

1982.11.28

腹板梁的計算

A.C. 卡 尔 馬 諾 克 著

建 筑 工 程 出 版 社

腹板梁的計算

洪 敏 譯

建筑工程出版社出版

• 1958 •

內容提要 本書系根据作者所制訂的一般方法,用双曲綫-三角級数求对大高度的梁(腹板梁)进行弯曲的計算。書中举有建筑实际中許多具体問題的解,并列有一些輔助用表,以及載有現成計算結果的表。

本書供工程師、設計人員和科学研究部門的工作者应用。

原本說明

書 名 РАСЧЕТ БАЛОК—СТЕНОК
著 者 А. С. Калманов
出 版 者 Государственное издательство литературы
по строительству и архитектуре
出版地点 及 年 份 Москва—1956

腹板梁的計算

洪 敏 譯

·

建筑工程出版社出版 (北京市阜成門外大街)

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 052 號)

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書号 651 117千字 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印張 4 $\frac{1}{2}$

1958年4月第1版 1959年4月第1次印刷

印數:1—1,780 册 定價 (10) 0.35 元

目 录

序 言	4
符号表	7
第一章 矩形周边平面弹性理論問題按三角級数法的解	9
第一节 平面弹性理論的基本方程式	9
第二节 重譜和方程式的特別积分	15
第三节 矩形周边平面弹性理論問題的基本解	24
第四节 按級数法計算矩形腹板梁边界問題の解	32
第五节 第一种主要边界問題の解	39
第六节 第二种主要边界問題の解	48
第七节 計算矩形腹板梁的混合边界問題	55
第八节 計算矩形腹板梁問題の实用解算方法	60
第二章 矩形腹板梁的計算	66
第九节 得出蜕化联立方程式的問題の解	66
第十节 最簡單的計算矩形腹板梁的問題	74
第十一节 簡支矩形腹板梁的計算	82
第十二节 連續矩形腹板梁的計算	88
第十三节 二端固定的矩形腹板梁的計算	94
第十四节 悬臂矩形腹板梁的計算	104
第十五节 計算矩形腹板梁的例子	114
第十六节 矩形周边平面弹性理論的一些問題	124
附 录	132

序 言

腹板梁,就是其高度超过其跨度的 $1/3 \sim 1/2$ 的梁,它經常被用来作为各种工业和民用构筑物如筒仓和斗仓、船塢等的承重結構。实际上通常遇到的腹板梁是矩形形状。本書着重論述这种矩形的腹板梁。

根据貝尔努利(Бернулли)平截面假定来初步計算大高度的梁,不可能得出正确的数值和法向应力以及剪应力的分布图形,并且在求算形变时产生錯誤。这就迫使在計算腹板梁时采用平面弹性理論問題的精确解算方法。

大家知道,在一些重要的实际情形中,这些問題的数学演算,对于平面范围当已知周边上边界条件时归結为积分重譜和方程式。这也就大大地复杂了解算問題的計算工作,并且問題的解通常是于設計实践上很少能直接运用的繁贅的式子中获得。因此,就产生了根据这种解来編制可为工程师、設計人員运用的表的必要。

應該指出,弹性薄板的弯曲問題也归結为这种重譜和方程式,事实上,这种問題的解算与上述問題的解算是完全相似的。

因为腹板梁中法向应力和剪应力的分布与采用平截面假定的情形中有显著的不同,所以鋼筋混凝土腹板梁的配筋与普通鋼筋混凝土梁的配筋也应该有显著的不同。例如,大高度連續腹板梁支座截面中的受拉鋼筋,不应该放在上部,而應該在中部或甚至在其高度的下部三分之一的范围内放成几排。

平面弹性理論問題在里比也尔(Рибьер)、費隆(Файлон)和普朗德略(Прандтль)的解問世前很久,距今八十多年时就由俄国学者X.С.戈洛温(Головин)发表了該問題的第一批解。本世紀中,俄罗斯科学在平面弹性理論方面,不可爭辯地占着首席地位。这方面具有特殊意义的是Г.В.柯洛索夫(Колосов)和Н.И. 穆斯

赫利什維廉(Мухелишвили)的著作,他們制訂了解算平面彈性理論的一般方法。

本方法可以利用数学中綜合变数解析函數理論这一工具,使在一般形式下把积分重譜和方程式的問題轉变为解算无穷方程式的联立式,或者轉变为一些积分方程式。遺憾的是在这类問題的周边具有特殊(角)点或当边界条件对于各段周边是不同形式的情形下,这个方法的应用,碰到严重的困难。

因此,柯洛索夫-穆斯赫利什維廉方法,对于获得我們感兴趣的矩形腹板梁計算問題的數字解,是很少有利的。目前在这一方面通常都采用高等分析問題的其他近似解算方法:如变值法、网法和級数法。

基于拉格郎日(Лагранж)和卡斯契里雅諾(Кастильяно)原理的变值法,虽然原理簡單明了,可惜对于解算腹板梁問題很少有利。如实践所証明,在大多数情形下,如不大量增加不定系数,这个方法是不能在解算中保証足够的精确性的。如果增加那些系数的話,那就是使为获得數字計算結果所必要的計算更为繁重。

运用Л.В.康托羅維奇(Канторович)建議的混合变值法,能得到比較良好的結果。在这种情形下,解算归结为积分普通微分方程式的不太复杂的問題。但是这时要在二次幂近似中和特別在較高次幂近似中获得解,則困难大大增加。

但是对于获得近似的解,比如在草图設計时,則变值法仍可能是极其有利的。我們不打算在本書中闡述这类方法,讀者可參閱Л.С.列依崩仲(Лейбензон)和Я.А.普拉图塞維奇(Пратусевич)的文集。

网法是数字积分重譜和微分方程式的方法,它在解算腹板梁問題中获得了广泛的应用。П.М.华尔瓦克(Варвак)的許多著作都論述了这一方法,这些著作都汇编在他的文集“网法的发展和在計算薄板中的运用”一書中。但是,网法虽然有其很大的优点——如得出的基本公式簡單和可以用来計算非矩形形状的腹板梁——却也有极其严重的缺点。应用这个方法时,必須解算复杂而繁

贅的綫性代数方程式的联立式,并且在很多的情形下解的精确性、特别是求算剪应力部分中的精确性,不可能認為是足够令人满意的。若为了增加精确性而减小网的“空隙”,則会使得計算工作更为复杂。最后,这一方法所获得的解也不可能是解析式的,这样就不能对結果进行足够完全的解析。

上述的П.М. 华尔瓦克文集中包含了一些計算矩形腹板梁各个实际問題的現成解,故所述的缺点能部分地得到弥补。但是这些解只是对腹板梁高度和跨度的一些确定的比值来进行計算的,故远不能用它来包括实际上所遇到的所有問題。

从上所述我們就知道,不宜运用网法来解算矩形腹板梁的問題。但是对于計算形状不同于矩形的腹板梁,則这一种解算問題的方法实际上是唯一可行的方法。因为本書不論述非矩形形状的腹板梁,故我們也不拟在書中闡述网法。

本書所采用的主要方法是三角級数法,这一方法是以分列变数积分重譜和方程式为基础的。按照它的基本原理,这一方法稍比上述二个方法复杂些。但是它与上二法不同的是有利地縮減了为获得同样精确度的数字解所必要的計算工作,如运用作者編制的一些特殊超越函数值的輔助表,則可得到特別的簡化;这些表載于附录中。本書中所論述的这个方法,是作者在解算矩形周边平面弹性理論問題方面以前各著作的进一步发展和綜合。

應該提一下,对于解算这种問題,除运用三角級数以外,有人試圖采用其他形式的展成級数,例如基本梁函数[И.И. 戈利登布拉特(Гольденблат)],余弦二項式[М.М. 菲洛涅科-波罗季奇(Филоненко-Бородич)]和П.ф. 帕普科維奇(Папкович)函数[К. А. 基达維尔(Китовер)]。上述的建議同三角級数法比較起来,沒有特殊的优越,并且沒有足够的一般性,所以我們不打算加以論述。

本書根据所拟定的問題的范围,由二章組成。第一章闡述用三角級数法解算矩形周边平面弹性理論問題的一般方法。第二章論述运用这些一般方法来解算側边处不同固定形状的腹板梁的具体問題。該章中也論述一些非腹板梁計算性質的平面弹性理論問題。

符 号 表

X_x, Y_y, X_y ——腹板梁受力状态分量；

N_x, N_y, T_{xy} ——总的法向内力和切向内力；

u, v ——位移矢量的分量；

e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} ——腹板梁小形变分量；

E, ν ——弹性模量和横向膨胀系数；

F ——应力函数；

τ_x, τ_y ——切向内力集度变化规律的原形函数；

a, b, h ——腹板梁周边的各边尺碼和厚度；

$\gamma = \frac{a}{b}$ ——腹板梁周边的边比值；

$$\alpha = \frac{m\pi}{\gamma}; \quad \beta = \gamma n\pi。$$

典型联立方程式中未知量和自由項旁的系数：

$$\chi_1(\alpha, 1) = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad \chi_1(\alpha, 0) = \frac{\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\chi_3(\alpha, 1) = -\frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad \chi_3(\alpha, 0) = -\frac{\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\bar{\chi}_1(\alpha, 1) = \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + (1+\nu) \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\bar{\chi}_1(\alpha, 0) = \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha + (1+\nu) \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\bar{\chi}_3(\alpha, 1) = \frac{(3+\nu) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + (1+\nu) \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\bar{\chi}_3(\alpha, 0) = \frac{(3+\nu) \operatorname{sh} \alpha + (1+\nu) \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\zeta_1(\alpha, \frac{1}{2}) = \frac{\operatorname{sh} \alpha - \alpha}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\bar{\zeta}_1\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) = \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha - (1+\nu) \alpha}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\zeta_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\operatorname{sh} \alpha + \alpha}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\bar{\zeta}_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) = \frac{(3+\nu) \operatorname{sh} \alpha - (1+\nu) \alpha}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\omega_3(\alpha, 1) = (1+\nu) \frac{(3-\nu) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + (1+\nu) \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\omega_3(\alpha, 0) = (1+\nu) \frac{(3-\nu) \operatorname{sh} \alpha + (1+\nu) \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\bar{\omega}_3\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) = (1+\nu) \frac{(3-\nu) \operatorname{sh} \alpha - (1+\nu) \alpha}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\varphi_1(\alpha) = -\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2}, \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{2 \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2};$$

$$\delta_0(m, n) = \frac{r^2 m n}{(m^2 + r^2 n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \bar{\delta}_1(m, n) = \frac{m^2}{r^2 n^2} \delta_0(m, n),$$

$$\bar{\delta}_2(m, n) = \frac{r^2 n^2}{m^2} \delta_0(m, n), \quad \bar{\delta}_1(m, n) = \delta_1(m, n) + 2 \delta_0(m, n),$$

$$\bar{\delta}_2(m, n) = \delta_2(m, n) + 2 \delta_0(m, n), \quad \lambda_1(m, n) = \delta_0(m, n) - \nu \delta_1(m, n),$$

$$\lambda_2(m, n) = \delta_0(m, n) - \nu \delta_2(m, n),$$

$$\bar{\lambda}_1(m, n) = \delta_1(m, n) + (2+\nu) \delta_0(m, n),$$

$$\bar{\lambda}_2(m, n) = \delta_2(m, n) + (2+\nu) \delta_0(m, n),$$

$$x_1(m, n) = \delta_1(m, n) - \nu \delta_0(m, n), \quad x_2(m, n) = \delta_2(m, n) - \nu \delta_0(m, n).$$

第一章 矩形周边平面彈性理論問題

按三角級數法的解

第一节 平面彈性理論的基本方程式

茲研究一薄板，其厚度 h 并在其平面中承受外荷載和体积力。可以假定：所有这些荷載都是沿薄板的厚度均匀分布；此薄板只在其平面中受弯，因此它处于二向受力状态。

如果把坐标平面 xy 与薄板的中間平面重合，則可以認為作用在与这平面平行的各平面上的应力等于零：

$$Z_z=0, \quad X_z=0, \quad Y_z=0.$$

茲研究一个从薄板中切出的单元平行六面体 $h dx dy$ ，并設作用在平行六面体各边单位长度上的內力值(图 1)：

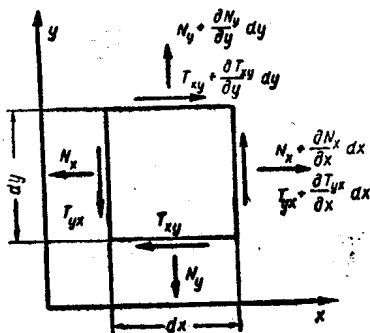


图 1

$$N_x = h X_x, \quad N_y = h Y_y, \quad T_{xy} = h X_y, \quad T_{yx} = h Y_x.$$

这一平行六面体的平衡条件，可以写成所有各力在 x 軸上投影总和为零、在 y 軸上投影总和为零，以及所有各力对平行六面体中心軸的力矩总和为零的等式：

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} dy dx + \bar{X} dy dx = 0;$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} dy dx + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} dx dy + \bar{Y} dx dy = 0;$$

$$T_{xy} dy dx - T_{yx} dx dy + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx dy \frac{dy}{2} -$$

$$-\frac{\partial T_{yx}}{\partial y} - dy dx \frac{dx}{2} = 0.$$

在后一个方程式中不計高阶的小数值,即得切向內力的对等定律:

$$T_{xy} = T_{yx} \quad (1.1)$$

在头二个方程式中約去 $dx dy$, 即得平衡微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \bar{Y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

式中 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ — 体积力在坐标軸上的投影。

茲以垂直于薄板中間平面的某一平面来研究薄板的截面;設对该平面的外向法綫的方向,与 x 坐标軸成 α 角。由单元三面棱体(图 2)的平衡条件,我們得下列的求算作用在斜截面中各內力的公式:

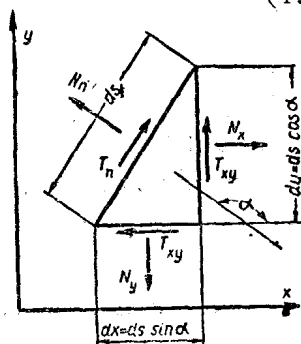


图 2

$$\left. \begin{aligned} N_n &= N_x \cos^2 \alpha + N_y \sin^2 \alpha + T_{xy} \sin 2\alpha; \\ T_n &= \frac{1}{2} (N_y - N_x) \sin 2\alpha + T_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

为求得这些內力的极端值,可以利用一个特性,即在垂直于受力状态主軸的各平面上,只有法向应力。設法向內力的极端值以 N_1 和 N_2 表示,得:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_1 \cos^2 \alpha + N_2 \sin^2 \alpha = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\alpha; \\ N_y &= N_1 \sin^2 \alpha + N_2 \cos^2 \alpha = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\alpha; \\ T_{xy} &= -\frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

由式(1.4)得:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + T_{xy}^2}; \\ N_2 &= \frac{N_x + N_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + T_{xy}^2}; \\ |T'_{xy}|_{\substack{\text{最大} \\ \text{最小}}} &= \pm \frac{1}{2}(N_1 - N_2) = \pm \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + T_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

用来确定主法向内力值各平面方向的角,按下列公式求得:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{T'_{xy}}{N_y - N_x}\right). \quad (1.6)$$

切向内力的极端值,可在平分主法向内力值方向夹角的平面上获得:

兹在薄板中间平面上研究具有坐标 (x, y) 的某一点。薄板形变后,该点位移到 $(x+u, y+v)$ 位置。与该点无限接近的点 $(x+dx, y+dy)$,这时位移到 $(x+u$

$$+dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y+v+dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \text{位置。}$$

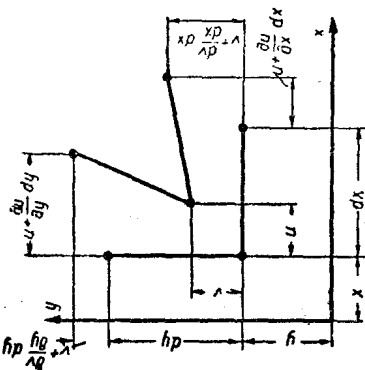


图 3

单元 dx 和 dy 的弹性伸长等于(图3):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ e_{yy} &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (1.7)$$

当形变时,同样产生单元 dx 和 dy 間直角的畸变,其值为:

$$e_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.8)$$

形变的三个分量 e_{xx} , e_{yy} 和 e_{xy} 取决于位移的二个分量—— u 和 v 。因此在这些分量間應該有一个能保証形变連續性条件的关系。这一关系用微分式(1.7)和(1.8)来求得,其式为:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.9)$$

假定薄板是由各向同性的材料做成。在这种情形下受力状态和形变的分量彼此都由虎克定律关系式联系起来:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x); \\ e_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

式中 E ——弹性模量;

ν ——横向膨胀系数。

由这些方程式同样得到:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{xx} + \nu e_{yy}); \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{yy} + \nu e_{xx}); \\ T_{xy} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \times \frac{(1-\nu)}{2} e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

把表达式(1.11)代入方程式(1.2)后并考虑式(1.7)和(1.8),就得到以位移表示的平衡微分方程式:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \times \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{(1+\nu)}{2} \times \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ = - \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \bar{X}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1+\nu)}{2} \times \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{(1-\nu)}{2} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = \\ = - \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \bar{Y} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

把表达式(1.10)代入方程式(1.9),即得以内力表示的形变連續性微分方程式,該方程式經過一些改变后可以表示如下:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 (N_x + N_y) - 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.13)$$

式中 ∇^2 ——拉普拉斯 (Лаплас) 算子 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ 。

方程式(1.2)中的第一式按 x 微分,第二式按 y 微分,并相加之,即得:

$$-2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y},$$

这时以内力表示的形变連續性方程式,其最后形式为:

$$\nabla^2 (N_x + N_y) = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right). \quad (1.14)$$

在实际情况中,通常只遇到体积力等于零或为常数(自重)的二种情形。在第一种情形下,平衡条件(1.2)为下式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

如果引用应力函数 F' , 則这些方程式按照下列公式同样符合:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= - \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}; \\ N_y &= - \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}; \\ T_{xy} &= - \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

这时形变連續性方程式就变为重諧和微分方程式：

$$-\frac{\partial^4 F'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F'}{\partial y^4} = F'^2 \nabla^2 F' = 0. \quad (1.17)$$

形变分量同样可以用应力函数来表示。事实上，由表达式(1.7)、(1.10)和(1.16)即得：

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} \right); \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} \right); \\ e_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

由式(1.7)和(1.8)，得下列公式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yy}}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

由此同样求得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial^2 F'}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 F'}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial^3 F'}{\partial y^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 F'}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

按方程式(1.18)和(1.20)求得的位移 u 和 v ，其精确性达任意的綫性分量式：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \omega y + u_0; \\ \bar{v} &= -\omega x + v_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

这就符合于整个薄板如同绝对刚体在其平面中的位移。这种位移，我們称为刚性位移。

上述的公式可以不难地应用到当

$$\bar{X} = \text{常数}, \quad \bar{Y} = \text{常数}$$

时薄板平面上均布体积力(自重)作用的情形。

研究自重作用的例子见第二章。

薄板平面上有按任意规律分布的体积力作用的一般情形下，問題的解算就稍为复杂。对于这一类情形，我們不打算去討論，因为它实际意义較小。

建筑实际中在位于其平面中的各力作用下承受弯曲的矩形薄板，即称为腹板梁。下面我們都假定坐标軸 x 和 y 平行于所研究的腹板梁的各周边。

由上述可见，計算腹板梁的問題归結于解算重譜和方程式(1.17)，或者精確地說，归結于求算这样的一个应力函数 F ，这个函数既是这个方程式的解，也符合于所研究的腹板梁周边处已知的边界条件。根据腹板梁周边上引起梁中受力状态的荷載的性質，可以遇到各种类型的边界問題。其中最重要的是：

1) 第一种主要边界問題——已知腹板梁周边上的外力而求算該梁的弹性平衡。

2) 第二种主要边界問題——已知腹板梁周边各点的位移而求算該梁的弹性平衡。

同样也可以提出一些各种混合的边界問題：如腹板梁周边各边上已知的边界条件，有以位移表示，又有以应力表示，或甚至在同一边上具有混合的形式。

具有最大实际意义的是第一种主要边界問題和各种类型的混合边界問題。純粹的第二种主要边界問題，在实际上不会遇到，而为了研究的全面，在下面我們將最扼要地論述这一問題。

第二节 重譜和方程式的特別积分

解算数学物理問題的主要和最广泛采用的方法之一是分列变数法。我們即按照这个方法来求算我們問題的基本方程式(1.17)的解，該解可表示如下：

$$F = XY, \quad (2.1)$$

式中 X 和 Y ——只含一个变数 x 和 y 的函数。

把式(2.1)代入式(1.17)，得：

$$X^{\text{IV}}Y + 2X''Y'' + XY^{\text{IV}} = 0. \quad (2.2)$$

显然,为了分列变数在这个方程式中可令:

$$Y'' = -k_y^2 Y, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (2.3)$$

或

$$X'' = -k_x^2 X, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}. \quad (2.4)$$

总积分这些方程式,显然得:

当 $k_x \neq 0$ 和 $k_y \neq 0$ 时:

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b} + B_n\right); \\ X_m &= C'_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a} + B'_m\right), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

当 $k_x = k_y = 0$ 时:

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= C_0 + B_0 \frac{y}{b}; \\ X_0 &= C'_0 + B'_0 \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

把式(2.3)和(2.4)代入式(2.2),我們即得普通的微分方程式:

$$X^{\text{IV}}_n - 2k_y^2 X''_n + k_y^4 X_n = 0 \quad (2.7)$$

和

$$Y^{\text{IV}}_m - 2k_x^2 Y''_m + k_x^4 Y_m = 0. \quad (2.8)$$

这些方程式的总积分可用普通的方法求得。

现在来研究参数 k_x 和 k_y 不等于零的情形。

兹引用下列符号:

$$\frac{a}{b} = \gamma, \quad k_y a = \beta, \quad k_x b = \alpha, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{x}{a} = \xi,$$

以及下列函数: