北京市特级高级教师联合编写组 编写

MATHEMATICS

新课程标准

初中典型应用题精选

yingyongti

宋川利 主编

MATHEMATICS

开明出版社
Kaiming Press

dianxing
yingyong
ti
jingxuan

MATHEMATICS

新课程标准

初中典型应用题精选

宋川利 主编

北京市特级高级教师联合编写组 编写

jingxuan

开明出版社
Kaiming Press

图书在版编目(CIP)数据

初中典型应用题精选/宋川利主编. —北京:开明出版社,2004.1
(数学应用丛书)
ISBN 7-80133-905 3

Ⅰ.数... Ⅱ.宋... Ⅲ.数学课--初中 解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 094816 号

主编 宋川利
编者 段长连 郝 彭 丁瑞岭
李建杰 李树斌 毛瑶困

数学应用丛书
初中典型应用题精选
开明出版社出版
(北京海淀区西三环北路 19 号 邮编 100089)
新华书店北京发行所经销
秦皇岛市晨欣彩印有限公司印刷
大 32 开 7.25 印张 211 千字
北京 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
1～20000 册

书号 ISBN 7-80133-905-3/G・819
定价/8.80 元

前言

"数学应用"丛书是由教学一线特、高级教师和北京地区教科研中心的教研员共同讨论、设计、编写而成的。该丛书包括《小学典型应用题精选》、《初中典型应用题精选》及《高中典型应用题精选》三本。该丛书具有以下特点：

一、以本为序、设计情景

根据现行教材体系的编排顺序，结合学生生活经验，总体设计问题情景。筛选例题具有典型性、示范性、迁移性，或体现某种建模策略、或渗透某种数学方法、或提供某种重要结论。利用典型例题本身蕴含的实用价值，纵向挖掘、横向延伸，达到开阔学生视野、优化知识应用结构、活跃思维、培养能力的目的。

二、重视过程、立足转化

解题紧扣"实际问题——处理信息——建立模型——解决问题"的全过程，凸现提取信息、分析信息、加工信息的思路、方法及策略，从整体上把握实际问题的结构特征，转化或化归成某种数学知识的结构特征，以确定相应的数学模型。重过程、启迪思维，可达到以少胜多、事半功倍的效果。

三、以法带题、用题诠法

要做到"言之有理、落笔有据"，就必须讲究方法。本书既注意到函数观点、问题转化、数形结合及反面思考等大法运用，又注意到观察比较、消元换元、逻辑推理及分类讨论等小法活用。全书以法带题、用题诠法、法理兼顾、极富启发性。

四、与时俱进、导向鲜明

题型新颖别致，富有时代特色，如市场营销、方案设计、最佳决策、图像信息、折叠裁剪及学科交叉等具有鲜明的时代性、趣味性、新颖性及实用性，密切联系生活、直书社会热点，充分体现了数学的教育功能、社会功能及选拔功能，代表了数学应用的命题方向。

本册《初中典型应用题精选》可供初三学生备考之用，也可供初中一、二年级学生选用。

编者

2003. 11. 26

目　录

目 录

第 1 章

解数学应用题的一般步骤

数学应用性问题是全国各省市中考数学必考的一种重要题型，应用性问题是考查学生阅读理解、信息迁移和数学方法等综合能力的重要形式. 而如何将一个用文字语言叙述的应用问题，根据实际意义抽象概括为一个纯数学问题，同时抓住题目中所蕴含的数学信息，恰当地转化为一个数学模型，是能否正确解答应用性问题的关键.（应用性问题，以下简称应用题）

一、数学模型的概念

应用题本身的复杂性和数学模型的抽象性是学生解答应用题的困难所在，一旦遇到背景生疏、条件隐蔽的应用题，学生便望题兴叹、束手无策、究其原因，主要是对数学模型及其特征认识不足，建立数学模型解题的实践不够，未能从根本上形成解应用题的能力. 解应用题的关键是建立数学模型，而什么是相关的数学模型呢？请看下面的几个例题.

例 1 一个矩形窗户的窗框及中间两个横档的用料总长定为 8 米. 试求窗户面积 y(平方米)与横档长度 x(米)的函数关系，并问 x 为何值时窗户面积最大？最大面积是多少？

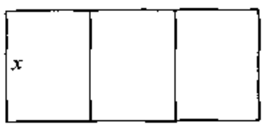


图 1-1

解 如图 1-1 所示. 依据题意，矩形的一边与横档同长为 x，则另一边为 $\frac{8-4x}{2}=4-2x$. 于是窗户面积

$$y=x(4-2x)=-2x^2+4x,$$

这个二次函数当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-2)}=1$(米)时，面积 y 最大

$$y_{最大}=1\times(4-2\times1)=2(平方米).$$

例 2 一家旅社有客房 300 间，每间房每天租金为 40 元时，天天客满. 如果将房间租金每提高 5 元，预计客房出租数会减少 10 间. 若不考虑其他因素，旅社租金提到多少元时，每天客房的租金收入最高？

解 设租金提高到 x 元，则租金比 40 元提高了 $(x-40)$ 元，其含有 $\frac{x-40}{5}$ 个 5 元，减少的房间数为 $10\times\frac{x-40}{5}=2(x-40)$，所以出租的房间数为 $300-2(x-40)=380-2x$，故租金收入为

$$y=x(380-2x)=-2x^2+380x,$$

当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{380}{2\times(-2)}=95$ 时，y 有最大值

$$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-380^2}{4\times(-2)}=18\ 050.$$

即当每间客房的每天租金提高到 95 元时，每天客房租金收入最高为 18 050 元.

这里，例 1 是矩形窗户设计问题，例 2 是旅社房间定价问题，是两个完全不同性质的问题，但抽出其实际意义后都可归结为二次函数，都是用二次函数知识求出最大值.

这种舍去实际问题的具体内容，从中抽象出数量关系的工作就叫做“建立数学模型”，简称“数学建模”.

对实际问题建立适当的数学模型后就可以用相应的数学方法求得问题的解. 因此恰当的建立数学模型对解决实际问题是十分重要的.

有些数学实际问题，由于思考的角度不同或应用的数学知识不同等原因，所建立的数学模型也随之不同.

例 3 某村搞农田基本建设，计划用 25 个劳力，在规定的时间内挖土 1 000个土方. 施工 4 天后，抽调 5 人做其他工作，但由于每天每人比原计划多挖 1 个土方，结果仍按时完成了剩余的任务. 问原来每人每天挖多少个土方?

分析 这是一个简单的施工调配问题，关键是寻找相等关系列方程(或方程组). 由于思考的角度不同，所列出的方程也有所不同.

解法 1 设原来每人每天挖土 x 个土方，规定时间为 y 天，依据题意.

列方程组 $\begin{cases}25xy=1\ 000,\\25\times4x+(25-5)(x+1)(y-4)=1\ 000,\end{cases}$

解之 $\begin{cases}x=4.\\y=10.\end{cases}$

即原来每人每天挖土 4 个土方，规定时间为 10 天.

解法 2 设原来每人每天挖土 x 个土方，4 天后每人每天挖土 $(x+1)$ 个土方. 因为工作量一定，工作效率与参加工作人数成反比，故可列出方程：

$$\frac{x}{x+1}=\frac{20}{25},$$

解之 $x=4$，

经检验 $x=4$ 是原方程的根.

即原来每人每天挖土 4 个土方.

解法 3 设原来每人每天挖土 x 个土方，5 人每天挖土 $5x$ 个土方，20 个人每天每人多挖 1 个土方，总共每天多挖 20 个土方，由此列方程

$$5x=20,$$

解之 $x=4$，

即原来每人每天挖土 4 个土方.

回顾题目所求，再看解法 2,3 的解题过程，不难发现题中的 1 000 个土方是一个多余的条件. 在解实际问题时，同样有一个方法的选择问题，应选择用简单易懂的方法去解. 追求简易，也是建立数学模型所需要培养的能力之一.

例 4 在某沙漠地带进行科学考察，考察车每天行驶 200 千米，每辆考察车可以装载供行驶 14 天的汽油. 现有 5 辆考察车，同时从驻地 A 出发，计划完成任务后，再沿原路返回驻地. 为了让其中 3 辆车尽可能向更远的地方考察(然后再一起返回)，甲、乙两车行至 B 处后，仅留足自己返回驻地所必需的汽油，将多余的汽油供给另外 3 辆使用. 问其他 3 辆车可行进的最远路程是多少千米.

分析 这是科学考察中出现的实际问题. 要使考察路程最远，根据题中条件，从不同角度分析探索，可以建立不同的数学模型来解.

解法 1 建立方程组模型.

如图 1-2 所示. 假设 5 辆车同时考察，则可以行进 7 天(往返路程). 设

其中 3 辆车多行进 y 天，甲、乙两车少行进 x 天.

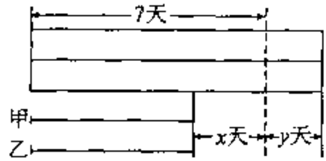


图 1-2

依据题意，得方程组 $\begin{cases}3y=2x,\\2(x+y)=14-(7-x),\end{cases}$

解之 $x=3$，$y=2$.

因此，其他 3 辆车行进的最远路程为

$$(7+y)\times200=(7+2)\times200=1\ 800(\text{千米}).$$

解法 2 建立不等式组模型.

设行驶 x 天到达 B 处，甲、乙两车留足自己返回的汽油后，向其余 3 辆考察车供油，从考察车的载油容量考虑，则应有

$$14\times5-(5+2)x\leqslant14\times3, \qquad ①$$

为了保证其他 3 辆车尽可能行进最远，甲、乙两车不仅应使 B 点尽可能远(即 x 尽可能的大)，而且又必须留足它们返回驻地的汽油，则应有

$$2(14-x)\geqslant5x. \qquad ②$$

(其中 $2(14-x)$ 为甲、乙两车所供的汽油，$5x$ 为 5 辆车由 B 返回驻地所需的汽油.)

由①、②解得 $x\geqslant4$ 且 $x\leqslant4$，∴ $x=4$(天).

因此，这 3 辆车从驻地 A 出发，行进最远路程为

$$4\times200+\frac{14-4}{2}\times200=1\ 800(\text{千米}).$$

解法 3 建立一次函数模型.

设考察车到途中 B 处用了 x 天，从 B 处到最远处用了 y 天，则有

$$2[3(x+y)+2x]=14\times5,$$

即 $5x+3y=35.$ ①

∵ $x>0$，$y>0$，且 $14\times5-(5+2)x\leqslant14\times3$，

$\therefore\quad x\geqslant 4,\ y>0.$ ②

因此，我们可求在条件①、②之下 y 的最大值.

$\because\quad y=\frac{35}{3}-\frac{5}{3}x$ 是减函数，

$\therefore\quad x=4$ 时，y 有最大值 5.

这样，其他 3 辆车可行进的最远距离为

$$200(x+y)=200\times 9=1\ 800(\text{千米}).$$

由以上解题过程看出，解实际问题建立数学模型并非惟一，而衡量一个数学模型的优劣应看它的应用效果. 本题中的三种模型，效果相同，但函数模型不如不等式组模型简便，而不等式组模型又不如方程模型简明. 一般说来，应选择容易理解、过程简便，或自己比较熟悉的模型为宜.

概括起来看，应用题的数学模型，实质是针对应用题的特征或数量依存关系，采用形式化的数学语言，抽象或近似地表述出来的一种数学结构. 它做为一种数学结构，要体现出数学概念、符号、运算法则、公式及方法；而做为应用题的模型，又反映出应用题的特征、数量关系及规律.

在我们解答应用题时，所分析问题的特征和数量依存关系，一旦与已学习过的某种类型的数学知识的特征或数量关系相吻合时，那么该应用题的数学模型也就建立起来了.

二、解数学应用题的一般步骤

解应用题时，首先要阅读题目，理解题意，在此基础上经过去粗取精、抽象概括，并利用相关的数学知识建立数学模型. 其具体步骤如下：

(一)审题：阅读题目，理解题目背景，弄清题意，理顺问题中的数量关系，明确问题的实际需求.

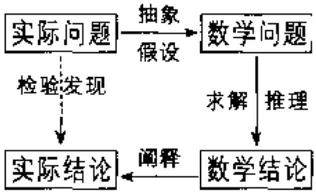
(二)建模：将题目中的文字语言转化为数学语言，利用数学知识把问题的主要特征及关系抽象出来，建立相应的数学模型.

(三)求解：运用相关的数学概念、知识及方法，或计算，或推理，得到数学模型的结果或结论.

(四)还原：把用数学方法得到的结果或结论，返回到原实际问题中，确

定实际问题的准确答案.

解数学应用题的一般步骤可用如下框图表示.



例 5 某服装厂安排下个月某种畅销服装的生产.

(1) 已知这种服装的面料每套 60 元，可供购买面料的流动资金只有 30 030 元;

(2) 生产这种服装每套用 24 个工时，全月管理及检修又需用 600 个工时，而投入此项生产的员工(包括操作、检修、管理等)至多 80 人，每人平均月出工时数为 160.

根据以上信息，试问下月该厂至多生产此服装多少套? 并对结果作初步分析，指出为了进一步增产，该厂首先应解决什么问题? 在其他条件不变的情况下提出增产建议.

解答步骤如下:

(一)审题:通过阅读题目，可知这是一个服装生产中的规划问题，题目中涉及的因素比较多，相互制约. 但进行归类，可知主要有因生产受资金的限制和受劳力的限制出现了两个"不得超过"，即可建立两个不等关系.

(二)建模:经过以上分析，可知在假设下月生产 x 套此种服装的情况下，依据题意，有 $x\in\mathrm{N}$，且

(1) 生产受资金的限制. 购买面料的费用不超过 30 030 元，即

$$60x\leqslant 30\ 030; \qquad ①$$

(2) 生产受劳力的限制，所用的全部工时$(24x+600)$不得超过投入此项生产的员工的总出工数(80×160)，即

$$24x+600\leqslant 80\times 160. \qquad ②$$

结合①和②，即可得到一个不等式组模型.

(三)求解：

由①、②，得 $\begin{cases}60x\leqslant 30\ 030,\\24x+600\leqslant 80\times 160,\end{cases}$

解之 $\begin{cases}x\leqslant 500.5,\\x\leqslant 575.\end{cases}$

(四)还原：

由 $x\leqslant 500.5$,

又 $x\in \mathbf{N}$，∴ $x_{最大}=500$.

即下月至多生产此种服装 500 套.

这里，最大生产量是 500 套，而不是 575 套，这是因为受到了资金的制约. 为了增产，首先要考虑资金问题. 注意到生产 575 套服装需面料费用 $575\times 60=34\ 500$(元)，现在仍有 $34\ 500-30\ 030=4\ 470$(元)的资金不到位. 建议通过银行贷款等方式筹措资金，可在不改变其他条件的情况下增产服装 75 套.

在解应用题时，必须兼顾到每个量的实际意义. 不能只看数学的结果，$x\leqslant 500.5$，更不能用常规的要求四舍五入 $x\leqslant 501$，而是 $x\leqslant 500$，即回答问题要周全且符合实际.

从以上解题过程看出，对数学应用题而言，四个步骤做为思维流程是一个也不能少的，而在书写上(一)、(四)可以舍去，甚至(二)、(三)也可以合并起来，使解题简捷而流畅.

练习题一

1. 某河上游的 A 地，为改善流域环境，把部分牧场改为林场. 改后的林场和牧场共有 162 公顷，牧场面积是林场面积的 20%. 问退牧还林后林场面积是多少公顷?
2. 某科技公司研制成功一种新产品，决定向银行贷款 200 万元资金用于生产这种产品，签订的合同上约定两年到期一次性还本付息，利息为本金的

8%. 该产品投入市场后，由于产销对路，使公司在两年到期时，除还清贷款的本金和利息外，还盈利 72 万元. 若该公司在生产期每年比上一年资金增长的百分数相同，试求出这个百分数.

3. 甲、乙两艘旅游客轮同从台湾某港出发来厦门. 甲沿直航线航行 180 海里到达厦门；乙沿原来航线绕香港后来厦门，共航行了 720 海里，结果乙比甲晚 20 小时到达厦门. 已知乙速比甲速每小时快 6 海里，求甲客轮的速度(其中两客轮速度都大于 16 海里每小时)？

4. 永盛电子有限公司向工商银行申请了甲乙两种贷款，共计 68 万元，每年需付利息 8.42 万元. 甲种贷款每年的利息是 12%，乙种贷款每年的利息是 13%，求这两种贷款的数额各是多少？

5. 某工厂生产一种产品，每 100 件的成本是 360 元，改进设计后成本可降低 10%至 15%(包括 10%和 15%)，求改进设计后每件产品的成本在多少元之间？

6. 阳光旅社某天只剩下空房 10 间时，接待了最后一个旅游团. 当每个房间只能住 3 人时，有一个房间住宿的情况是不空也不满，若旅游团的人数为偶数，求该旅游团的人数.

7. 某玩具厂计划生产一种玩具熊猫，每日最高产量为 40 只，且每日产出的产品全部售出. 已知生产 x 只玩具熊猫的成本为 R(元)，售价每只为 P(元)，且 R、P 与 x 的关系分别为 $R=500+30x$，$P=170-2x$.

(1) 当每日产量为多少时，每日获得的利润为 1 750 元；

(2) 当日产量为多少时，可获得最大利润？最大利润是多少？

8. 在容器里有 18 摄氏度的水 6 立方分米，现在要把 8 立方分米的水注入里面，使容器里混合的水的温度不低于 30 摄氏度，且不高于 36 摄氏度，求注入的 8 立方分米的水的温度应在什么范围.

9. 建造一个容积为 8 立方米，深为 2 米的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，那么水池的最低造价为多少元？

10. 某商店计划拨款 9 万元从厂家购进 50 台电视机，已知该厂家生产三种不同型号的电视机，出厂价分别为：甲种每台 1 500 元，乙种每台 2 100 元，丙种每台 2 500 元.

(1) 若商场同时购进其中两种不同型号的电视机共 50 台，用去 9 万元，请你研究一下商场的进货方案；

(2) 若商场准备用 9 万元同时购进三种不同型号的电视机 50 台，请你设计进货方案.

11. (牛顿问题)甲、乙、丙三块草地，草长得一样密一样快. 甲地 $3\frac{1}{3}$ 公顷可供 12 头牛吃 4 周；乙地 10 公顷可供 21 头牛吃 9 周，问丙地 24 公顷可供多少头牛吃 18 周?

12. (百鸡问题)今有公鸡 1 只，值钱 5；母鸡 1 只，值钱 3．小鸡 3 只，值钱 1. 用百钱买百鸡，问公鸡、母鸡、小鸡各多少?

练习题一答案

1. 设林场面积为 x 公顷，则依据题意有 $x+20\%x=162$，∴ $x=135$，即改变后林场的面积为 135 公顷.

2. 设这个百分数为 x，则由题意，得

$$200(1+x)^2=72+200(1+8\%),$$

即 $(1+x)^2=1.44$，

∴ $x_1=0.2$，$x_2=-2.2$(舍去).

即该公司资金增长的百分数为 20%.

3. 设甲客轮的速度为每小时 x 海里，则依据题意，得

$$\frac{720}{x+6}-\frac{180}{x}=20,$$

即 $x^2-21x+54=0$.

∴ $x_1=18$，$x_2=3$.

经检验 $x_1=18$，$x_2=3$ 都是原方程的根，但 $x_2=3<16$ 不合题意，

故只取 $x=18$.

即甲客轮的速度为每小时 18 海里.

4. 设申请甲种贷款 x 万元，则申请乙种贷款$(68-x)$万元，依据题意，得