如果原命题成立，它的逆命题也成立，则我们说原命题的条件是既充分而又必要的。

例如 两条对角线相等的梯形为等腰梯形；

若$b^2-4ac<0$，则方程$ax^2+bx+c=0$无实数根。

这些命题的原命题和逆命题都成立，所以它们原命题的条件为充分必要条件。

关于充要条件的题目，一般可分为三类，第一类是判别所给命题中条件是什么条件，是充分条件，必要条件，充要条件或者都不是。第二类是关于充要条件的证明。第三类是求命题成立的充要条件。下面我们按这三种类型对一些题目进行分析证明。

（一）判别所给命题的条件

这类题目是给出条件和结论要求进行判断.

例1 指出下表所列各小题中，A是B的充分条件，还是必要条件，还是充要条件，或者都不是.

	A	B	A是B的什么条件
(1)	四边形$ABCD$是平行四边形	四边形$ABCD$为矩形	
(2)	$a=3$	$\|a\|=3$	
(3)	$\theta=150^\circ$	$\sin\theta=\frac{1}{2}$	
(4)	点(a,b)在圆$x^2+y^2=R^2$上	$a^2+b^2=R^2$	

（1981年高考第三题）

分析与判断：(1) 把该命题写成"如果…，那么…"的形式.

原命题：如果四边形$ABCD$为平行四边形，那么四边形$ABCD$为矩形. 这个命题显然不成立，而它的逆命题：若四边形$ABCD$为矩形，则四边形$ABCD$为平行四边形是成立的.

所以我们可以判断A是B的必要条件.

如果用符号表示，就是$A \not\Longrightarrow B$，而$B \Longrightarrow A$.

$\therefore$ A是B的必要条件.

（2）把该题写成命题的形式

原命题：如果$a=3$，那么$|a|=3$，这个命题是成立的。

逆命题：如果$|a|=3$，那么$a=3$，这个命题是不成立的，因为$|a|=3$时，a也可能是-3，所以我们可以判断A是B的充分条件。

如果用符号表示，就是$\because A\Longrightarrow B$，而$B\nRightarrow A$

$\therefore$ A为B的充分条件。

（3）把该题写成命题的形式

原命题：如果$\theta=150°$，那么$\sin\theta=\frac{1}{2}$，这个命题是成立的。

逆命题：如果$\sin\theta=\frac{1}{2}$，那么$\theta=150°$，这个命题不成立，因为$\sin\theta=\frac{1}{2}$，θ的值不是唯一的，所以我们可以判断A是B的充分条件。

如果用符号表示，就是$\because A\Longrightarrow B$，而$B\nRightarrow A$，

$\therefore$ A是B的充分条件。

（4）把该题写成命题的形式

原命题：如果点(a, b)在圆$x^2+y^2=R^2$上，那么$a^2+b^2=R^2$，这个命题是成立的。

逆命题：如果$a^2+b^2=R^2$，那么点(a, b)必在圆$x^2+y^2=R^2$上。这个命题也是成立的。所以A是B的充要条件。

如果用符号表示，就是$\because A\Longrightarrow B$且$B\Longrightarrow A$，

$\therefore$ A是B的充要条件。

例2 将你认为正确的答案的英文字母代号填写在后面的括号内。 （1981年二十五省市自治区数学竞赛试题）

（1）条件甲：两个三角形的面积和二条边对应相等。

条件乙：两个三角形全等。

A. 甲是乙的充要条件；B. 甲是乙的必要条件；C. 甲是乙的充分条件；D. 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

（　）

（2）条件甲：$\sqrt{1+\sin\theta}=a$。

条件乙：$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$。

A. 甲是乙的充要条件；B. 甲是乙的必要条件；C. 甲是乙的充分条件；D. 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

（　）

分析与判断：（1）将该题写成命题形式

原命题：如果两个三角形的面积和二条边对应相等，那么两个三角形全等。该命题不成立。

举例 求证：在$\triangle ABC$中，已知$\angle B\neq\angle C$，过A作BC边上的中线AD。

$\because$ 在$\triangle ABD$和$\triangle ADC$中，

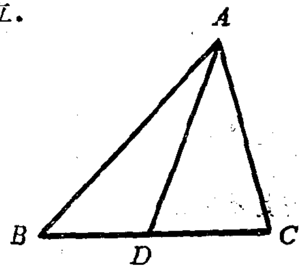


图 1-1

$AD=AD$，$BD=DC$

（二条边对应相等）这两个三角形同高。

则$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$（面积相等）

由原命题的结论可得，$\triangle ABD \cong \triangle ADC$

而已知$\angle B \neq \angle C$。

故原命题不成立。

逆命题：如果两个三角形全等，那么两个三角形的面积和二条边对应相等是成立的。所以甲是乙的必要条件。即B正确。

(2) 将该题写成命题形式

原命题：如果$\sqrt{1+\sin\theta}=a$，那么 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$，该命题不成立。

$\because$ $\sqrt{1+\sin\theta}=a \Longrightarrow 1+\sin\theta=a^2 \Longrightarrow \sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=a^2 \Longrightarrow \left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=a^2 \Longrightarrow$

$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$，或$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=-a$。

逆命题：若$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$，则$\sqrt{1+\sin\theta}=a$，该命题也是不成立的。

$\because$ $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$， $\therefore$ $\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=a^2$，

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=a^2,$$

即$1+\sin\theta=a^2$。

故$\sqrt{1+\sin\theta}=a$，或$\sqrt{1+\sin\theta}=-a$。

$\therefore$ 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。即D正确。

（二）关于充要条件的证明

这一类题目首先必须弄清条件 A 是什么，结论 B 是什么，这样才能明确充分性怎样证，必要性怎样证。一般是以证明一个命题成立的充要条件是什么的形式出现，这实际上就是证明B的充要条件是A，也就是证明A是B成立的充要条件。

例3 已知a、b、c为实数，求证a、b、c均为正数的充要条件是$\begin{cases}a+b+c>0,\\ ab+bc+ca>0,\\ abc>0.\end{cases}$ （1965年高考第8题）

分析 这里条件A是$\begin{cases}a+b+c>0.\\ ab+bc+ca>0,\\ abc>0.\end{cases}$

结论B为$a>0$，$b>0$，$c>0$。

证明必要性就是要证明A是B的必要条件，即$B\Longrightarrow A$。证明充分性就是要证明A是B的充分条件，即$A\Longrightarrow B$。

证明 （1）必要性：

$\because$ 已知$a>0$，$b>0$，$c>0$。

$\therefore$ $a+b+c>0$。

$ab+bc+ca>0$。

$abc>0$。

（2）充分性。

设a、b、c是三次方程$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根，则由根与系数的关系及已知条件得：

$$-p=a+b+c>0,$$

$$q=ab+bc+ca>0,$$

$$-r=abc>0.$$

故$p<0$，$q>0$，$r<0$。所以三次方程

$x^3+px^2+qx+r=0$的系数正负相间，因此该方程无负根。又$abc>0$，可知方程无零根。

$\therefore$ $a>0$，$b>0$，$c>0$。

$\therefore$ a、b、c为正数的充要条件是$\begin{cases} a+b+c>0, \\ ab+bc+ca>0, \\ abc>0. \end{cases}$

例4 求证：$\triangle ABC$为等腰三角形的必要和充分条件是：

$$D=\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

分析 这里条件 A 是 $D=0$，结论 B 是 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，证明必要性就是要证明 A 是 B 成立的必要条件，即 $B \Longrightarrow A$，证明充分性就是要证明 A 是 B 成立的充分条件，即 $A \Longrightarrow B$。

证明 （1）必要性：

若 $A=B$，则 $\begin{vmatrix} \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}=0$.

同理：若 $B=C$，或 $C=A$，则 $D=0$。

（2）充分性，

若 $D=0$，即：

$$D=\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1-\cos^2 A & \sin A & 1 \\ 1-\cos^2 B & \sin B & 1 \\ 1-\cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \sin^2 A & \sin A & 1 \\ \sin^2 B & \sin B & 1 \\ \sin^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \sin^2 A-\sin^2 B & \sin A-\sin B & 0 \\ \sin^2 B-\sin C & \sin B-\sin C & 0 \\ \sin^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-(\sin A-\sin B)(\sin B-\sin C)\begin{vmatrix} \sin A+\sin B & 1 \\ \sin B+\sin C & 1 \end{vmatrix}$$

$=-(\sin A-\sin B)(\sin B-\sin C)(\sin A-\sin C)$

$=0$。

∴ $\sin A=\sin B$ 或$\sin B=\sin C$ 或$\sin A=\sin C$。

∵ A、B、C为三角形的内角，由$\sin A=\sin B$得$A=B$。

同理：$B=C$或$C=A$。

∴ $\triangle ABC$为等腰三角形的必要和充分条件是：

$$D=\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例5 求证：平面内一条直线$y=kx+b$ 与这个平面内一个圆$x^2+y^2=r^2$相切的充分必要条件是$b^2=r^2(1+k^2)$。

分析 这里条件A是$b^2=r^2(1+k^2)$，结论B是直线 $y=kx+b$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，证明必要性就是要证明A是B的必要条件，即$B\Longrightarrow A$。证明充分性就是要证明A是B的充分条件，即$A\Longrightarrow B$。

证明 （1）必要性：

若直线$y=kx+b$与圆$x^2+y^2=r^2$相切，

则圆心（0，0）到直线$y=kx+b$的距离等于 r。

即 $$\frac{|k\cdot 0-0+b|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=r.$$

∴ $|b|=r\sqrt{k^2+1}$。∴ $b^2=r^2(k^2+1)$。

（2） 充分性：