Tulun jiqi suanfa

图论及其算法

殷剑宏　吴开亚　编著

Graph Theory and Its Algorithm

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书融有向图和无向图为一整体，系统地阐述了图论的基本概念、理论、方法及其算法。内容包括图的基本概念、Euler 图与 Hamilton 图、图论算法、树及其应用、平面图、独立集与匹配、网络流和 Petri 网。

书中附有大量例题和习题，而且大部分习题有详细解答。本书选材精炼全面，内容处理恰当且有新意，立论严谨，叙述条理清晰，语言流畅。

本书可用作高校计算机、电子、信息、管理、数学等专业本科生必修课教材，也可供相关专业的研究人员、教师及图论工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其算法/殷剑宏，吴开亚编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2003.7

ISBN 7-312-01558-1

Ⅰ.图…　Ⅱ.①殷…　②吴…　Ⅲ.①图论—高等学校—教材②图论算法—高等学校—教材　Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022481 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
合肥学苑印务有限公司印制
合肥飞天图文艺术设计中心照排
全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm/32　印张：9.25　字数：237 千
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
ISBN 7-312-01558-1/O·270　定价：18.00 元

前　言

图论是一门新兴学科，它发展迅速而又应用广泛。图论已广泛地应用于物理、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网络理论、管理科学、社会科学等几乎所有学科领域。另一方面，随着这些学科的发展，特别是计算机科学的快速发展，又大大地促进了图论的发展。因此，国内外许多高等院校，都把图论列为数学、计算机、电子、信息、管理等专业的必修专业课程。

进入21世纪，国内越来越多的高校，为与国际接轨，拓展学生的知识面，增强学生竞争能力，增设了许多新的课程，同时又大大压缩了各门课程的教学学时，因此，在较少的学时内，如何加强学生对基本概念和基本理论的掌握，如何提高学生的实际应用能力，是我们高校教师又面临的一个新课题。正是针对这种实际情况，参考国内外许多优秀图论著作，结合作者的教学经验，对多年讲授的《图论及其算法》讲稿进行修改，形成了本书。在选材与内容编排等方面，不仅凝聚了作者多年的教学经验和教学体会，而且重点体现了既便于学生学习又利于教师教学的思想。

由于图论是一门较新的学科，所以大多数图论作者在其著作、论文、演讲中都习惯使用自己的一套术语和记号，而且许多图论著作只讨论有向图，或只讨论无向图，或将有向图与无向图分列讨论。本教材则把有向图与无向图融为一个整体，在介绍图论的基本概念、术语和结论时，参考国内外大多数作者的叙述，选择最为通俗且大众化的语言加以描述，且都以定义的形式加以规范，避免了概念的歧义性，为读者特别是初学者，勾画了清晰的图论轮廓，从而能轻松地进入图论的系统学习和研究。

本教材充分体现了图论在研究离散量的结构和相互间关系的独到之处。在内容安排上,各章之间既相互联系,具备教材的系统性和科学性,同时各章又相对独立,自成体系,给读者的学习提供了极大方便。另外,在介绍图论基本概念和基本理论的同时,还强调了图论算法,因为算法的研究是计算机科学的核心。因而既能为学生学习后继专业课程打下良好的数学基础,又能增强学生抽象思维能力,启迪学生研究算法的智慧,从而达到培养学生创造力的教学目标。

运用图论理论解决实际问题,有着非常独特与聪明之处。要形成图论思维,巧妙运用图论方法,除了深刻理解概念和理论,除了勤奋和激情,还需要智慧和技巧。为此,本教材每章都精选了适量例题和习题,书末附有习题解答,同学们在认真做题的过程中,将会惊叹图论方法的聪明和技巧,充分体会图论的美妙与魅力!

本教材贯彻了教育部有关图论课程教学大纲要求,能在大纲规定的教学学时内,达到图论课程的教学目标。而且,学习本教材,只需要具备线性代数及二元关系的初步知识。

作者

2003年4月28日

目　次

第一章　图的基本概念

图论中所讨论的“图”，不是微积分、解析几何、几何学中讨论的图形，而是客观世界中某些具体事物间联系的一个数学抽象．如二元关系的关系图，在关系图中，我们不考虑点的位置及连线的长短曲直，而只关心哪些点之间有线相连．这种数学抽象就是“图”的概念．

第一节　图的概念

定义 1　图（graph）　所谓图 G 是一个三元组，记作 $G=\langle V(G),E(G),\varphi(G)\rangle$，其中

(1) $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$V(G)\neq\varnothing$，称为图 G 的**结点集合（vertex set）**．

(2) $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是 G 的**边集合（edge set）**，其中 e_i 为 $\{v_j,v_t\}$ 或 $\langle v_j,v_t\rangle$．若 e_i 为 $\{v_j,v_t\}$，称 e_i 为以 v_j 和 v_t 为**端点（end vertices）**的**无向边（undirected edge）**；若 e_i 为 $\langle v_j,v_t\rangle$，称 e_i 为以 v_j 为**起点（origin）**，v_t 为**终点（terminus）**的**有向边（directed edge）**．

(3) $\varphi(G):E\to V\times V$ 称为**关联函数（incidence function）**．

例 1　已知图 $G=\langle V(G),E(G),\varphi(G)\rangle$，其中

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$

$\varphi(G):E\to V\times V$，且

$\varphi(e_1)=\langle v_1, v_2\rangle \quad \varphi(e_2)=\langle v_3, v_2\rangle \quad \varphi(e_3)=\{v_3, v_3\}$

$\varphi(e_4)=\langle v_4, v_3\rangle \quad \varphi(e_5)=\langle v_4, v_2\rangle \quad \varphi(e_6)=\langle v_4, v_2\rangle$

$\varphi(e_7)=\langle v_5, v_2\rangle \quad \varphi(e_8)=\langle v_2, v_5\rangle \quad \varphi(e_9)=\{v_3, v_5\}$

$\varphi(e_{10})=\{v_3, v_5\}$

图 G 的一个**图形表示(diagrammatic presentation)**如图 1-1.

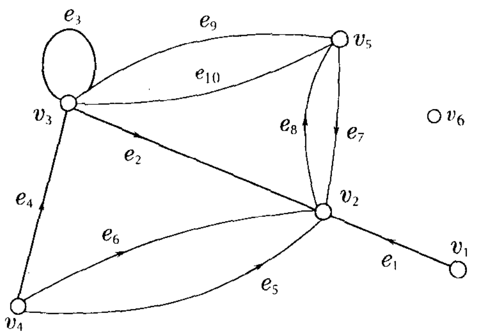


图 1-1

图 G 的图形表示,即用平面上的小圆圈表示图 G 的顶点,用点与点之间的连线表示图 G 中的边. 图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质. 当然,同一个图 G 可以有许多形状不同的图形表示.

定义 2　邻接结点(adjacent vertices)　关联于同一条边的两个结点称为邻接结点.

孤立结点(isolated vertex)　不与任何结点相连接的结点称为孤立结点(度数为零的结点).

邻接边(adjacent sides)　关联同一个结点的两条边称为邻接边.

环(loop)　两端点相同的边称为环或**自回路(circuit)**.

平行边(parallel edges)　两个结点间方向相同的若干条边称为平行边或**重边(multiple edges)**.

对称边(symmetric edges) 两端点相同但方向互为相反的两条有向边称为对称边.

定义 3 无向图(undirected graph) 每条边都是无向边的图称为无向图.

有向图(directed graph) 每一条边都是有向边的图称为有向图.

混合图(mixed graph) 图中不全是有向边,也不全是无向边的图称为混合图.

零图(null graph) 仅有一些孤立结点的图称为零图或**空图(empty graph)**.

平凡图(trivial graph) 只有一个孤立结点的图称为平凡图.

定义 4 多重图(multigraph) 含有平行边的图称为多重图.

简单图(simple graph) 无环并且无平行边的图称为简单图.

完全图(complete graph) 任何不同两结点之间都有边相连的简单无向图称为完全图.

注释 1 (1)在简单图 $G=\langle V(G),E(G),\varphi(G)\rangle$中,以 x 为起点 y 为终点的边至多有一条,因此,图中的边可以直接用顶点对表示,而关联函数 φ 就可以直接表示在其边集中,故可简记为 $G=\langle V(G),E(G)\rangle$.

(2)对于无向图 G,将 G 中的每条边用两条与 e 有相同端点的对称边 e 和 e' 来代替后得到一个有向图 D,这样得到的有向图 D 称为 G 的**对称有向图(symmetric digraph)**.由此可见,无向图可视为特殊的有向图.

(3)n 个结点的完全图记作 K_n,完全图 K_n 有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边.完全图的对称有向图称为**完全有向图(complete digraph)**,记作 K_n^*.

(4)图 G 的顶点个数还称为图 G 的**阶(order)**.

(5)对于有向图 D,去掉边上的方向得到的无向图 G 称为 D 的**基础图(underlying graph)**.反之,任一个无向图 G,将 G 的边指定一个方向得到一个有向图 D,称 D 为 G 的一个**定向图(oriented graph)**.

例 2 证明:在任意六个人的聚会上,要么有三人曾相识,要么有三人不曾相识.

证明 我们用 A、B、C、D、E、F 代表这六个人,若二人曾相识,则代表这二人的两顶点间连一条红边;否则连一条蓝边.于是原来的问题就等价于证明这样得到的图中必含有同色三角形.考察某一顶点,设为 F.与 F 关联的边中必有三条同色,不妨设它们是三条红边 FA、FB、FC.再看三角形 ABC.如果它有一条红边,设为 AB,则 FAB 是红边三角形;如果三角形 ABC 没有红边,则它本身就是蓝边三角形.

第二节 图的顶点度和图的同构

定义 1 设 G 是任意图,x 为 G 的任一结点,与结点 x 关联的边数(一条环要计算两次)称为 x 的**度数(degree)**.记作 $\deg(x)$ 或 $d(x)$.

设 D 是任意有向图,x 为 G 的任一结点,射入 x 的边数称为 x 的**入度(in-degree)**,记作 $\deg^+(x)$或 $d^+(x)$;射出 x 的边数称为 x 的**出度(out-degree)**,记作 $\deg^-(x)$或 $d^-(x)$.

注释 1 (1)有向图 D 中,任意结点 x 的度数 $\deg(x)=\deg^+(x)+\deg^-(x)$.

(2)用 $\Delta(G)$和 $\delta(G)$分别表示 G 的最大顶点度和最小顶点度,即 $\Delta(G)=\max\{d_G(x)\mid x\in V(G)\}$,$\delta(G)=\min\{d_G(x)\mid x\in V(G)\}$.

(3)设 D 是有向图,记

$$\Delta^+(D)=\max\{d_D^+(x)\mid x\in V(D)\},$$
$$\Delta^-(D)=\max\{d_D^-(x)\mid x\in V(D)\},$$
$$\delta^+(D)=\min\{d_D^+(x)\mid x\in V(D)\},$$
$$\delta^-(D)=\min\{d_D^-(x)\mid x\in V(D)\}.$$

(4)已知图 $G=\langle V,E\rangle$, $S\subseteq V$, $S\neq\varnothing$, $\forall v\in V$,称 $N_s(v)=\{u\mid u\in S$,且 u 与 v 相邻$\}$为 v 在 S 中的**邻域**. 特别,$N_G(v)$常简记为 $N(v)$. 显然,当 G 是简单图时,$d(v)=|N(v)|$.

定义 2 设 G 为无向图,对于 G 的每个结点 x,若 $d(x)=K$,则称 G 为 **K 正则的(k-regular)无向图**.

设 D 为有向图,对于 G 的每个结点 x,若 $d^+(x)=d^-(x)$,则称 D 为**平衡有向图(balanced digraph)**. 其中 x 称为**平衡点(balanced vertex)**.

在有向图 D 中,若 $\Delta^+(D)=\Delta^-(D)=\delta^+(D)=\delta^-(D)=K$,则称 D 为 **K 正则有向图**.

定理 1 每个图中,结点度数的总和等于边数的二倍. 即 $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|$.

证明 设图 G 有 m 条边,每条边均连接两个结点,即给两个结点的度数各加 1, m 条边总共提供 $2m$ 度数,即 $\sum_{x\in V}\deg(x)=2m$.

定理 2 每个图中,度数为奇数的结点必定是偶数个.

证明 设 V_1, V_2 分别是 G 中奇数度数和偶数度数的结点集,则由定理 1 知,

$$\sum_{x\in V_1}\deg(x)+\sum_{x\in V_2}\deg(x)=\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|$$

由于 $\sum_{x\in V_2}\deg(x)$为偶之和,必为偶数,而 $2|E|$是偶数,故得

$\sum_{x\in V_1}\deg(x)$为偶数，即$|V_1|$是偶数.

定理 3 在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点出度之和.

证明 因为每条有向边必对应一个入度和一个出度，若一个结点具有一个入度或出度，则必关联一条有向边，因此，有向图中各结点的入度之和等于边数，各结点出度之和也等于边数. 故定理得证.

例如，图 1-1 中，$d(v_1)=1, d(v_2)=6, d(v_3)=6, d(v_4)=3, d(v_5)=4, d(v_6)=0$. $\delta(G)=0, \Delta(G)=6$.

如果 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，称非负整数序列$(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_p))$为图 G 的**度序列**.

例如，图 1-1 所示图 G 的度序列为(1,6,6,3,4,0).

推论 1 非负整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_p)$是某个图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数.

证明 由定理 1 可知必要性成立. 对于充分性，取 p 个相异顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_p$，若 d_i 是偶数，就在 v_i 处作$d_i/2$ 个环；若 d_i 是奇数，在 v_i 处作$(d_i-1)/2$ 个环. 由于 $\sum_{i=1}^{p}d_i$ 为偶数，故 $d_1, d_2, \cdots, d_p$ 中有偶数个奇数顶点，从而将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i 两两配对并连上一条边. 最后所得的度序列就是$(d_1, d_2, \cdots, d_p)$. 证毕

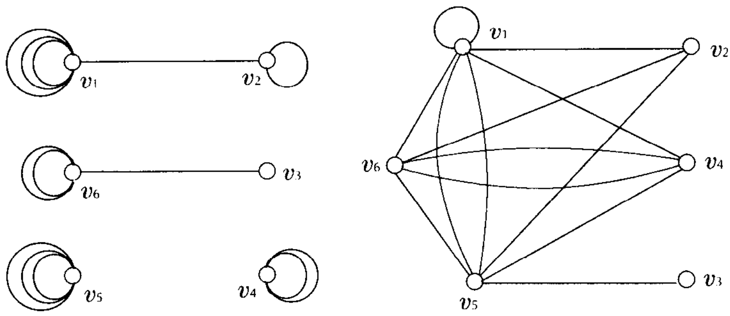
值得注意的是，以非负整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_p)$($\sum_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数)为度序列的图一般有很多.

例如，图 1-2 所示的 G_1 和 G_2 的度序列均是(7,3,1,4,6,5).

简单图的度序列称为**图序列**，图序列的讨论或判断要比度序

列的讨论困难得多.即使知道非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$是图序列,要构造相应的简单图仍是困难的.

Erdös 和 Callai 在 1960 年给出了图序列的一个判别方法.



G_1　　　　G_2

图 1-2

定理 4　非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)(d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p)$是图序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{p} d_i$ 是偶数,并且对一切整数 k,$1\leqslant k\leqslant p-1$,有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,d_i\}$$

证明略.

定义 3　设 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$和 $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$是简单图,若存在一个从 V_1 到 V_2 的双射函数 f,且 f 具有这样的性质,对 V_1 中的所有 x 和 y,x 和 y 在 G_1 中相邻,当且仅当 $f(x)$和 $f(y)$在 G_2 中相邻,就说 G_1 与 G_2 是**同构的(isomorphic)**,记作 $G_1\cong G_2$.这样的函数 f 称为**同构函数**.

换句话说,当两个简单图同构时,两个图的顶点之间具有保持相邻关系的一一对应.

到目前为止，判断两个图是否同构，还只能根据定义. 也就是说，两个图是否同构还没有很简便的判别方法.

两图同构的必要条件是：(1)两图结点数相等. (2)边数相等. (3)度数相同的结点个数相等. 但这仅是必要条件，不是充分条件.

例 1 如图 1-3 中，$G_1 \cong G_2$，$G_3 \cong G_4$，$G_5 \cong G_6$，$G_7 \cong G_8 \cong G_9$.

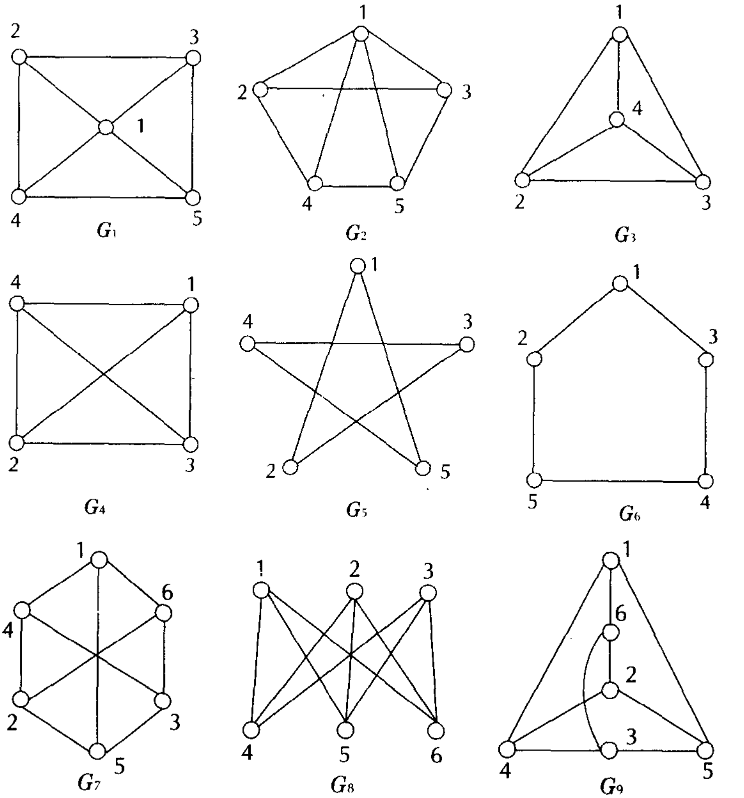


图 1-3

对于两个同构的图，易见它们有相同的结构，差异只是顶点和边的名称不同，或两个图的形状不同，由于我们主要关注的是图的结构性质，所以在画图时常常可以省略顶点和边的标号. 一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表.

例 2 画出所有不同构的具有 5 个结点，3 条边的简单无向图.

解 共有 4 个，分别如图 1-4 中的 G_1,G_2,G_3,G_4.

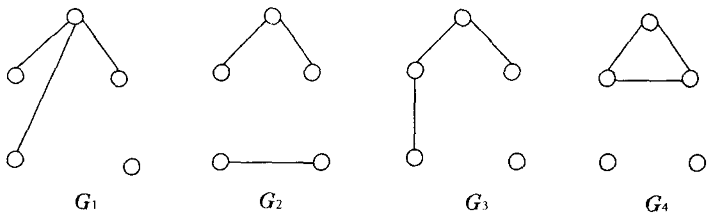


图 1-4

例 3 是否可以画一个简单无向图，使各点度数与下列的序列一致.

(1)2,2,2,2,2,2

(2)2,2,3,4,5,6

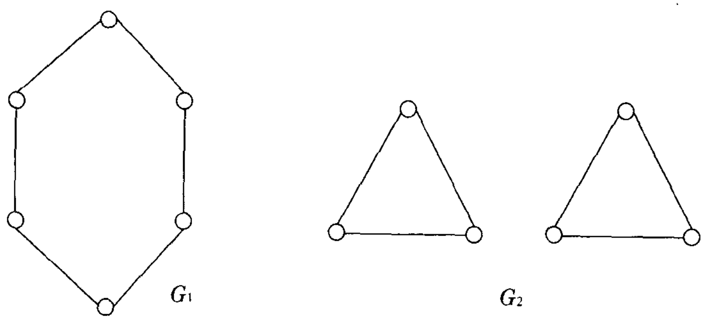


图 1-5

(3)1,2,3,4,4,5

解 (1)可以.如图1-5的G_1或G_2.

(2)不可以.在6个结点的简单无向图中，其中每个结点最多与其余5个结点相邻,即$\Delta(G)\leqslant 5$.

(3)不可以.任何图中,度数为奇数的结点只能有偶数个.

第三节 图的运算

定义1 设$G=\langle V,E,\varphi\rangle$与$G_1=\langle V_1,E_1,\varphi_1\rangle$是任两个图.若$V_1\subseteq V,E_1\subseteq E$,且$\varphi_1$是$\varphi$在$E_1$上的限制,则称$G_1$是$G$的**子图(subgraph)**,记作$G_1\subseteq G$.称$G$为$G_1$的**母图(supergraph)**.

若$G_1\subseteq G$,且$G_1\neq G$(即$V_1\subset V$或$E_1\subset E$),则称G_1是G的**真子图(prope subgraph)**.

若$G_1\subseteq G$,且$V_1=V$,则称G_1是G的**生成子图或支撑子图(spanning subgraph)**.

设$V_1\subseteq V$,且$V_1\neq\varnothing$,以V_1为顶点,以两端点均在V_1中的全体边为边集的G的子图,称为V_1的**导出子图(induced subgraph)**,记作$G[V_1]$.

设$E_1\subseteq E$,且$E_1\neq\varnothing$,以E_1为边集,以E_1中的边关联的全部顶点为顶点集的G的子图,称为E_1的导出子图,记作$G[E_1]$.

特别,若$V_1\subset V$,且$V_1\neq\varnothing$,则以$G-V_1$表示从G中删去V_1内的所有点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图.若$V_1=\{v\}$,常把$G-\{v\}$简记为$G-v$.类似地,设$E_1\subset E$,且$E_1\neq\varnothing$,$G-E_1$表示在G中删去E_1中所有边所得的子图.同样,$G-\{e\}$简记为$G-e$.

定义2 设$G=\langle V,E\rangle$是n阶无向简单图.以V为顶点集,以所有能使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图,