

# 环形空间内幂律流体 层流流场性质的分析

刘希圣 翟应虎

(华东石油学院)

## 摘 要

本文利用流体力学基本原理推导出纯粘性非牛顿流体环空螺旋流流场的基本方程组,在此基础上进一步从理论上分析了幂律流体环空螺旋流和轴向流层流流场的性质,得出了结果。为验证这些结果的正确性,测量了五种浓度的聚丙烯酰胺水溶液环空螺旋流和轴向流流场中的速度分布,实验结果和理论计算结果完全吻合。

本文所讨论的螺旋流流场可以作为石油钻井井内流场的理想化模型。本文所使用的理论分析及实验的方法可用于环空水力学的研究。

## 引 言

石油钻井领域中探讨钻井泥浆在井内流动的一般规律时都假设“钻柱和井壁(或套管壁)是规则的同轴圆柱面”,在此条件下计算泥浆在井内的流动压耗,判别井内泥浆的流态,讨论井内泥浆的速度和视粘度分布。

在上述假设的条件下如果不考虑内管的旋转作用,井内流场可被理想化抽象为两无限长同轴圆管间的轴向流流场(如图1所示),井内流体在不变的压力梯度 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 和重力作用下沿圆管轴线作一维直线流动。

如果考虑内管的旋转作用则可以用图2所示的流场作为井内流场的理想化模型。当流动稳定时流场内任一流体运动微团受轴向不变的压力梯度 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 、重力以及旋转内管的剪切作用在空间的运动轨迹为一等距圆柱螺旋线,习惯称这样的流场为螺旋流流场,这样的流动为螺旋流(Helical Flow)。

很明显螺旋流比轴向流更接近钻井实际情况,许多研究者都认为内管转动的作用破坏了环空流场内原有的速度及视粘度分布使流动压耗发生改变。钻井界有一篇文章对壤土泥浆螺旋流的压耗计算进行了探讨,<sup>[1]</sup>流体力学界和化工界对螺旋流做了一些研究,<sup>[2],[3],[4]</sup>但这些研究工作与钻井没有直接的联系。因此在一些有关的石油钻井工艺的专著中都没有叙述钻柱旋转时环空内流体的流动情况,而用于环空水力学计算的有关公式都是在没有考虑内管旋转的条件下得到的,显然这与钻井实际情况有一定的差异。

本文应用流体力学基本原理推导出不可压缩纯粘性非牛顿流体螺旋流层流流场的基本方程组并应用它从理论上对幂律流体在环空内的螺旋流和轴向流的层流流场进行了分析,最后

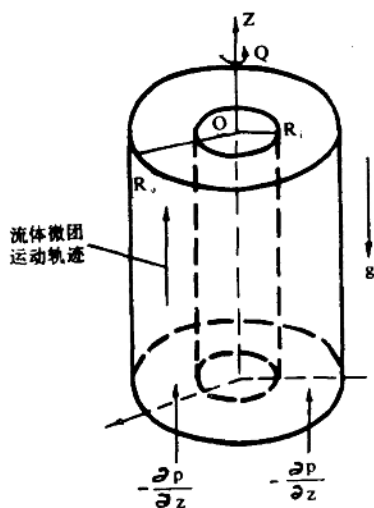


图1 轴向流流场及坐标系

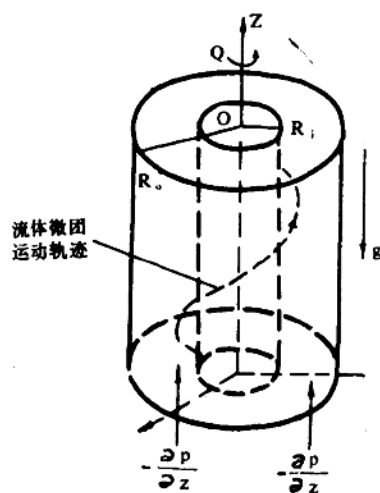


图2 螺旋流流场及坐标系

利用实验对部分理论分析结果进行了验证。这些工作为研究环空水力学的有关问题提供了必要的理论基础和方法。

## 螺旋流的基本方程

### 1. 有关概念

用图2中所示的柱面坐标系描述螺旋流流场。在该坐标系中，流场中的点用 $X(r, \theta, z)$ 表示，点 $X(r, \theta, z)$ 处的流体运动微团的速度向量 $\vec{W} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ （见图3）。将 $u_\theta$ 表示为 $u_\theta = r\omega$ ， $\omega$ 为流体运动微团的旋转角速度。点 $X(r, \theta, z)$ 处流体运动微团的应力张量用符号 $\langle T \rangle$ 表示。

$$\langle T \rangle = [\tau_{ij}]_{i,j=r,\theta,z} = \begin{vmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (1)$$

式中 $\tau_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) 分别为 $\langle T \rangle$ 的9个分量，方向见图3。在点 $X(r, \theta, z)$ 处的流体运动微团的变形率张量用符号 $\langle A \rangle$ 表示：

$$\langle A \rangle = [e_{ij}]_{i,j=r,\theta,z} = \begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{vmatrix} \quad (2)$$

式中各分量 $e_{ij}$ 的方向与对应的应力分量 $\tau_{ij}$ 的方向相同。

### 2. 纯粘性流体螺旋流的基本方程式

纯粘性流体包括纯粘性非牛顿流体和牛顿流体。本文所讨论的内容适用于不可压缩纯粘性流体的稳定的层流流动。

1) 纯粘性流体螺旋流层流的运动方程为：

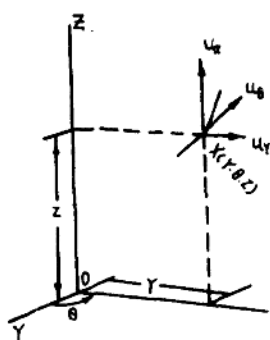


图3 柱面坐标系中的流体质点位置坐标及速度

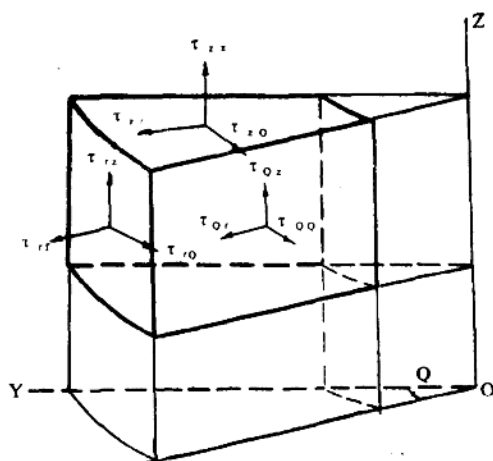


图4 柱面坐标系中的应力

$$\left. \begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} u_\theta^2 &= F_r + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right) \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r u_\theta &= F_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \right) \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中,  $F_r$ ,  $F_\theta$ ,  $F_z$  分别为流体运动微团单位质量的质量力在相应的坐标方向的分力;  $\rho$  为流体密度。

点  $X(r, \theta, z)$  处流体运动微团的速度  $\vec{W} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ , 根据螺旋流流场的性质可得:

- 1°  $\vec{W}$  与轴向坐标  $z$  及切向坐标  $\theta$  无关;
- 2° 径向分速度  $u_r$  为零;
- 3° 流动是稳定的, 与时间无关。所以可得螺旋流流场的速度表达式:

$$\vec{W} = \{u_r, u_\theta, u_z\} = \{0, u_\theta(r), u_z(r)\} \text{ 记作 } \{0, r\omega(r), u(r)\} \quad (4)$$

式中,  $\omega(r)$  为旋转角速度, 简记为  $\omega$ 。

考虑(3)式右边的应力项及质量力项

$$\tau_{r\theta} \text{ 与 } \theta \text{ 无关}, \quad \therefore \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\tau_{rz} \text{ 沿轴向均匀分布}, \quad \therefore \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\tau_{\theta\theta} \text{ 沿切向坐标 } \theta \text{ 均匀分布}, \quad \therefore \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

$$\therefore \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \quad (8)$$

$F_r$  为在点  $X(r, \theta, z)$  处单位质量的流体运动微团运动时受到的体积力在径向的分力, 应为平衡因旋转运动引起的离心力的向心力,  $F_r$  沿与  $r$  相反的方向指向点  $(0, \theta, z)$ , 所以可得:

$$F_r = -r\omega^2 \quad (9)$$

$$F_\theta = 0 \quad (10)$$

$F_z$ 是由于重力引起的单位质量的流体的体积力,

$$F_z = -g \quad (11)$$

将式(4)~(11)代入式(3)中得螺旋流的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = -\rho g \quad (14)$$

式中,  $\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{常量}$ ,  $\therefore$ 可取一常量  $a$ , 令

$$a = -\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = -\rho g \quad (15)$$

$-a$ 即作用在流体轴向的正应力与体积力的合力, 它用于克服流体的流动阻力, 使得流体在轴向保持稳定流动, 因而 $a$ 即为单位长度的环空管道内流体的流动压耗(以下简称压耗)。

将式(15)代入式(14), 解式(13)及(14)得:

$$\begin{cases} \tau_{r\theta} = \frac{B}{r^2} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \tau_{rz} = \frac{1}{2}ar + \frac{C}{r} \end{cases} \quad (B, C \text{ 分别为积分常数}) \quad (17)$$

## 2) 纯粘性流体螺旋流的本构方程:

对于牛顿流体和纯粘性非牛顿流体, 表示流场中流体运动微团的应力与应变关系的本构方程的一般形式为:

$$\langle T \rangle = -P \langle I \rangle + \eta(\Gamma) \langle A \rangle \quad (18)$$

式中  $P$ ——水静压强

$\langle I \rangle$ ——单位张量

$$\langle I \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$\eta(\Gamma)$ 称作视粘度, 对于牛顿流体 $\eta(\Gamma)$ 即粘性系数 $\mu$ ; 对于不同的非牛顿流体, 视粘度为 $\Gamma$ 的函数且有不同的形式。 $\Gamma$ 为变形率张量 $\langle A \rangle$ 的函数:

$$\Gamma = \frac{1}{2} t_r(\langle A \rangle^2) \quad (20)$$

在柱面坐标系中:

$$\langle A \rangle = \begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (21)$$

对于螺旋流, 将式 (4) 代入式 (21) 右边张量各分量表达式中得:

$$\langle A \rangle = \begin{vmatrix} 0 & r\frac{d\omega(r)}{dr} & \frac{du(r)}{dr} \\ r\frac{d\omega(r)}{dr} & 0 & 0 \\ \frac{du(r)}{dr} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r\omega' & u' \\ r\omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{tr}(\langle A \rangle^2) = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{vmatrix} 0 & r\omega' & u' \\ r\omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & r\omega' & u' \\ r\omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{vmatrix} r^2\omega'^2 + u'^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\omega'^2 & 0 \\ 0 & 0 & u'^2 \end{vmatrix} = r^2\omega'^2 + u'^2 \quad (23)$$

将式 (19), (22), (23) 代入 (18) 式中, 得出不可压缩纯粘性流体螺旋流层流流场的本构方程式:

$$\begin{vmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \eta(r^2\omega'^2 + u'^2) \begin{vmatrix} 0 & r\omega' & u' \\ r\omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

写成分量形式:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= \tau_{\theta\theta} = \tau_{zz} = -p \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \eta(r^2\omega'^2 + u'^2)r\omega' \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \eta(r^2\omega'^2 + u'^2)u' \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

### 3) 边界条件:

根据钻井特点, 环空内管旋转外管静止, 因而在内, 外管管壁处流体轴向速度均为零, 在外管管壁处流体切向速度为零, 在内管管壁处流体运动微团的切向旋转角速度和内管旋转角速度一致。可得边界条件:

$$u(r) \Big|_{r=R_o} = u(r) \Big|_{r=R_i} = 0 \quad (26)$$

$$\omega(r) \Big|_{r=R_o} = 0 \quad (27)$$

$$\omega(r) \Big|_{r=R_i} = \Omega \quad (28)$$

式中  $\Omega$ ——内管旋转角速度。

4) 纯粘性流体螺旋流场的速度及排量表达式:

环空内管半径  $R_i$  与外管半径  $R_o$  的比值是表征环空几何因素的一个重要物理参数, 用  $\phi$  表示:

$$\phi = R_i/R_o \quad (0 \leq \phi \leq 1) \quad (29)$$

用另一无量纲参数  $\xi$  表示空间点  $X(r, \theta, z)$  的径向坐标  $r$  与外管半径  $R_o$  的比值:

$$\xi = \frac{r}{R_o} \quad (\phi \leq \xi \leq 1) \quad (30)$$

设:

$$\beta = \frac{B}{R_o^2} \quad (31)$$

$$\lambda^2 = -\frac{2C}{aR_o^2} \quad (32)$$

分别代入式 (16) 及 (17) 得:

$$\tau_{r\theta} = \frac{B}{r^2} = \frac{\beta}{\xi^2} \quad (33)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2}ar + \frac{C}{r} = \frac{aR_o}{2} \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \quad (34)$$

由 (25) 式:

$$\tau_{r\theta} = \eta(\Gamma) r \omega'$$

$$\therefore \omega' = \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{R_o} \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\tau_{r\theta}}{r\eta(\Gamma)} = \frac{\beta}{\xi^2 R_o \eta(\Gamma)}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\beta}{\xi^3 \eta(\Gamma)} \quad (35)'$$

$$\therefore \omega(\xi) = \int_{\phi}^{\xi} \frac{\beta}{\eta(\Gamma) \xi^3} d\xi + C_1 \quad (35)''$$

( $C_1$  为积分常数)

代入边界条件  $\omega|_{r=R_i} = \omega|_{\xi=\phi} = \Omega$  及  $\omega|_{r=R_o} = \omega|_{\xi=1} = 0$ , 得旋转角速度表达式:

$$\omega(\xi) = \Omega + \beta \int_{\phi}^{\xi} \frac{d\xi}{\eta(\Gamma) \xi^3} \quad (36)$$

及

$$\Omega + \beta \int_{\phi}^1 \frac{d\xi}{\eta(\Gamma) \xi^3} = 0 \quad (37)$$

由 (25) 式:

$$\tau_{rz} = \eta(\Gamma) u'$$

$$\begin{aligned} \therefore u' &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{R_o} \frac{du}{d\xi} = \frac{\tau_{rz}}{\eta(\Gamma)} \\ &= \frac{aR_o}{2\eta(\Gamma)} \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{du}{d\zeta} = \frac{aR_o^2}{2} \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} \quad (38)$$

代入边界条件:  $\left. \frac{u}{r} \right|_{r=R_i} = \left. \frac{u}{\zeta} \right|_{\zeta=\phi} = 0$  及  $\left. u \right|_{r=R_o} = \left. u \right|_{\zeta=1} = 0$ , 得轴向速度表达式:

$$u(\zeta) = \frac{aR_o^2}{2} \int_{\phi}^{\zeta} \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta \quad (39)$$

及

$$\frac{aR_o^2}{2} \int_{\phi}^1 \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta = 0 \quad (40)$$

设单位时间内流经环空过水断面的体积流量为  $Q$ , 则

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{R_o \phi}^{R_o} u(\zeta) R_o \zeta d(R_o \zeta) \\ &= 2\pi R_o^2 \int_{\phi}^1 u(\zeta) \zeta d\zeta = 2\pi R_o^2 \int_{\phi}^1 \left( \int_{\phi}^{\zeta} \frac{aR_o^2}{2} \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta \right) \zeta d\zeta \\ &= \pi a R_o^4 \int_{\phi}^1 \left( \int_{\phi}^{\zeta} \zeta d\zeta \right) \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta = \frac{1}{2} \pi a R_o^4 \int_{\phi}^1 \frac{(1 - \zeta^2)(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta \end{aligned} \quad (41)$$

环空过水断面的平均速度表达式为:

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} = \frac{aR_o^2}{2(1 - k^2)} \int_{\phi}^1 \frac{(1 - \zeta^2)(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta \quad (42)$$

综上所述, 螺旋流流场的速度及排量表达式为

速度表达式:  $\vec{W}(\zeta) = \{0, r\omega(\zeta), u(\zeta)\}$

其中:  $\omega(\zeta) = \Omega + \beta \int_{\phi}^{\zeta} \frac{1}{\zeta^3 \eta(\Gamma)} d\zeta$

$$u(\zeta) = \frac{1}{2} a R_o^2 \int_{\phi}^{\zeta} \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta$$

排量表达式:  $Q = \frac{1}{2} \pi a R_o^4 \int_{\phi}^1 \frac{(1 - \zeta^2)(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta$

式中:  $\phi \leq \zeta \leq 1$ ,  $\beta, \lambda$  满足:

$$\begin{cases} \Omega + \beta \int_{\phi}^1 \frac{1}{\zeta^3 \eta(\Gamma)} d\zeta = 0 \\ \int_{\phi}^1 \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta \eta(\Gamma)} d\zeta = 0 \end{cases}$$

流场内, 在点  $r = R_o \lambda$  (即  $\lambda = \zeta$ ) 处, 轴向速度最高, 轴向流是螺旋流的一种特殊情况, 此时  $\Omega = 0$ 。

对于不同的纯粘性非牛顿流体, 将具体的视粘度表达式代入 (36) ~ (40) 式中可直接进行计算。

## 幂律流体螺旋流层流流场的理论分析

### 1. 有关方程

对幂律流体, 视粘度表达式为:

$$\eta(\Gamma) = K\Gamma^{\frac{n-1}{2}}$$

对螺旋流层流场:

$$\Gamma' = r^2\omega'^2 + u'^2$$

所以在幂律流体螺旋流层流场中, 视粘度为  $\eta(\Gamma) = K(r^2\omega'^2 + u'^2)^{\frac{n-1}{2}}$  (43)

式中  $K$ ——稠度系数 (达因·秒<sup>n</sup>/厘米<sup>2</sup>);

$n$ ——流性指数 (无量纲数)。

由式 (23), (25), (33), (34) 得:

$$\begin{aligned} (r^2\omega'^2 + u'^2) \cdot \eta^2(\Gamma) &= \Gamma \cdot \eta^2(\Gamma) = \tau_{r0}^2 + \tau_r^2 \\ &= \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

由式 (43) 得:

$$\Gamma = \left[ \frac{\eta(\Gamma)}{K} \right]^{\frac{2}{1-n}} = K^{\frac{2}{1-n}} [\eta(\Gamma)]^{\frac{2}{1-n}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 &= \Gamma \eta^2(\Gamma) \\ &= K^{\frac{2}{1-n}} [\eta(\Gamma)]^{\frac{2}{1-n}} \end{aligned}$$

$$\therefore \eta(\Gamma) = K^{\frac{1}{1-n}} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} \quad (44)$$

式 (44) 即幂律流体螺旋流场的视粘度表达式, 代入式 (36), (39), (41) 中得幂律流体螺旋流场的轴向速度、旋转角速度及排量表达式:

$$u(\xi) = \frac{a R_0^2}{2 K^{1/n}} \int_0^1 \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi \quad (45)$$

$$\omega(\xi) = \Omega + \beta \int_0^1 \frac{1}{K^{1/n} \xi^3} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi \quad (46)$$

$$Q = \frac{\pi a R_0^4}{2 K^{1/n}} \int_0^1 \frac{(1 - \xi^2)(\xi^2 - \lambda^2)}{\xi} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi \quad (47)$$

式中 待定常数  $\lambda, \beta$  满足:

$$\Omega + \beta \int_0^1 \frac{1}{K^{1/n} \xi^3} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi = 0 \quad (48)$$

$$\int_0^1 \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi = 0 \quad (49)$$

若已知压耗  $a$ , 联立式 (48), (49) 解出  $\lambda$  和  $\beta$ , 分别代入式 (44) ~ (47) 中就可以求出环空流场内每一点的速度、视粘度及排量。

若已知  $Q$  求压耗  $a$ , 可由式 (47) 得出方程:

$$Q - \frac{\pi a R_0^4}{2 K^{1/n}} \int_0^1 \frac{(1 - \xi^2)(\xi^2 - \lambda^2)}{\xi} \left[ \frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{a^2 R_0^2}{4} \left( \frac{\xi^2 - \lambda^2}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2}} d\xi = 0 \quad (50)$$

将式 (50) 与式 (48), (49) 联立求解即可。



## 2. 幂律流体环空螺旋流层流场的理论计算结果

从式(44)~(47)可以看出,螺旋流流场的参数表达式很复杂,难以从表达式中看出规律。因此本文选用具体参数进行计算,从分析对比不同参数得出的计算结果中找出螺旋流流场的一般规律。螺旋流流场的主要特点就是内管旋转,因此这里主要探讨内管转速 $\Omega$ 的变化对螺旋流流场性质的影响。

选用计算参数为: $R_o=6.6$ 厘米,  $R_i=2.4$ 厘米,  $n=0.6173$ ,  $K=1.75$ 达因·秒 $^{0.6173}$ /厘米 $^2$ , 内管转速 $\Omega=10, 20, 30, 40, 50, 60, 80$ (转/分), 环空内流体平均返速 $\bar{U}=10$ 厘米/秒。

将上述参数代入式(48),(49),(50)中得联立方程组,求出 $a$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ , 然后进行计算。整个计算过程用数值计算的方法在计算机上进行<sup>[5]</sup>。

用上述参数计算得出的 $\lambda$ ,  $\beta$ 及 $a$ 的值列于表1(只列出一组数据的计算结果);视粘度 $\eta$ 、轴向速度 $U$ 、切向速度 $r\omega(r)$ 及合速度 $W$ 在环空中的分布曲线分别见图5至8。

表1 计算参数及计算数据

| 环空尺寸及<br>流变参数                               | 平均返速<br>$\bar{U}$ 厘米/秒 | 内管转速<br>$\Omega$ 转/分 | 压耗<br>$a$ (达因/厘米 $^3$ ) | $\lambda$ 值 | $\beta$ 值 |
|---------------------------------------------|------------------------|----------------------|-------------------------|-------------|-----------|
| 外管半径:<br>$R_o=6.6$ 厘米                       | 10                     | 0                    | -4.75648                | 0.645987    | 0         |
|                                             | 10                     | 10                   | -4.74381                | 0.645179    | -0.253708 |
| 内管半径:<br>$R_i=2.4$ 厘米                       | 10                     | 20                   | -4.70609                | 0.644396    | -0.504102 |
|                                             | 10                     | 30                   | -4.66554                | 0.641736    | -0.727903 |
| 流性指数:<br>$n=0.6173$                         | 10                     | 40                   | -4.61890                | 0.639513    | -0.941951 |
|                                             | 10                     | 50                   | -4.57133                | 0.637000    | -1.13475  |
| 稠度系数:<br>$K=1.75$ 达因·秒 $^{0.6173}$ /厘米 $^2$ | 10                     | 60                   | -4.50833                | 0.634900    | -1.31246  |
|                                             | 10                     | 80                   | -4.39364                | 0.63059     | -1.63872  |

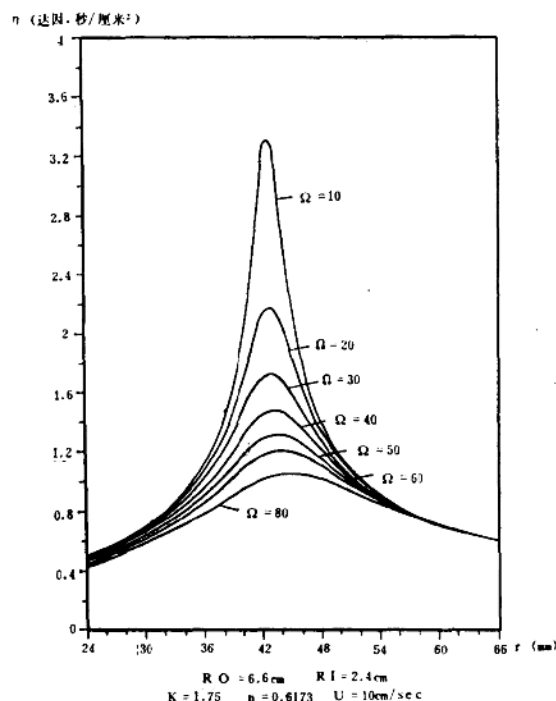


图5 幂律流体环空螺旋流流场的视粘度分布曲线

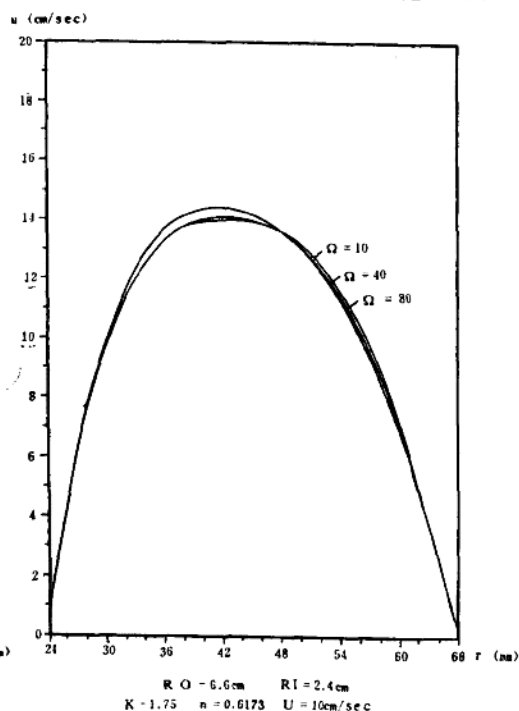


图6 幂律流体环空螺旋流流场的轴向速度分布曲线

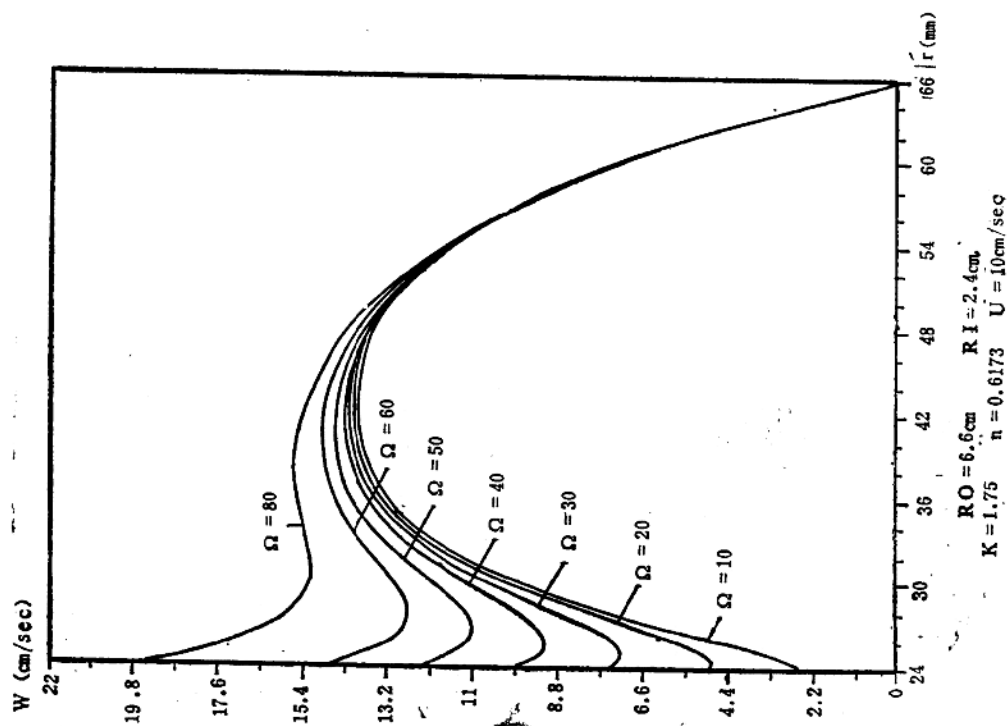


图7 螺旋流体螺旋流场的合速度分布曲线

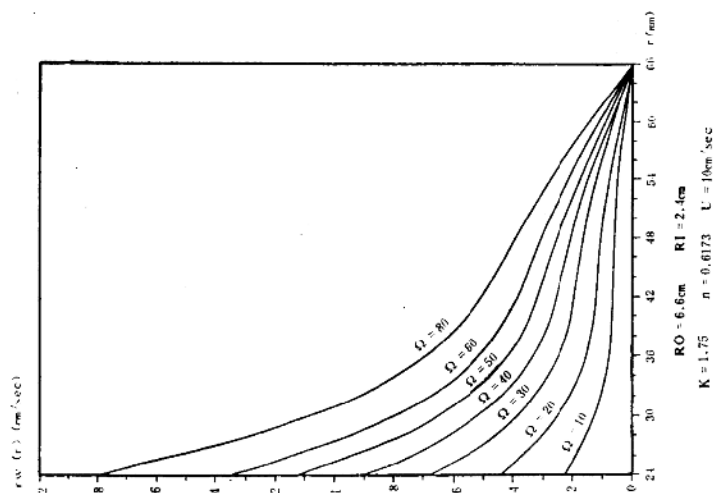


图8 螺旋流体环空螺旋流场的切向速度分布曲线

根据大量计算结果可以发现以下规律:

- 1) 对于假塑性幂律流体 ( $n < 1$ ), 内管旋转速度增大使流场流动压耗降低。
- 2) 对于假塑性幂律流体 ( $n < 1$ ), 内管旋转改变了环空内视粘度分布, 随着内管转速增大流场内视粘度下降, 视粘度分布曲线趋于平缓。
- 3) 随着内管旋转速度增大, 流体运动微团的合速度及切向速度增大。
- 4) 随着内管转速降低, 轴向速度分布曲线趋于平缓。

## 幂律流体轴向流层流流场的理论分析

将  $\Omega = 0$ ,  $\omega = 0$  代入幂律流体螺旋流的有关公式中就可以得出幂律流体环空轴向流的有关计算公式:

轴向速度计算式:

$$u(\zeta) = \frac{aR_o^2}{2} \int_0^1 \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \left| \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right|^{\frac{1-n}{n}} d\zeta \quad (51)$$

视粘度计算式:

$$\eta(\zeta) = K^{\frac{1}{n}} \left| \frac{aR_o}{2} \cdot \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right|^{\frac{n-1}{n}} \quad (52)$$

排量计算式:

$$Q = -\pi R_o^3 \left( \frac{aR_o}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^1 (1 - \zeta^2) \left( \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right) \left| \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right|^{\frac{1-n}{n}} d\zeta \quad (53)$$

式中,  $\lambda$  满足:

$$\int_0^1 \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \left| \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right|^{\frac{n-1}{n}} d\zeta = 0 \quad (54)$$

从 (54) 式中解出  $\lambda$  再代入其它各式进行计算, 为表示计算方便本文引入函数  $B(n, \phi)$ , 令

$$B(n, \phi) = - \int_0^1 (1 - \zeta^2) \left( \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right) \left| \frac{\zeta^2 - \lambda^2}{\zeta} \right|^{\frac{1-n}{n}} d\zeta \quad (55)$$

$$\text{则:} \quad Q = \pi R_o^3 \left( -\frac{aR_o}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} B(n, \phi) \quad (56)$$

$$\text{或:} \quad a = - \frac{2K}{R_o} \left( \frac{Q}{\pi R_o^3 B(n, \phi)} \right)^n \quad (57)$$

$\lambda$  和  $B(n, \phi)$  都是  $n$  和  $\phi$  的函数, 本文在表2及表3中给出了一些  $n$  和  $\phi$  值下的  $\lambda$  及  $B(n, \phi)$  的值, 可供实际计算  $Q$  或  $a$  时使用。

## 实验工作

为验证上述理论分析的正确性本文利用实验室模拟环空实验架测量了幂律流体螺旋流和轴向流流场中的轴向速度分布。图9为实验装置示意图, 整个环空管有效高度3.5米, 上部为

表 2 液体环空轴向流场的  $\lambda(n, \phi)$  值

| $\phi$ | 0 | 0.1      | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      | 0.6      | 0.7      | 0.8      | 0.9     |
|--------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 1      | 0 | 0.46365  | 0.54611  | 0.61474  | 0.677014 | 0.735534 | 0.791489 | 0.845556 | 0.898182 | 0.94986 |
| 0.90   | 0 | 0.457202 | 0.541218 | 0.61218  | 0.675376 | 0.734457 | 0.791196 | 0.845414 | 0.897988 | 0.94925 |
| 0.85   | 0 | 0.453636 | 0.540014 | 0.610796 | 0.674494 | 0.733908 | 0.790556 | 0.844989 | 0.89779  | 0.94907 |
| 0.80   | 0 | 0.44979  | 0.537664 | 0.609273 | 0.673486 | 0.733358 | 0.790191 | 0.844848 | 0.89767  | 0.9489  |
| 0.75   | 0 | 0.445669 | 0.535133 | 0.607612 | 0.672415 | 0.73589  | 0.789826 | 0.844706 | 0.89755  | 0.94876 |
| 0.70   | 0 | 0.441205 | 0.532421 | 0.605882 | 0.671218 | 0.731930 | 0.789461 | 0.84423  | 0.89743  | 0.94861 |
| 0.65   | 0 | 0.436363 | 0.529456 | 0.603944 | 0.669958 | 0.73116  | 0.78913  | 0.84439  | 0.89719  | 0.94847 |
| 0.60   | 0 | 0.431144 | 0.526201 | 0.601799 | 0.668635 | 0.730281 | 0.788366 | 0.843856 | 0.89701  | 0.94885 |
| 0.55   | 0 | 0.425443 | 0.52273  | 0.599514 | 0.667186 | 0.729402 | 0.787818 | 0.843573 | 0.89699  | 0.94824 |
| 0.50   | 0 | 0.4192   | 0.518824 | 0.597023 | 0.665548 | 0.728303 | 0.78727  | 0.843279 | 0.89697  | 0.94594 |
| 0.45   | 0 | 0.412532 | 0.51463  | 0.594254 | 0.663658 | 0.727204 | 0.7854   | 0.843006 | 0.89696  | 0.94324 |
| 0.40   | 0 | 0.405149 | 0.509985 | 0.59114  | 0.661641 | 0.725225 | 0.78581  | 0.842439 | 0.896955 | 0.94084 |
| 0.35   | 0 | 0.399113 | 0.504794 | 0.587817 | 0.659528 | 0.724347 | 0.784174 | 0.83872  | 0.896947 | 0.93828 |

表 3 液体环空轴向流场的  $B(n, \phi)$  值

| $\phi$ | 0        | 0.1      | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      | 0.6                      | 0.7                      | 0.8                      | 0.9                      |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1      | 0.25     | 0.143562 | 0.106444 | 0.076023 | 0.051074 | 0.031496 | $1.7 \times 10^{-3}$     | $7.669 \times 10^{-3}$   | $24.0199 \times 10^{-4}$ | $31.5259 \times 10^{-5}$ |
| 0.90   | 0.243243 | 0.137835 | 0.10053  | 0.07057  | 0.046603 | 0.028126 | $16.0567 \times 10^{-3}$ | $7.0766 \times 10^{-3}$  | $19.3609 \times 10^{-4}$ | $23.5845 \times 10^{-5}$ |
| 0.85   | 0.239437 | 0.134649 | 0.097275 | 0.067679 | 0.044208 | 0.02635  | $14.967 \times 10^{-3}$  | $5.8494 \times 10^{-3}$  | $16.9983 \times 10^{-4}$ | $19.8934 \times 10^{-5}$ |
| 0.80   | 0.235294 | 0.131193 | 0.093762 | 0.064533 | 0.041839 | 0.024515 | $12.597 \times 10^{-3}$  | $5.239 \times 10^{-3}$   | $14.7989 \times 10^{-4}$ | $16.8904 \times 10^{-5}$ |
| 0.75   | 0.230764 | 0.127486 | 0.089988 | 0.061163 | 0.038942 | 0.022537 | $11.3866 \times 10^{-3}$ | $4.6275 \times 10^{-3}$  | $12.6556 \times 10^{-4}$ | $13.8263 \times 10^{-5}$ |
| 0.70   | 0.225803 | 0.12342  | 0.085959 | 0.057624 | 0.036081 | 0.020548 | $10.1596 \times 10^{-3}$ | $4.00599 \times 10^{-3}$ | $10.5919 \times 10^{-4}$ | $10.6592 \times 10^{-5}$ |
| 0.65   | 0.220339 | 0.118954 | 0.081559 | 0.053797 | 0.033089 | 0.01847  | $8.8877 \times 10^{-3}$  | $3.3974 \times 10^{-3}$  | $8.8342 \times 10^{-4}$  | $8.0412 \times 10^{-5}$  |
| 0.60   | 0.214286 | 0.114105 | 0.076765 | 0.049809 | 0.029372 | 0.016316 | $7.6223 \times 10^{-3}$  | $2.8088 \times 10^{-3}$  | $6.8096 \times 10^{-4}$  | $5.7951 \times 10^{-5}$  |
| 0.55   | 0.207547 | 0.108699 | 0.07165  | 0.045332 | 0.026703 | 0.014138 | $6.375 \times 10^{-3}$   | $2.2477 \times 10^{-3}$  | $4.9882 \times 10^{-4}$  | $3.4445 \times 10^{-5}$  |
| 0.50   | 0.2      | 0.102844 | 0.065963 | 0.0107   | 0.023276 | 0.011895 | $5.1668 \times 10^{-3}$  | $1.7416 \times 10^{-3}$  | $3.573 \times 10^{-4}$   | $2.1601 \times 10^{-5}$  |
| 0.45   | 0.191489 | 0.09613  | 0.059868 | 0.035755 | 0.019697 | 0.009882 | $3.9912 \times 10^{-3}$  | $1.2551 \times 10^{-3}$  | $2.3835 \times 10^{-4}$  | $1.2249 \times 10^{-5}$  |
| 0.40   | 0.181818 | 0.08864  | 0.053169 | 0.030483 | 0.016073 | 0.007496 | $2.9076 \times 10^{-3}$  | $0.8548 \times 10^{-3}$  | $1.4413 \times 10^{-4}$  | $4.1364 \times 10^{-6}$  |
| 0.35   | 0.170732 | 0.080251 | 0.045851 | 0.025038 | 0.012471 | 0.005414 | $1.9294 \times 10^{-3}$  | $0.503 \times 10^{-3}$   | $0.7593 \times 10^{-4}$  | $3.1214 \times 10^{-7}$  |

有机玻璃管，下部为钢管。环空内管材料为镀锌钢管，有两种尺寸规格，外径分别为60mm及48mm。利用无级调速电机调节内管转速同时利用溢流水箱和阀门控制环空内流体流量。流体速度利用SXJ-01型激光测速仪测量，流量利用台秤和秒表测量。这些测量仪器及装置都事先进行了严格的标定并确认其准确性。

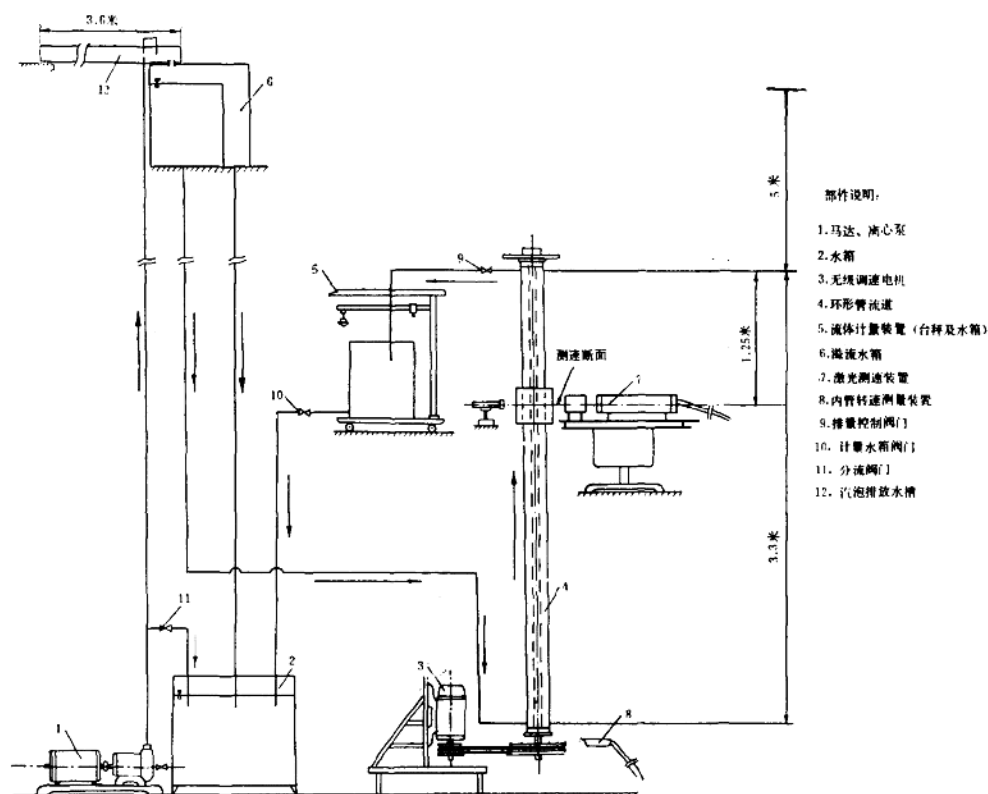


图9 实验装置简图

使用了五种浓度的聚丙烯酰胺水溶液作为试验液体（重量百分比浓度为0.16%，0.25%，0.292%，0.35%，0.415%），利用Fann-50型旋转粘度计测量了溶液的剪切应力——剪切应变曲线，大量的测量结果表明实验液体属幂律流体，可以根据流变曲线计算出K及n的值。图（10）为0.25%浓度的溶液的流变曲线，流变方程为：

$$\tau = 0.46 \times r^{0.767}$$

实验测量了上述五种流体在环空中的轴向流动速度，流体的n值在0.93~0.61范围内，K值在0.089~1.75范围内，平均上返速度在5~20厘米/秒范围内，内管转速在0~60转/分范围内。一共测出了98个速度剖面，实验数据利用计算机进行了严格的处理。对每一次实验根据实验条件参数利用理论计算公式计算出理论速度剖面曲线与实验结果表示在同一幅图上。图（11）为其中的一幅。

由于实验过程中实验条件控制得比较严格，流体的流变特性、速度以及内管转速的测量方法先进可靠，实验结果的重复性很好。

$\tau$  (达因/厘米<sup>2</sup>)

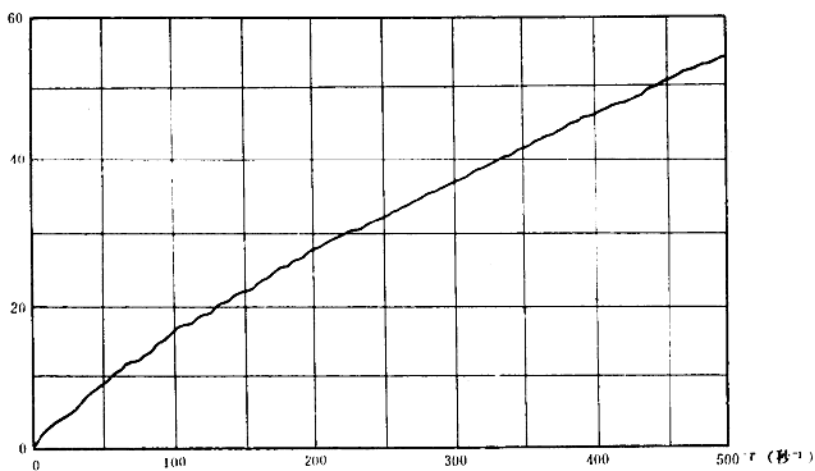


图10 聚丙烯酰胺水溶液的流变曲线 (浓度0.25%)

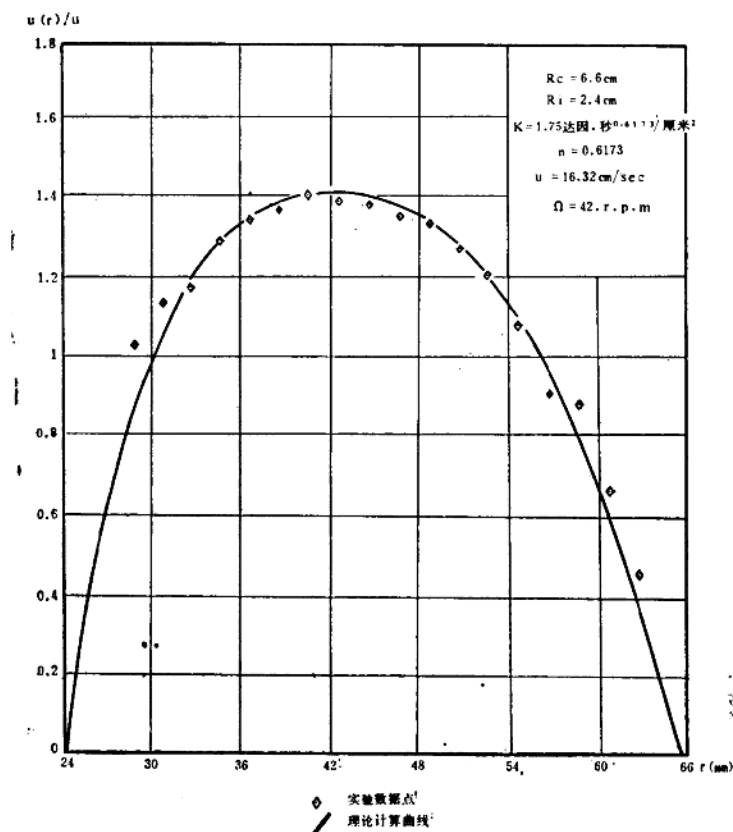


图11 幂律流体环空螺旋流场的速度分布

实验结果与理论分析结果能够很好地吻合，实验中总结出的轴向速度的分布规律与理论分析得出的完全一致。

## 结 论

综合分析理论分析部份以及实验部份得到的结果，得出如下结论：

1. 可以使用本文的方法对幂律流体以及其它纯粘性非牛顿流体的螺旋流层流流场进行分析，也可以直接使用本文得出的公式进行理论计算。

2. 在螺旋流流场中，内管旋转的作用改变了流场内的视粘度及速度分布，从而使流场性质发生改变。对于幂律流体 ( $n < 1$ )，随着内管旋转速度的增大，流场内视粘度降低，流动压耗降低，流体运动微团的旋转角速度及合速度增大。

3. 对某一给定的幂律流体，流变参数 (即  $K$  及  $n$ ) 只与流体本身的性质有关，与流动方式无关。描述幂律流体环空螺旋流流场应力与应变关系的本构方程应为如下的形式：

$$\begin{vmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + K (r^2 \omega'^2 + u'^2)^{\frac{n-1}{n}} \begin{vmatrix} 0 & r\omega' & u' \\ r\omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 参考文献

- [1] R.E.Walker, Othmen AL-Rawi, Helical flow of bentonite slurries, SPE 3108. 1970
- [2] R.S.Rivlin, Solution of some problems in the exact theory of some viscoelasticity J.Rational Mech. Anal. Vol.5, No.1 1956
- [3] B.D.Coleman & W. Noll, Helical flow of general fluids J.of Applied Physics Vol.30 No.10 1959
- [4] A.G.Fredrickson, Helical flow of an annular mass of Visco-elastic fluid Chem Eng. Sei. Vol.11 1960
- [5] 翟应虎, 环形空间内幂律流体和牛顿流体层流流场性质的分析 硕士学位论文 华东石油学院 1984