

清

(苏联) В. В. 考留巴金 М. И. 拉宾娜著

磁法勘探正演与反演 問題解法汇集

周 玖 周鐸庭譯

中国工业出版社

(苏联) B·B·考留巴金 M·И·拉宾娜著

磁法勘探正演与反演 問題解法汇集

周 玖 周鐸庭譯

~~中国工业出版社~~

本书是作者将 1956 年和 1956 年以前苏联国内外期刊中发表的、有关磁法勘探正、反演问题的各种解法汇编而成的。书中共分三大部分，即：磁法勘探正演问题解法、磁法勘探反演问题解法和上半空间中势的微商的计算方法。

本书内容丰富，值得我国从事磁法勘探工作的同志参考。

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ ЗЕМЛИ ИМ. О. Ю. ШМИДТА

№13 (180)

В. В. КОЛЮБАКИН И М. Н. ЛАПИНА

ОБЗОР

СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ

ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ

МАГНИТНОЙ РАЗВЕДКИ

ИЗД. АН СССР

МОСКВА—1960

* * *

磁法勘探正演与反演问题解法汇集

周 玖 周鑑庭译

*

地质部地质书刊编辑部编辑（北京西四羊市大街地质部院内）

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路丙10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

中国工业出版社第三印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $19^{3/8}$ ·插页8·字数445,000

1963年12月北京第一版·1963年12月北京第一次印刷

印数0001—1,670·定价（10-7）3.20元

*

统一书号：15165·1959（地质-196）

緒 言

本书論述的是物体被均匀磁化时磁法勘探正、反演問題的解法，这些方法在1956年和1956年以前苏联国内外的有关文献中已經发表过。

参考文献共計 476 种。

本书由三部分組成，在每一部分之前都有簡短的緒言，在緒言中概述了与該部分有关的解磁法勘探正、反演問題的各种方法及其基本原理。第一部分的內容是磁法勘探的正演問題。第一、三章是解正演問題的解析法，第二章是图解法。在第一部分緒言中，概述了均匀磁化时計算磁场公式的一般方法。书中所有公式都省略了推导部分。在已給出正演問題解法的各种已知形状物体中，把表面为二次曲面的物体单独归成一类。各种物体在本书中都采取了通用的名称。必要时，在物体名称下面的圓括弧中注明了磁荷沿其表面的分布情况。

第二部分的內容是磁法勘探反演問題的解法。第一、二、三章是根据假設的物体形状，求物体大小及埋深的方法。第四章叙述了不需此种假設条件的求解方法。在第二部分的緒言中，概述了这些方法及其使用时的注意事項。对每个方法都未詳細介紹其用法。

第三部分是輔助性的，它的內容是計算上半空間中及观测面上重力势、磁势及其微商的方法。书中沒有談到公式的推导。

书中采用了統一符号，其說明可參閱书前总表。在第一、三部分中，关于已知形状体的正演問題以及量板、諾模图、曲綫图的参考文献，其編号直接注明在各章节标题下的方括号中。在第二部分中，为了避免重复，仅注明了在第一部分中的有关頁数，在該頁上不仅可找到示意图，同时还有关于正、反演問題引用文献的編号。某些章节中的部分公式由作者导出。

目 录

緒 言	7
基本符号	8

第一部分 已知形状物体的磁法勘探正演问题

緒 言	1
第一章 解正演問題的解析法	4
I. 三度問題	4
1. 点极	4
2. 偶极子	5
3. 垂直偶极子	7
4. 磁棒	8
5. 垂直磁棒	9
6. 长 $2y_0$ 的水平极綫	10
7. 位于 yz 平面內的长 $2l$ 的傾斜极綫	12
8. 长 $2l$ 的垂直极綫	13
9. 垂直的半无限极綫	14
10. 沿 y 軸延伸的水平半无限极綫	14
11. 长 $2y_0$ 的两条異号水平极綫	16
12. 长 $2y_0$ 的水平偶极綫	17
13. 寬 $2b$ 、长 $2y_0$ 的傾斜荷磁帶	18
14. 寬 $2b$ 、长 $2y_0$ 的水平荷磁帶	19
15. 边长为 $2b$ 的水平荷磁正方形平面	19
16. 半径为 R 的水平荷磁圓板	20
17. 寬 b 、长 $2y_0$ 的水平偶极薄板	21
18. 寬 b 、长 $2y_0$ 的傾斜偶极薄板	22
19. 寬 b 、长 $2y_0$ 的两个相交的傾斜偶极薄板	22
20. 垂直磁化、有限长度的水平矩形柱体	23
21. 沿軸磁化的傾斜圓柱	25
22. 垂直磁化、寬 $2y_0$ 的半无限水平层	26
23. 垂直磁化的半球体	26
24. 垂直磁化的球截体	27
II. 二度問題	28
1. 无限极綫	28
2. 两条異号的无限极綫	29
3. 两条異号的无限极綫 ($\theta_0=0$)	30
4. 无限偶极綫	31
5. 无限偶极綫 ($\theta_0=0$)	32
6. 寬 $2b$ 的无限傾斜荷磁帶	34

7. 寬 $2b$ 的无限垂直荷磁帶	34
8. 寬 $2b$ 的无限水平荷磁帶	35
9. 荷磁半平面	36
10. 寬 $2b$ 的无限水平偶极薄板	37
11. 半无限水平偶极薄板	38
12. 寬 $2b$ 的无限傾斜偶极薄板	39
13. 半无限傾斜偶极薄板	40
14. 寬 $2b_1$ 和 $2b_2$ 的两个相交的无限傾斜偶极薄板	41
15. 偶极薄板組成的褶皺	41
16. 偶极薄板組成的矩形褶皺	42
17. 垂直磁化的无限矩形柱体	42
18. 沿軸向磁化的无限傾斜矩形柱体	43
19. 垂直磁化、截面为平行四边形或梯形的无限柱体	45
20. 垂直磁化的无限三角形柱体	46
21. 垂直磁化的半无限水平层	47
22. 垂直磁化的傾斜接触帶	48
23. 垂直磁化的断层	49
24. 傾斜磁化的断层	49
25. 傾斜磁化、任意位置的半无限傾斜层	50
26. 水平边有限的半无限傾斜层	50
27. 垂直磁化、垂直边有限的半无限傾斜层	52
28. 具有有限垂直边的两个相交的半无限傾斜层	53
29. 垂直磁化、无限延伸的半圓柱体	55
II. 表面为二次曲面的物体	55
1. 在场 X_0, Y_0, Z_0 中的三軸椭球体, 其半軸 $a \geq b \geq c$	55
2. 垂直磁化、半軸为 a, b, c 的三軸椭球体	58
3. 水平磁化、半軸 $a = b > c$ 的水平扁旋轉椭球体	59
4. 垂直磁化、半軸 $a = b > c$ 的水平扁旋轉椭球体	60
5. 成一角度磁化的半軸 $a = b > c$ 的水平扁旋轉椭球体	61
6. 垂直磁化、半軸 $a = b < c$ 的垂直长旋轉椭球体	64
7. 垂直磁化、半軸 $a = b < c$ 的水平长旋轉椭球体	65
8. 垂直磁化、半軸 $c > b$ 的无限椭圆柱体 (半軸 c 直立)	66
9. 垂直磁化、半軸 $c > b$ 的无限椭圆柱体 (半軸 c 水平)	67
10. 成一角度磁化的、半軸 $c > b$ 的无限椭圆柱体 (半軸 c 水平)	68
11. 垂直磁化的椭圆抛物体	69
12. 垂直磁化、与水平綫成 θ_0 角的椭圆抛物体	70
13. 垂直磁化的旋轉抛物体	72
14. 垂直磁化的无限抛物柱体	72
15. 与垂直綫成 θ_0 角磁化的无限抛物柱体	73
16. 垂直磁化、傾斜的无限抛物柱体	74
第二章 磁法勘探正演問題的图解法 (量板、諾模图、曲綫图)	75
I. 解正演問題的量板	75
1. 截面为任意形状二度体的磁场强度垂直与水平分量的計算量板	75
2. 截面为任意形状二度体的磁场强度垂直分量梯度計算量板	77
3. 上表面为简单平面层的二度体的磁场强度垂直与水平分量計算量板	78
4. 垂直磁化的三度体的磁场强度垂直分量計算量板	79

5. 垂直磁化的三度体的磁场强度垂直分量的垂直梯度计算量板	80
6. 垂直磁化、截面为任意形状平面的半无限直立圆柱体磁场强度垂直分量的计算量板	81
7. 垂直磁化、截面为任意形状的直立半无限物体的磁场强度水平分量计算量板	82
8. 三度体的磁场强度垂直分量和水平分量计算量板 (三度体垂直磁化, 沿某一方向延伸, 截面可以是任何形状, 但其大小不变)	84
II. 解正演问题的曲线图	90
1. 计算厚度为 b 的半无限倾斜薄层磁场强度各分量的曲线图 (薄层位于 $H_0 Z_0$ 地磁场中)	90
2. 椭球体的曲线图	91
3. 椭圆柱体的曲线图	107
III. 解正演问题的诺模图	111
1. 求垂直磁化、水平方向有限的半无限倾斜层的 Z 和 H 的诺模图	111
2. 求垂直磁化、半无限水平层的 H 的诺模图	111
3. 求垂直磁化、半轴 $c > b$ 的无限椭圆柱体的 H 的诺模图	113
4. 求垂直磁化、半轴 $c > b$ 的无限椭圆柱体的 Z 的诺模图	115
5. 求垂直磁化的抛物体、旋转抛物体和抛物柱体的 Z 的诺模图	117
第三章 ΔT 的计算	119
I. 求 ΔT 函数	119
II. 磁势及其微商的 ΔT 函数表达式	120
1. 势 W 的 ΔT 表达式, $J_0 = \text{常数}$	120
2. 势的微商的 ΔT 表达式, $J_0 = \text{常数}$	120
3. 二度体情况下 Z 和 H 的 ΔT 表达式	121
III. 已知形状物体的 ΔT 正演问题	121
1. 点极	121
2. 垂直偶极子	122
3. 长 $2y_0$ 的有限极线	122
4. 长 $2l$ 的垂直极线	122
5. 垂直半无限极线	123
6. 长 $2y_0$ 的水平偶极线	123
7. 长 $2y_0$ 、宽 $2b$ 的水平荷磁带	123
8. 无限极线	124
9. 与磁子午线成 $90^\circ - \alpha$ 角、位于 H_0 、 Z_0 场中的无限极线	124
10. 两条异号的无限极线	124
11. 无限偶极线	124
12. 无限偶极线, $\theta_0 = 0$	125
13. 宽 $2b$ 的无限水平荷磁带	125
14. 宽 $2b$ 的无限垂直荷磁带	125
15. 宽 $2b$ 的无限水平偶极薄板	125
16. 半无限的水平偶极薄板	126
17. 半无限的倾斜偶极薄板	126
18. 垂直磁化的无限矩形柱体	126
19. 垂直磁化的半无限水平层	126
20. 水平方向有限的半无限倾斜层	127

第二部分 磁法勘探的反演问题

緒言	129
----	-----

第一章 已知形状物体的反演問題	132
I. 磁场强度曲綫的特征点法	132
II. 切綫法	144
III. 二度体的等值綫图解法	149
IV. 极限分布法	150
第二章 磁測反演問題的图解法 (量板、曲綫图)	151
I. 解反演問題的量板	151
1. Д.С.米可夫量板 (垂直面中的无限偶极綫场)	151
2. Д.С.米可夫量板 (垂直面中的无限极綫场)	152
II. 曲綫的相对形状量板	154
1. Н.А.伊凡諾夫量板	154
2. 寬 $2b$ 的无限水平带的曲綫相对形状量板	156
3. 垂直磁化、半无限水平层的曲綫相对形状的两块量板	158
III. 对数量板	161
1. Ю.П.塔菲耶夫对数量板	161
2. А.А.涅波姆尼亚希赫的二度体对数量板	164
3. 垂直磁化的旋轉椭球体和椭圆柱体的对数量板 (Г.П.格林凱維奇)	167
4. 寬 $2b$ 的无限水平带的对数量板 (Б. А. 安德雷耶夫)	171
5. А. И. 查鮑罗夫斯基对数量板	171
IV. 求解磁測反演問題的曲綫图	172
1. 求垂直磁化、垂直方向有限的半无限傾斜层傾角的曲綫图	172
2. 求垂直磁化、水平方向有限的半无限傾斜层傾角的曲綫图	174
3. 求垂直磁化、水平方向有限的半无限傾斜层傾角的曲綫图	176
4. 求垂直磁化、水平方向有限的半无限傾斜层埋深和水平厚度的曲綫图	177
5. 求垂直磁化、半无限水平层的埋深、 θ_0 角和垂直厚度的曲綫图	178
6. 求垂直磁化、半无限水平层产状要素的曲綫图	179
7. 求垂直磁化的两个相交的半无限傾斜层傾角的曲綫图	180
8. 求垂直磁化断层产状要素的曲綫图	181
9. 求垂直磁化、无限矩形柱体产状要素的曲綫图	183
10. 求垂直磁化、截面为三角形的无限柱体产状要素的曲綫图	186
11. 求垂直磁化、无限椭圆柱体产状要素的曲綫图	187
第三章 已知形状物体的 ΔT 的反演問題	190
I. ΔT 曲綫的“特征点”法	190
II. 伐克“模型”法	192
第四章 求解反演問題的积分法	203
I. 求物体任意次調和矩的方法	203
II. 求干扰体参数的方法	205
III. 求干扰体初次矩的公式	207
IV. 計算磁矩和重心座标的实际步驟	210
V. 已知形状物体的积分公式	216
VI. 求干扰体頂部埋深 h 和重心埋深 h_c 的近似公式	222
VII. 求垂直磁化、半无限垂直层产状要素的近似方法	223

第三部分 上半空间中势的微商的计算方法

前言	225
I. 在上半空间和观测平面上计算势的微商的公式	226
1. 三度问题时上半空间中势及其微商的计算公式	226
2. 三度问题时 $Z=0$ 观测平面上势及其微商的计算公式	229
3. 二度问题时在上半空间求势及其微商的公式	232
4. 二度问题时在 $Z=0$ 平面上求势及其微商的公式	233
5. 利用使观测值平滑的平滑函数 $\frac{\beta_0}{\sqrt{z}} e^{-\beta_0(\xi^2+\eta^2)}$ 在 $Z=0$ 平面上求势及其微商的 格兰特公式 (其中 β_0 为决定平滑程度的常数)	233
II. 上半空间不同高度处势场的计算 (量板法和数字算法)	235
A. 三度问题	235
1. 根据 $Z=0$ 平面上的 U 值求上半空间中的 U	235
2. 根据 $Z=0$ 平面上的 Z 值求上半空间中的 X 、 Y	236
3. 根据 $Z=0$ 平面上的 Z 值求上半空间中的 $-\frac{dX}{dz}$, $\frac{dY}{dz}$, $\frac{dZ}{dz}$ 值	238
B. 二度问题	239
1. 根据 $Z=0$ 平面上的 U 值求上半空间中的 U	239
2. 根据 $Z=0$ 平面上的 U 值求上半空间中的 $\frac{dU}{dz}$	241
3. 根据 $Z=0$ 平面上的 Z 值求上半空间中的 X	241
III. 根据 $Z=0$ 平面上某些势的微商计算另一些势的微商	242
A. 三度问题	242
1. 根据 $z=0$ 平面上的 Z 值求 $z=0$ 平面上的 X 、 Y	242
2. 根据 $z=0$ 平面上的 Z 值求 $z=0$ 平面上的 $\frac{dZ}{dz}$	244
3. 根据 $z=0$ 平面上的 U 值求 $z=0$ 平面上的二次微商 $\frac{d^2V}{dz^2}$	245
B. 二度问题	247
1. 根据 $Z=0$ 平面上的 Z 值计算 $z=0$ 平面上的 X 值和根据 $z=0$ 平面上的 X 值计算 $z=0$ 平面上的 Z 值	247
参考文献	249
附录: 某些形状物体的 $Z/Z_{\max}$, $H/Z_{\max}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} / \left \frac{\partial Z}{\partial x} \right _{\max}$, Z , H 数值表	269

第一部分 已知形状物体的磁法勘探正演问题

緒 言

均匀磁化时磁法勘探的正演问题是在物体形状已知、磁化强度 J (或磁荷) 在表面的分布已给定的条件下, 求解该物体所引起的磁场。正演问题是单值的, 即当磁化强度或磁荷分布一定时, 只存在着一个一定的与之相应的磁场。

在一般情况下, 正演问题的解是很复杂的, 因为在自然界中干扰体具有复杂的形状, 它不能用某一个方程式来表达。考虑到磁法勘探正演问题的解的稳定性, 可以用一级近似的办法, 把这些干扰体的复杂外形用较简单的几何形状 (如圆柱、稜柱体等) 来代替。

书中计算已知形状体磁场的公式主要用两种方法求得 [82, 271]。

在第一种方法中, 计算磁势用下式:

$$W = \int_s \frac{J_n}{r} ds, \quad (\text{I} \cdot 1)$$

式中: J_n ——分布在物体表面 s 上的磁荷密度, r ——由计算磁势 W 的点至物体表面上某点的向径。积分沿物体表面进行。除 (I·1) 式外, 可用泊松公式求磁场。在均匀磁化时, 此式具有下面形式:

$$W = - (J \text{grad } V^*), \quad (\text{I} \cdot 2)$$

式中: V^* ——假定物体的密度为 1 时的重力势。根据已知的重力势, 可用泊松公式求磁势及其微商。实际上, 对于三度问题, 泊松公式可写成 (I·3) 式, 对于二度问题可写成 (I·4) 式:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xx} + J_y V_{xy} + J_z V_{xz}\}, \\ Y &= \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xy} + J_y V_{yy} + J_z V_{yz}\}, \\ Z &= \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xz} + J_y V_{yz} + J_z V_{zz}\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I} \cdot 3)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= H = \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xx} + J_z V_{xz}\} = \frac{1}{k^2 \sigma} \{-J_x V_{xz} + J_z V_{xz}\}, \\ Y &= 0, \\ Z &= \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xz} - J_z V_{xz}\} = \frac{1}{k^2 \sigma} \{J_x V_{xz} + J_z V_{zz}\}, \\ H^2 + Z^2 &= \left(\frac{J}{k^2 \sigma}\right)^2 \{V_{xz}^2 + V_{zz}^2\}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I} \cdot 4)$$

$$\left. \begin{aligned} H \sin \theta_0 + Z \cos \theta_0 &= \frac{J}{k^2 \sigma} V_{xz}, \\ H \cos \theta_0 - Z \sin \theta_0 &= \frac{J}{k^2 \sigma} V_{xz}, \end{aligned} \right\}$$

式中: $J_x = J \cos \theta_0$; $J_z = J \sin \theta_0$; $\theta_0 = \arctg \left[\frac{Z(0)}{H(0)} \right]$ 。垂直磁化时, $\theta_0 = 90^\circ$, 式 (I·

3) (I·4) 可简化为 (I·5) (I·6) 式

$$\left. \begin{aligned} X_b &= \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{xz}, \\ Y_b &= \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{yz}, \\ Z_b &= \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{zz}, \end{aligned} \right\} \quad (I \cdot 5)$$

$$\left. \begin{aligned} H_b &= \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{xz}, \\ Z_b &= \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{zz} = - \frac{J_z}{k^2 \sigma} V_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (I \cdot 6)$$

若已知垂直磁化体磁场强度各分量的表达式, 对二度体来讲, 可求得倾斜磁化时的 H 和 Z , 其形式如下:

$$\left. \begin{aligned} H &= J_z Z_a + J_x H_a = J_z \{ Z_a \operatorname{ctg} \theta_0 + H_a \}, \\ Z &= J_x H_a - J_z Z_a = J_z \{ H_a \operatorname{ctg} \theta_0 - Z_a \}, \end{aligned} \right\} \quad (I \cdot 7)$$

式中: $J_x = J \cos \theta_0$, $J_z = J \sin \theta_0$, $Z_a = - \frac{1}{J_z} Z_b$, $H_a = \frac{1}{J_z} H_b$ 。

磁法勘探正演问题可用图解法求解, 利用特制的量板和曲线图。通常使用的量板是根据均匀磁化时场的迭加原理制成的, 即部分物体形成的场的总和等于整个物体形成的场。

把计算二度体磁场强度的量板分成许多小块。每个小块就相当于在量板中心造成一定磁场强度(如为 1 伽)的部分二度体的截面, 每个小块的大小和形状随制量板的方法而定。使用量板计算时, 将量板复盖在按量板比例尺绘出的物体的法向截面上。同时, 量板中心应与要计算磁场的点重合, 量板的轴应该按各个量板说明中的要求放置。然后, 计算在物体截面内的各小块数目, 再将此数乘以一定的系数。

对于无限延深的三度体(即单极体, 它的另一极埋藏极深, 其影响可以忽略不计), 也可制作类似的量板。此时, 量板的每一小块相当于部分物体的顶面。制量板时, 取物体顶面埋深为长度单位。使用此种量板计算时, 物体顶面的起伏应以等深线表示。每相邻两等深线间的区间都有自己的量板, 取区间下界的埋深为长度单位(见 80 页)。

若用类似的量板来求延深不大的三度体的磁场, 计算就较为复杂(如见 79 页)。

除了量板法外, 计算磁场强度还可用曲线图。在曲线图上以一定的单位画出磁场强度的等值线(见 90 页)。此种曲线图可用来绘制位于该图平面内的磁场强度剖面。为此, 只要在曲线图上画一条剖面线, 并在剖面线与磁场强度等值线的相交之处取读数。

本书第一部分由三章组成。第一、二章为求磁势及其微商的解磁法勘探正演问题的

解析法和图解法，第三章是求 T -航空磁力仪所测量的 ΔT 值的方法。

第一章汇总了计算不同形状物体磁场的各种公式，该章由两节组成。第二节专门叙述具有二次曲面的物体。所有的公式都适用于垂直物体走向的剖面。此时采用 Z 轴向下的右坐标系。当 Z 轴为其他方向时，在章内都特别注明。主要符号已列于书前总表中，另外一些符号可参阅插图，插图中标明了坐标系和字母符号的意义。在本章中绘有磁场强度曲线图，可以用来求通过计算剖面的水平面和垂直面中的磁场强度。对于三轴椭球体，绘出了根据椭球体各半轴的已知值求退磁系数的曲线图。

除了求磁势及其微商的公式外，书中还有求重力势及其微商的公式。当假设异常是由一个极的作用引起时，在实践中常用这些公式来解释磁异常。在上述情况下，这些重力势的公式可以看作是求解磁场的问题的简化（如第4页等）。基于这个原因，在本书中，重力势 V 和磁势 W 的微商都以 X 、 Y 、 Z 来表示。在第一章的 A 与 B 节中，引入了系数 m ，它有不同的物理意义（见书前总表）。在 B 节中这个系数以 J 表示，代表单位体积内的磁矩（磁化强度）。

书末附有 H 、 Z 、 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ 数值表，采取相对比例尺的办法以 $H_{\max}$ 、 $Z_{\max}$ 、 $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{\max}$ 为单位。利用这些表，根据给出的垂直物体走向的剖面，可以作出磁场变化图。

第二章是解磁法勘探正演问题的量板、曲线图和诺模图。对于各种量板、曲线图和诺模图都列出了计算公式，绘制了相应的插图，同时还列出了制作它们所用的数据表格。

第三章叙述 ΔT 的正演问题。这里有计算 ΔT 的公式，同时，对于三度与二度问题，列出了通过 ΔT 函数来表达磁势及其微商的公式。本章中所叙述的某些物体的 ΔT 函数式是由近似公式得来的，推导近似公式时已假设 ΔT 是势函数。

第一章 解正演問題的解析法

I、三度問題

1. 点极 (图 1.2)

[14, 23, 28, 66, 67, 88, 102, 152, 177, 180,
184, 204, 237, 242, 271, 273, 330, 331, 335,
336, 368, 387, 410, 437, 438]

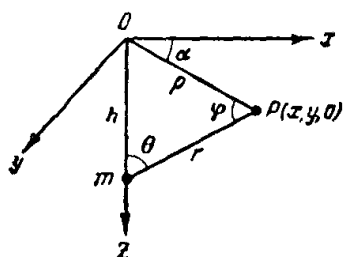


图 1 点极示意图

$$\begin{array}{lll} x, y, h & \begin{array}{l} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \\ h = h \end{array} & \begin{array}{l} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \\ h = \rho \operatorname{tg} \varphi \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} r^2 & x^2 + y^2 + h^2 & \rho^2 + h^2 \quad \frac{\rho^2}{\cos^2 \varphi} \\ -V & \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} & \frac{m}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \quad \frac{m \cos \varphi}{\rho} \end{array} \quad (I.8)$$

$$V_x = X \quad \frac{mx}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{m\rho \cos \alpha}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{m \cos \alpha \cos^3 \varphi}{\rho^2} \quad (I.9)$$

$$V_y = Y \quad \frac{my}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{m\rho \sin \alpha}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{m \sin \alpha \cos^3 \varphi}{\rho^2} \quad (I.10)$$

$$V_z = Z \quad \frac{mh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{mh}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \quad \frac{m \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\rho^2} \quad (I.11)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = m \frac{2x^2 - y^2 - h^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{\rho^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) - h^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{(3 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi}{\rho^3} \quad (I.12)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = m \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{\frac{3}{2} \rho^2 \sin 2\alpha}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{\frac{3}{2} \sin 2\alpha \sin^5 \varphi}{\rho^3} \quad (I.13)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = m \frac{3xh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{3\rho h \cos \alpha}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{3 \sin \varphi \cos \alpha \cos^4 \varphi}{\rho^3} \quad (I.14)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = m \frac{2y^2 - x^2 - h^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{\rho^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - h^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{(3 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi}{\rho^3} \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = -m \frac{3yh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{3\rho h \sin \alpha}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{3 \sin \varphi \sin \alpha \cos^4 \varphi}{\rho^3} \quad (\text{I} \cdot 16)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -m \frac{2h^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{2h^2 - \rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - m \frac{(3 \sin^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi}{\rho^3} \quad (\text{I} \cdot 17)$$

$y=0$ 的剖面

$$Z = \frac{mh}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{m}{r^2} \cos \theta = Z_{\max} \cos^3 \theta; \quad (\text{I} \cdot 18)$$

$$H = \frac{mx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{m}{r^2} \sin \theta = Z_{\max} \cos^2 \theta \sin \theta; \quad (\text{I} \cdot 19)$$

$$T = \frac{m}{x^2 + h^2} = \frac{m}{r^2} = Z_{\max} \cos^2 \theta; \quad (\text{I} \cdot 20)$$

$$\operatorname{tg} i_a = \frac{h}{x} = \operatorname{ctg} \theta; \quad (\text{I} \cdot 21)$$

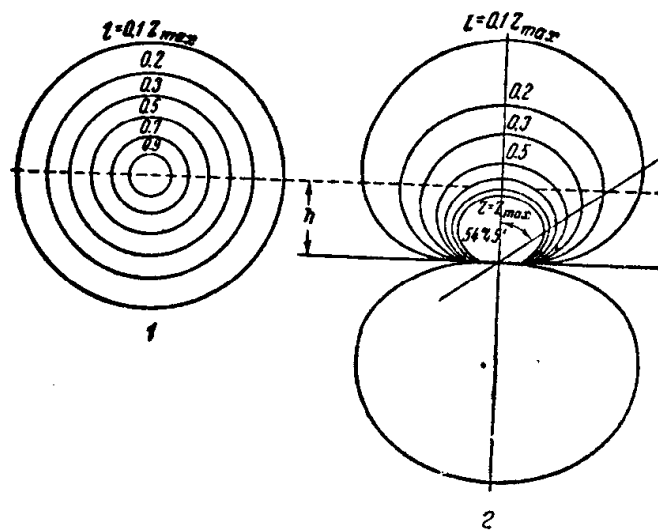


图 2 点极的 Z 等值线

1—水平面; 2—垂直面

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{3mxh}{(x^2 + h^2)^{5/2}}; \quad (\text{I} \cdot 22)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = m \frac{x^2 - 2h^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}}; \quad (\text{I} \cdot 23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = m \frac{h^2 - 2x^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}}. \quad (\text{I} \cdot 24)$$

2. 偶极子 (图 3)

[102, 105, 142, 177, 180, 271, 331, 336, 337, 349, 384, 409]

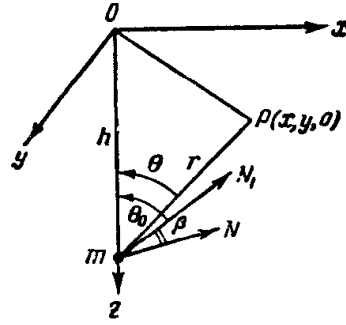


图 3 偶极子示意图

mN —偶极轴； mN_1 —偶极子轴在 xz 面之投影

$$-W = m \frac{x \sin \theta_0 \cos \beta + y \sin \beta + h \cos \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}; \quad (\text{I} \cdot 25)$$

$$W_z = Z = m \frac{(2h^2 - x^2 - y^2) \cos \theta_0 \cos \beta + 3xh \sin \theta_0 \cos \beta + 3yh \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}; \quad (\text{I} \cdot 26)$$

$$W_x = X = m \frac{3xh \cos \theta_0 \cos \beta + 3xy \sin \beta + (2x^2 - y^2 - h^2) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (\text{I} \cdot 27)$$

$$W_y = Y = m \frac{3yh \cos \theta_0 \cos \beta + 3xy \sin \theta_0 \cos \beta - (x^2 - 2y^2 + h^2) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (\text{I} \cdot 28)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = -3m \frac{(4xh^2 - x^3 - xy^2) \cos \theta_0 \cos \beta + 5xyh \sin \beta + (4x^2h - y^2h - h^3) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}}; \quad (\text{I} \cdot 29)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -3m \left\{ \frac{(2h^3 - 3x^2h - 3y^2h) \cos \theta_0 \cos \beta + (4xh^2 - x^3 - xy^2) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} + \frac{(4yh^2 - x^2y - y^3) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} \right\}; \quad (\text{I} \cdot 30)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -3m \left\{ \frac{(4x^2h - y^2h - h^3) \cos \theta_0 \cos \beta + (2x^3 - 3xy^2 - 3xh^2) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} + \frac{(4x^2y - y^3 - yh^2) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} \right\}; \quad (\text{I} \cdot 31)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = -3m \left\{ \frac{5xyh \cos \theta_0 \cos \beta + (4x^2y - y^3 - yh^2) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} + \frac{(4xy^2 - x^3 - xh^2) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} \right\}; \quad (\text{I} \cdot 32)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -3m \left\{ \frac{-(h^3 + x^2h - 4y^2h) \cos \theta_0 \cos \beta + (2y^3 - 3x^2y - 3yh^2) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} + \frac{(4xy^2 - x^3 - xh^2) \sin \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} \right\}; \quad (\text{I} \cdot 33)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = -3m \left\{ \frac{5xyh \sin \theta_0 \cos \beta + (4yh^2 - x^2y - y^3) \cos \theta_0 \cos \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} + \frac{(4y^2h - x^2h - h^3) \sin \beta}{(x^2 + y^2 + h^2)^{7/2}} \right\}. \quad (\text{I} \cdot 34)$$

$\beta=0$ (mN 在 xz 平面内) 时, $y=0$ 剖面:

$$Z = m \frac{(2h^2 - x^2) \cos \theta_0 + 3xh \sin \theta_0}{(x^2 + h^2)^{5/2}}; \quad (\text{I} \cdot 35)$$

$$H = m \frac{3xh \cos \theta_0 + (2x^2 - h^2) \sin \theta_0}{(x^2 + h^2)^{5/2}}; \quad (\text{I} \cdot 36)$$

$$T = \frac{m}{(x^2 + h^2)^{5/2}} \times \sqrt{(x^4 + 4h^4) \cos^2 \theta_0 + (4x^4 + h^4) \sin^2 \theta_0 + 5x^2 h^2 + 3xh(x^2 + h^2) \sin 2\theta_0}; \quad (\text{I} \cdot 37)$$

$$\text{tg} i_a = \frac{(2h^2 - x^2) \cos \theta_0 + 3xh \sin \theta_0}{(2x^2 - h^2) \sin \theta_0 + 3xh \cos \theta_0}; \quad (\text{I} \cdot 38)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} = -3m \frac{(4xh^2 - x^3) \cos \theta_0 + (4x^2 h - h^3) \sin \theta_0}{(x^2 + h^2)^{7/2}}; \quad (\text{I} \cdot 39)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -3m \frac{(2h^3 - 3x^2 h) \cos \theta_0 + (4xh^2 - x^3) \sin \theta_0}{(x^2 + h^2)^{7/2}}, \quad (\text{I} \cdot 40)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -3m \frac{(4x^2 h - h^3) \cos \theta_0 + (2x^3 - 3xh^2) \sin \theta_0}{(x^2 + h^2)^{7/2}}. \quad (\text{I} \cdot 41)$$

3. 垂直偶极子 (图 4—6)

[23, 28, 102, 177, 180, 271, 349, 410]

$y=0$ 的剖面:

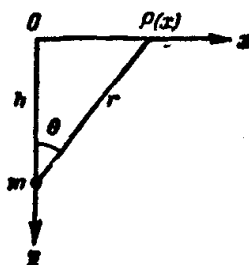


图 4 垂直偶极子示意图

$$Z = \frac{m(2h^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = \frac{m}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = Z_{\max} \frac{3 \cos 2\theta + 1}{4} \cos^3 \theta; \quad (\text{I} \cdot 42)$$

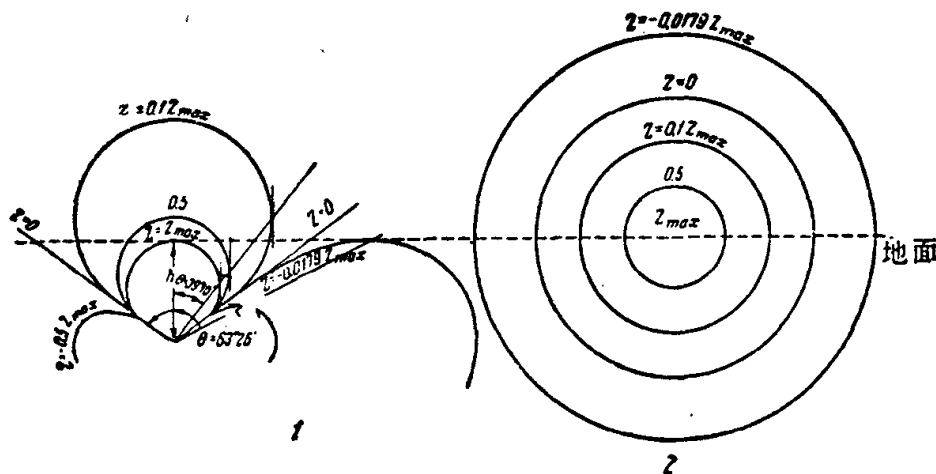


图 5 垂直偶极子的 Z 等值线

1—垂直面; 2—水平面

$$H = \frac{3mxh}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{3m}{r^3} \sin \theta \cos \theta = Z_{\max} \frac{3 \sin 2\theta}{4} \cos^3 \theta; \quad (\text{I} \cdot 43)$$

$$T = \frac{m}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}; \quad (\text{I} \cdot 44)$$

$$\text{tgi}_a = \frac{3 \cos 2\theta + 1}{3 \sin 2\theta} = \frac{2h^2 - x^2}{3xh}; \quad (\text{I} \cdot 45)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} = 3m \frac{x^3 - 4xh^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = 3m \frac{\sin^3 \theta - 4 \sin \theta \cos^3 \theta}{r^4}; \quad (\text{I} \cdot 46)$$

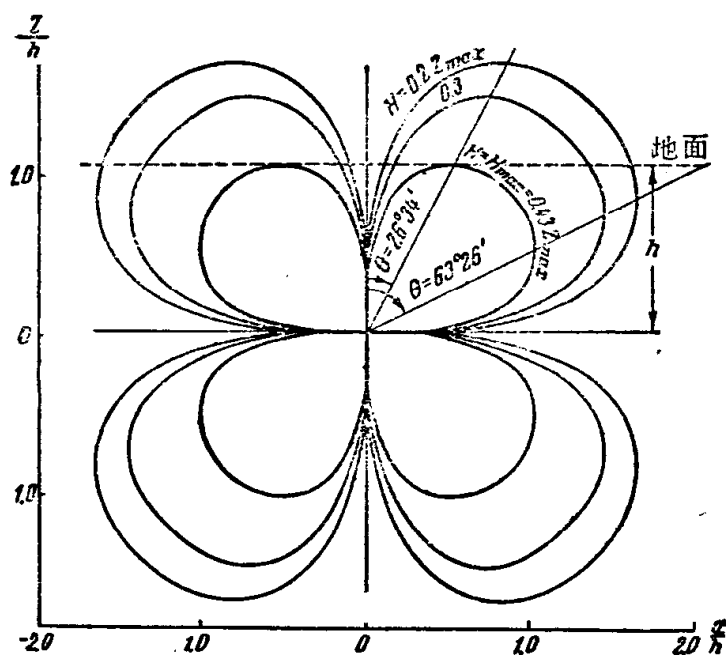


图 6 垂直偶极子在垂直面中的 H 等值线

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -3m \frac{2h^3 - 3x^2h}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = -3m \frac{2 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^4}; \quad (\text{I} \cdot 47)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 3m \frac{4x^2h - h^3}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = 3m \frac{4 \sin^2 \theta \cos \theta - \cos^3 \theta}{r^4}. \quad (\text{I} \cdot 48)$$

4. 磁 棒

(符号相反的两个点极) (图 7)

[98, 102, 177, 180, 229, 271, 304, 313, 330, 331, 344, 349, 447, 449, 467]

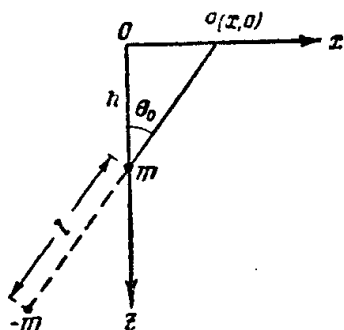


图 7 磁棒示意图