大学数学应用与提高丛书

XIANXING DAISHU YINGYONG YU TIGAO

蔡光兴　李子强　主编

线性代数应用与提高

朱永松　杨策平　主编

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学应用与提高丛书

线性代数应用与提高

朱永松　杨策平　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为《大学数学应用与提高丛书》之一，是根据全国工科院校线性代数教学大纲和研究生入学考试大纲要求编写的，是按蔡光兴主编、科学出版社出版的《线性代数》展开编写的辅助教材。全书共十二章：行列式、矩阵及其运算、消元法与初等变换、向量与矩阵的秩、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间、线性变换、欧几里德空间、多项式、线性代数实验. 每章含教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题，书末附有习题参考答案。

本书具有丛书共同特点：重视数学方法、注重学生应用能力的培养与提高，通过典型例题介绍各种解题思路、方法和计算技巧，通过内容提要、疑难解答帮助读者把高等数学中的概念予以融会贯通，通过应用与提高、练习题训练、数学实验训练进一步拓宽解题思路，提高综合应用能力。

本书为高等院校本、专科学生的线性代数课程辅助教材，也可供成人教育和自学线性代数的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，本书无疑具有重要的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数应用与提高/朱永松，杨策平主编. —北京：科学出版社，2003

ISBN 7-03-012047-7

(大学数学应用与提高丛书)

Ⅰ.线… Ⅱ.①朱…②杨… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第070484号

责任编辑：冯贵层/责任校对：王望荣

责任印制：高　嵘/封面设计：李冬华

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版　各地新华书店经销

*

2003年8月第　一　版　　开本：787×1092　1/16

2003年8月第一次印刷　　印张：16 1/4

印数：1—8000　　　　　　字数：398 000

定价：22.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学应用与提高丛书》编委会

主　编　蔡光兴　李子强

副主编　郑　列　朱永松

编　委　（以姓氏笔画为序）

王晓芬　方　瑛　付小兰　刘　磊　许松林
陈水林　张水坤　张志飞　张凯凡　李逢高
李家雄　杨策平　罗小专　周启元　柯　云
胡友思　胡汉儒　费锡仙　耿　亮　黄　斌
黄　毅　黄　慧　章曙雯　喻方元　熊　萍

前　言

《大学数学应用与提高丛书》是与高等院校学生必修的三门大学数学课程：高等数学、线性代数、概率统计相配套的辅助教材.编写这套丛书主要基于三大方面的原因：第一，高等教育改革的实施，这三门大学数学课程授课时数在减少，受到时间的限制，概念的深入探讨、知识的融会贯通、知识面的扩展必受到一定影响，因此，学生们渴望有一套弥补上述不足、切合实际的辅助教材；第二，后续课程及研究生入学考试对三门大学基础数学课程在教学大纲范围内有深化趋势，因此，对大批报考硕士研究生的学生而言，他们渴望有一套针对性强的考研复习资料；第三，进入21世纪，社会对人才提出了更高要求，大学数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识，为后续课程或其他科学打基础、提供工具，更重要的是传授数学思路、数学方法，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力、计算数学能力和应用数学能力.为此，我们组织了一批有着丰富教学经验和开拓创新精神的教师编写了这套辅助教材.丛书分三册：《高等数学应用与提高》、《线性代数应用与提高》、《概率统计应用与提高》，丛书主编为蔡光兴、李子强，副主编为郑列、朱永松.在内容上，丛书各册每章含有：

(1) 教学基本要求.是每章教学的基本要求.

(2) 内容提要.是每章基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中起提纲挈领的作用.

(3) 典型例题.根据章节知识点，给出若干典型例题，介绍各种解题思路、方法和计算技巧.通过例题，使读者做到举一反三，提高独自解题能力.

(4) 疑难解答.提出若干疑难问题，并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法，培养学生正确思考问题、解决问题的能力.

(5) 应用与提高.结合本章知识内容，给出在实际应用中的实例及本章中难度较高的综合题或研究生考试题.

(6) 练习题.作为基本训练，训练学生各种能力.

(7) 自测题.用于自我检测，及时了解自己的水平.

(8) 上机实验.上机实验都集中放在书末，学生可在教师指导下上机练习，或自学用，以增强学生计算应用能力.

本套丛书具有如下共性：

(1) 立足基础.通过教学要求、内容提要、典型例题、疑难解答，使学生对本章所要求掌握的基本概念、基本方法做到融会贯通.

(2) 重视数学思想方法、综合应用数学能力的训练与培养.通过典型例题、提高题、训练题来培养学生的数学解题能力和数学知识的综合运用能力.

(3) 突出应用与数学建模思想.通过实例，培养学生将实际问题转化为数学问题的数学建模能力，并运用数学知识加以解决的应用能力.

(4) 设置了数学实验，注重数学软件在高等数学、线性代数、概率统计中的操作与应用，以提高学生学习兴趣，培养学生运用软件与数学知识解决实际问题的能力.

《线性代数应用与提高》作为《大学数学应用与提高丛书》之一，具有丛书的共同特点与章节编写体系，按通用的教材内容，结合教材与教学改革的需要，展开编写，每章含教学基本要

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题，并在书末专门用一章讲述线性代数实验. 通过这些内容的教学，使学生对基本概念、基本方法做到融会贯通，并能将实际问题转化为数学模型，提高学生运用数学知识与数学软件解决实际问题的能力及综合运用能力.

本书由朱永松、杨策平主编，李逢高、方瑛任副主编. 各章编写人员如下：第一章，方瑛、耿亮；第二章，朱永松；第三章，杨策平、任潜能；第四章，杨策平、任潜能；第五章，刘磊、张凯凡；第六章，李逢高、熊萍；第七章，许松林、周启元；第八章，蔡光兴、王晓芬；第九章，张水坤；第十章，周启元、蔡光兴；第十一章，柯云、胡友思；第十二章，朱永松. 最后由蔡光兴、朱永松、杨策平统稿，蔡光兴定稿.

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请广大读者批评指正，以便再版时予以修订.

编　者

2003 年 6 月

目　　录

第一章 行 列 式

一、教学基本要求

(1) 了解行列式的定义.

(2) 理解行列式的性质.

(3) 掌握按行或列展开公式计算行列式.

(4) 掌握二阶、三阶行列式的计算法,会计算四阶、五阶数字行列式的值.

(5) 会计算简单的 n 阶行列式.

(6) 掌握克莱姆法则及相关结论.

(7) 知道拉普拉斯定理及行列式的乘法规则.

二、内 容 提 要

(一) 排列及逆序数

定义1 把 n 个不同元素排成一排,称做这 n 个元素的一个排列. n 个不同元素的全排列的总数为 $n!$.

定义2 在 n 个元素的任一排列中,当两个元素的先后次序与标准次序不同时,称这两个元素构成一个逆序. 一个排列中所有逆序数的总和称为这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

(二) 对换及其性质

定义3 在排列中将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的手续称为对换,用符号 (i,j) 表示交换排位在第 i、第 j 的两个元素.

定理1 任意两个 n 阶排列总可以通过一系列对换互变.

定理2 对换改变排列的奇偶性.

定理3 当 $n\geqslant 2$ 时, n 个元素的奇排列与偶排列个数相等,各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

(三) n 阶行列式定义

定义4 由 n^2 个数排成 n 行 n 列的表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数 D,这个数 D 即为一个 n 阶行列式,且

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里$j_1j_2\cdots j_n$是1 2 … n 的一个排列，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有n阶排列求和.

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也可记为$\det(a_{ij})$或$\triangle(a_{ij})$，而$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$则称为此$n$阶行列式的展开式.

（四）行列式的性质

性质1 行列式与其转置行列式相等.

性质2 互换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

推论 若行列式有两行（或两列）完全相同，则此行列式等于零.

性质3 行列式的某一行（或一列）中所有元素都乘以同一数k，等于用数k乘以此行列式.

推论1 行列式中某一行（或一列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论2 如果行列式中有一行（或一列）的元素全部为零，则这个行列式等于零.

推论3 如果一个行列式有两行（或两列）的元素全部对应成比例，那么这个行列式等于零.

性质4 若行列式的某一列（或一行）的元素都是两数之和，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5 把行列式某一行（或一列）的各元素加上另一行（或一列）对应元素的k倍后，行列式的值不变.

（五）代数余子式的重要性质

定义5 在n阶行列式中把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式.

性质6 一个n阶行列式与其代数余子式有如下关系

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

及

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

这里$i,j=1,2,\cdots,n$.

（六）克莱姆法则

一个含n个未知数n个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_n\end{cases} \tag{1-1}$$

当它的系数行列式$D\neq 0$时，有且仅有一个解

$$x_j=\frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中D_j是把系数行列式中的第j列元素对应换成方程组的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$而得到的n阶行列式.

（七）关于线性方程组解的重要结论

(1) 若线性方程组(1-1)的系数行列式$D\neq 0$，则此线性方程组一定有解且解是惟一的.

(2) 若线性方程组(1-1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式$D=0$.

(3) 若线性方程组(1-1)对应的齐次线性方程组系数行列式$D\neq 0$，则此齐次线性方程组有惟一解即零解.

(4) 若线性方程组(1-1)对应的齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式$D=0$.

（八）拉普拉斯定理及行列式的乘法

定义6 在n阶行列式中，任意指定r行r列$(1\leqslant r\leqslant n)$，位于这些行列交点处的$r^2$个元素构成的$r$阶行列式$M$称为原行列式的一个$r$阶子式. 在$n$阶行列式中，划去某个$r$阶子式$M$所在的行与列后，剩下$n-r$个行与$n-r$个列上的元素构成一个$n-r$阶子式$N$，称这一对子式$M$与$N$互为余子式.

设r阶子式M是由行列式中第$i_1,i_2,\cdots,i_r$行和第$j_1,j_2,\cdots,j_r$列相交处元素构成的，且N是M的余子式，则称$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r}N$为$M$的代数余子式.

拉普拉斯定理 在n阶行列式D中任意选定k行或k列$(1\leqslant k\leqslant n-1)$，则$n$阶行列式$D$等于位于这$k$行或$k$列中的一切$k$阶子式$M_i(i=1,2,\cdots,C_n^k)$与其对应的代数余子式$A_i$乘积之和，即

$$D=\sum_{i=1}^{C_n^k}M_iA_i$$

行列式的乘法规则 设两个n阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad 和 \quad D_2=\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

若D_1,D_2的乘积为C,即$D_1D_2=C$,则C为n阶行列式$\triangle(c_{ij})$,其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+c_{in}b_{nj}$,即$c_{ij}$是$D_1$中的第$i$行元素与$D_2$中的第$j$列的对应元素的乘积之和($i,j=1,2,\cdots,n$).

三、典型例题

(一) 排列的逆序数

例1 计算下列各排列的逆序数,并确定其奇偶性.

(1) 2 4 1 3

(2) $(2k)\ 1\ (2k-1)\ 2\ (2k-2)\ 3\ (2k-3)\ \cdots\ (k+1)\ k$

(3) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots\ 2$

解 (1) 分别算出排在1,2,3,4前面比它大的数码的个数,即分别找出4个元素在排列中构成的一切逆序.

2 排在首位,故逆序为0;

4 是最大的数,故逆序总为0;

1 的前面比1大的数有2和4两个数,故逆序为2个;

3 的前面比3大的数有1个数(4),故逆序为1个.

因此,排列的逆序数是

$$\tau(2\ 4\ 1\ 3)=0+0+2+1=3$$

即所给排列为奇排列.

(2) 分别算出排列中每个元素前面比它大的数码的个数.

$2k$ 排在首位,故逆序为0个;

1 的前面比1大的数有1个($2k$),故逆序为1个;

$2k-1$ 的前面比$2k-1$大的数有1个($2k$),故逆序为1个;

2 的前面比2大的数有两个($2k,2k-1$),故逆序为2个;

$2k-2$ 的前面比$2k-2$大的数有2个($2k,2k-1$),故逆序为2个;

……

$k-1$ 的前面比$k-1$大的数有$k-1$个($2k,2k-1,\cdots,k+2$),故逆序为$k-1$个;

$k+1$ 的前面比$k+1$大的数有$k-1$个($2k,2k-1,\cdots,k+2$),故逆序为$k-1$个;

k 的前面比k大的数有k个($2k,2k-1,\cdots,k+2,k+1$),故逆序为k个.

于是该排列的逆序为

$$\tau=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k=k^2$$

故所给排列的奇偶性与k的奇偶性相同.

(3) 在此排列中,前$n+1$个元素即$1\ 3\ \cdots\ (2n-1)2n$的逆序均为0个,从第$n+2$个元素开始,有:

$2n-2$ 的前面比$2n-2$大的数有2个($2n-1,2n$),故逆序为2个;

$2n-4$ 的前面比$2n-4$大的数有4个($2n-3,2n-2,2n-1,2n$),故逆序为4个;

……

2 的前面比2大的数有$2n-2$个($3,4,\cdots,2n-1,2n$),故逆序为$2n-2$个.

因此排列的逆序数为

$$\tau=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$$

故所给排列为偶排列.

例2 如果 n 个数字的排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数是 k，那么排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解 方法一 设在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中各数字的逆序分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，则

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k,$$

设各数字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在这 n 个数字构成的标准排列中从左到右分别位于第 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 位，这里 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 分别取 $1,2,\cdots,n$ 各个数.

在新排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中，对数字 x_i 而言，在标准排列中是第 m_i 位，即比 x_i 大的数有 $n-m_i$ 个，在原排列中 x_i 的逆序为 k_i，即有 k_i 个比 x_i 大的数排在 x_i 前面，因而有 $n-m_i-k_i$ 个比 x_i 大的数排在 x_i 后面，故这 $n-m_i-k_i$ 个比 x_i 大的数在新排列中就排在 x_i 前面，即在新排列中，x_i 的逆序有 $n-m_i-k_i$ 个 $(i=1,2,\cdots,n)$，于是排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=(n-m_1-k_1)+(n-m_2-k_2)+\cdots+(n-m_n-k_n)\\&=n^2-(m_1+m_2+\cdots+m_n)-(k_1+k_2+\cdots+k_n)\\&=n^2-\frac{(n+1)n}{2}-k=\frac{n(n-1)}{2}-k\end{aligned}$$

方法二 在 n 阶排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中考察一对数 x_i 和 x_j，它们在两个排列中必然一为顺序，一为逆序，即这一对数在两个排列中的逆序数之和为1，而一个 n 阶排列中共有 C_n^2 对不同的数，这些数对的逆序数之和也就为 C_n^2，既然排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，则后一个排列的逆序数就为

$$C_n^2-k=\frac{1}{2}n(n-1)-k$$

方法三 如果在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_n 有 p_n 个逆序，则有 $(n-1)-p_n$ 个顺序，如果关于 x_{n-1} 有 p_{n-1} 个逆序，则有 $(n-2)-p_n$ 个顺序，……依此类推，$p_1+p_2+\cdots+p_n=k$.

上面讨论中的各数字的顺序在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中成为逆序，则逆序数为

$$\tau=(n-1)-p_n+(n-2)-p_n+\cdots+(n-n)-p_1=\frac{n}{2}(n-1)-k$$

方法四 在数字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的标准排列中，x_i 排在第 m_i 位，即比 x_i 大的数有 $n-m_i$ 个，故在题设的两个排列中，数字 x_i 的逆序共有 $n-m_i$ 个 $(i=1,2,\cdots,n)$.

于是两个排列逆序数之和为

$$(n-m_1)+(n-m_2)+\cdots+(n-m_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_n=1+2+\cdots+n$.

又已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，于是排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)-k$.

例3 讨论排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的奇偶关系.

解 由例2知

$$\tau(x_1x_2\cdots x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数，故这时 $x_1x_2\cdots x_n$ 与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的奇偶性相同；

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数，这时 $x_1x_2\cdots x_n$ 与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的奇偶性相反.

（二）行列式的计算及证明

1. 利用行列式的定义

例4 在六阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 各应带什么符号？

解 方法一 交换两项中元素的顺序，使其对应的行标成标准排列，即

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65} \quad 及 \quad a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$$

这两项列标排列分别为

$$4\ 3\ 1\ 2\ 6\ 5 \quad 及 \quad 4\ 5\ 2\ 3\ 1\ 6$$

这两个排列的逆序数为6和8，均为偶排列，故所给两项在六阶行列式中均应带正号.

方法二 分别算出两项行标及列标排列的逆序数

即
$$2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 6,\ 3\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5 \tag{1-2}$$
和
$$3\ 4\ 1\ 5\ 6\ 2,\ 2\ 3\ 4\ 1\ 6\ 5$$
的逆序数.

由(1-2)中两个排列逆序数都是4，这两个排列的逆序数之和为偶数，故所给前一项应带正号；同样，所给的后一项也应带正号.

例5 计算下列行列式：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$　　(2) $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 (1) 根据行列式的定义知，行列式展开后，每项都是取自行列式不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 一般项形式为

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n}$$

这里 τ 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

仅考虑各因子同时取非零元素的情形：

对 a_{1p_1} 而言，必须取 $p_1=n-1$，即 $a_{1p_1}=a_{1,n-1}=1$；

对 a_{2p_2}，必须取 $p_2=n-2$，即 $a_{2p_2}=a_{2,n-2}=2$；

……

对 $a_{n-1,p_{n-1}}$，必有 $p_{n-1}=1$，即 $a_{n-1,p_{n-1}}=a_{n-1,1}=n-1$；

对 a_{np_n}，必有 $p_n=n$，即 $a_{np_n}=a_{nn}=n$.

则列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$，其逆序数

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)+0=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

从而
$$D_n=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n!$$

(2) 由定义

$$D_5=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$$

D_5 中各行可能的非零元素分别对应

$p_1=2,3$　$p_2=1,2,3,4,5$　$p_3=1,2,3,4,5$　$p_4=2,3$　$p_5=2,3$

注意：p_1, p_4, p_5 均只能取 2 或 3，才能使对应元素非零，而这是不可能的，故 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$不可能出现 5 个取自不同行、不同列的元素同取非零值的情形，故 $D_5=0$.

小结：

(1) 一般而言，利用行列式定义计算行列式，是从一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$入手，将行标按标准次序排列，讨论列标所有可能取值，从中寻求特点得到结果，并注意相应的符号.

(2) 容易证明，当一个 n 阶行列式中等于零的元素个数多于 n^2-n 个时，此行列式必等于零.

例 6 由行列式定义计算行列式展开式中 x^3 和 x^4 的系数.

$$D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

解 行列式展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

要出现 x^4，则每个元素要取含 x 的元素，故必有 $p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4$，即

$$(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$$

x^4 的系数为 10.

要出现x^3，当$p_1=2$ 时，p_2, p_3, p_4 依次可取1，3，4；当$p_1=4$ 时，p_2, p_3, p_4 依次可取2，3，1. 对应项是$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$及$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，故 x^3 的系数为$-2-3=-5$(当 $p_1=1$ 或 $p_1=3$ 时，不可能出现含 x^3 的项).

2. 将行列式三角化

例 7 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 将第 2，3，…，$n+1$ 列都加到第 1 列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \quad \text{(提取第 1 列公因子)}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

将第 1 列的 $-a_i$ 倍加到第 $i+1$ 列 $(i=1,2,\cdots,n)$

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

3. 降阶及递推法

例 8 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}$$

解 将第 2,3,4 行都加到第 1 行，再从第 1 行提出公因子 $a+b+c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}$$

再将第 2,3,4 列减去第 1 列，并按第 1 行展开得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ b & a-b & d-b & c-b\\ c & d-c & a-c & b-c\\ d & c-d & b-d & a-d\end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}a-b & d-b & c-b\\ d-c & a-c & b-c\\ c-d & b-d & a-d\end{vmatrix}$$

直接展开以上三阶行列式即可得最后结果. 也可对此三阶行列式再次降阶.

将此三阶行列式的第二行加到第一行，并从第一行中提取公因子 $a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ d-c & a-c & b-c\\ c-d & b-d & a-d\end{vmatrix}$$

将第二列减去第一列，再按第一行展开得

$$\begin{aligned}D_4&=(a+b+c+d)(a-b-c-d)\begin{vmatrix}a-d & b-c\\ b-c & a-d\end{vmatrix}\\ &=(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)\end{aligned}$$

例 9 计算 $D_n=\Delta(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$.

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com