高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组/组编

廉庆荣 冯 红/编著

线性代数

（理工类·本科）

真正的一线教师力作

针对性强 信息超值

考点覆盖率 100%

考试成功率 100%

保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2293-4

9 787561 122938 >

ISBN 7-5611-2293-4 定价:10.00元

大连理工大学出版社

责任编辑/刘 杰 封面设计/王福刚

高等数学课程过关强化试卷系列

高等数学（上）（理工类·重点院校）

高等数学（下）（理工类·重点院校）

高等数学（上）（理工类·普通院校）

高等数学（下）（理工类·普通院校）

线性代数（理工类·本科）

概率论与数理统计（理工类·本科）

微积分（上）（经管类）

微积分（下）（经管类）

高等数学（上）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题（理工技术类院校·高职高专）

高等数学（下）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题（理工技术类院校·高职高专）

线性代数单元跟踪测试及期末冲刺★级试题（理工技术类院校·高职高专）

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

线性代数

（理工类·本科）

高等数学教学研究组　组编

廉庆荣　冯　红　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷:线性代数 / 廉庆荣,冯红编著. — 大连:大连理工大学出版社,2003.4
ISBN 7-5611-2293-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.①廉…②冯　Ⅲ.线性代数—高等学校—习题　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 018382 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连华伟印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7.25　字数:165 千字
印数:1 ~ 8 000
2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:杜　娟
封面设计:王福刚

定　价:10.00 元

前 言

《线性代数》是我国高等院校很多专业的本科生必修的基础课，也是全国硕士研究生入学数学考试的重要组成部分。

由于这门课程知识点多，既相互联系又比较抽象，上课学时又有限，难以多做题训练。因此，有些学生感到学习上有困难，期末考试过关没把握。为此，大连理工大学出版社组织编写《高等数学课程过关强化试卷》丛书，邀请我们编写其中的《线性代数》部分。我们在原国家教委审定的普通高等学校“线性代数课程教学基本要求”的基础上，又根据教育部2003年制定的“全国硕士研究生入学统一考试大纲”的要求和我们多年的教学经验编写此书。

本书共有十套试卷及其参考答案，其特点如下：

一、适用范围大

根据出版社要求，本书对象以重点院校学生为主，兼顾普通院校和开设“线性代数与解析几何”课院校的学生需要。本书不仅有普通与较难的线性代数试卷两类，还有三套“线性代数与解析几何”试卷。因此，既可以为很多学校的本科生期末复习和考研生考试前复习热身，又可以为高等院校任课教师提供教学参考。

二、题型多，覆盖面广

本书题型有填空题、单项选择题、计算题，是非判断题，问答题（即多项选择题）和证明题。所涉及的知识几乎覆盖线性代数的基本知识和重点知识。既有大量的基本题、中等题，也有一定的综合题、较难题。作了本书的试卷，有利于将线性代数的知识有机地联系在一起，加深理解，不仅考试容易过关，而且也可提高学数学的兴趣，提高

综合分析能力。

三、重基础知识，重应试能力

本书围绕基本概念、基本性质、基本理论、基本方法及其综合运用编写试题，既考察学生掌握基本知识、重点内容和主要方法的程度，又能检验学生综合运用知识分析问题和解决问题的能力。

根据出版社的要求，我们对每一套试题都做了详细的解答，有些题还给出多种解法和证法。既有基本方法，又有简单技巧和运用所学知识得到的简便方法。不仅可以启发解题思路，而且也可以提高应试效率和能力，从中还可以感受到数学的乐趣。

本书由施光燕教授主审，使本书受益很大。为本书质量的提高作出了重要贡献。在此编者表示衷心的感谢！

出考题是一门学问，这次公开出版，肯定有不尽人意之处。如果您发现错误和不足之处，或者有宝贵的建议，我们非常欢迎与您交流，使之日臻完善，更好地为读者服务！

编　者

2003年3月

班级________ 姓名________ 得分________

试卷一

（时间 110～120 分钟）

注：E 为单位阵，O 为零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，$r(A)$ 为 A 的秩，A^T 为 A 的转置阵，A^* 为 A 的伴随阵，黑体英文小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分＝24 分）。

1. $\begin{bmatrix}3&2&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$

2. 设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_1\quad\ -kx_3=2\\x_1-x_2+x_3=m\end{cases}$

(1)若有无穷多解，则 k ________，m ________；

(2)若无解，则 k ________，m ________。

3. $\begin{bmatrix}1&3&0&0\\2&5&0&0\\0&0&3&1\\0&0&4&1\end{bmatrix}^{-1}=$________。

4. 若 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&x\\0&2&6\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&7\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$________，$y=$________。

5. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3)+k(x_2^2+2x_2x_3)$ 为正定二次型的充要条件是 k 满足________。

6. 向量组 $\boldsymbol{a}_1=[1,1,0,0]^T$，$\boldsymbol{a}_2=[0,1,1,0]^T$，$\boldsymbol{a}_3=[0,0,1,1]^T$，$\boldsymbol{a}_4=[1,0,0,1]^T$ 的秩为________。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分＝10 分）。

1. 设 A 是 n 阶可逆阵，$tr(A)$ 为 A 的对角元之和，若 α 为非零实数，则（　　）。

A. $|\alpha A|=\alpha|A|$　　B. $r(\alpha A)=\alpha r(A)$　　C. $tr(\alpha A)=\alpha tr(A)$　　D. $(\alpha A)^{-1}=\alpha A^{-1}$

2. 三阶下三角阵 $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ 必有一个特征向量为（　　）。

A. $[1,0,0]^T$　　B. $[0,1,0]^T$　　C. $[0,0,1]^T$　　D. $[0,0,0]^T$

3. 设 A 和 B 为 n 阶可逆阵，则 $(A^{-1}B^{-1})^T=$（　　）。

A. $(A^{-1})^T(B^{-1})^T$　　B. $(A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$

C. $(B^TA^T)^{-1}$　　D. $(A^TB^T)^{-1}$

4. 设矩阵 $C=AB$，若 C 的列向量组线性无关，则（　　）。

A. B 的列向量组线性无关　　B. A 的列向量组线性无关

C. C 的行向量组线性无关　　D. A 和 B 的列向量组都线性无关

5. 设 A 为 n 阶方阵，P 为 n 阶可逆阵，Q 为 n 阶正交阵，若 $PAQ=B$，$P^{-1}AP=C$，$P^TAP=D$，$Q^TAQ=F$，则与 A 有相同的秩、行列式和特征值的矩阵是（　　）。

A. B 和 C　　B. C 和 F　　C. D 和 F　　D. B 和 D

三、（10 分）

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$。

1. 求 B^{-1}；

2. 已知 $AY=B$，求 Y。

四、（12 分）

设 $A=\begin{bmatrix}4&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$，求可逆阵 Q 和对角阵 Λ，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$。

五、(10 分)

设向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}k\\3\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\k\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\k\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$,则

1. $|\boldsymbol{A}|=$__________。
2. 该向量组线性相关的充要条件是 k 满足__________。
3. 若 $r(\boldsymbol{A})=2$,则 k 满足__________。
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 正定,则 k 满足__________。

六、(10 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&4&-1\\3&1&5&-2\\4&1&6&-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\3\\7\\9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,求

1. $r(\boldsymbol{A})$;
2. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系;
3. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

七、(10 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&k&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}y\\1\\1\end{pmatrix}$

1. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则 k 满足__________。
2. 若 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量,则 $\lambda=$__________, $y=$__________, $k=$__________。

八、证明题(6 分+8 分=14 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆阵,证明 $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$。

2. 设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$,证明:$r(\boldsymbol{A})=m$ 的充要条件是对于任一个 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 都有解。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷二

（时间 110～120 分钟）

注：$\boldsymbol{E}$ 为单位阵，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$r(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，黑体英文小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分=24 分）。

1. $\begin{bmatrix}2&3&1\\1&1&0\\4&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\quad\quad\end{bmatrix}$。

2. 方程组 $\begin{cases}kx_1-x_2+4x_3=0\\-x_1+kx_2+4x_3=0\\4x_1-x_2+kx_3=0\end{cases}$ 有非零解的充要条件为 k 满足________。

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&k\\1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$__________，此时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为[________]$^{\mathrm{T}}$。

4. 若 $\begin{bmatrix}1&0&2\\2&5&0\\0&1&x\end{bmatrix}$ 的特征值 λ 对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\y\\1\end{bmatrix}$，则 $\lambda=$__________________，$x=$__________________，$y=$__________。

5. 若 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=9\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________，$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=$________。

6. 若 $|\boldsymbol{A}_{4\times4}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}^{-1}|=$________。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分=10 分）。

1. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$，若 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_1]$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$（　　）。

A. $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）。

A. 必有一个是奇异阵　　B. 至少有一个是零矩阵

C. 两个矩阵都是奇异阵　　D. 至少有一个矩阵可逆

3. 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，则（　　）。

A. 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解　　B. 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

C. 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解　　D. 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r_1$，$r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=r_2$，$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=r_3$，则（　　）。

A. $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$　　B. $r_3\leqslant r_1\leqslant r_2$

C. $r_2\leqslant r_3\leqslant r_1$　　D. $r_3\leqslant r_2\leqslant r_1$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$，则（　　）的结论不对。

A. $\boldsymbol{BCDA}=\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{CDAB}=\boldsymbol{E}$　　C. $\boldsymbol{CDBA}=\boldsymbol{E}$　　D. $\boldsymbol{DABC}=\boldsymbol{E}$

三、（10 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\2&1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&4\\1&3\\3&2\end{bmatrix}$

1. 已知 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$；

2. 已知 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{Y}$。

四、(12分)

设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,求正交阵 Q 和对角阵 Λ,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$。

五、(12分)

当 k 满足什么条件时,方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ 2x_1+kx_2+2x_3=0 \\ kx_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$$

1. 有惟一解;
2. 有无穷多解;
3. 无解。

六、(12分)

设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+11x_3^2+2(x_1x_2+kx_1x_3+x_2x_3)$

1. k 满足什么条件时,$f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定二次型?
2. 已知 $k>1$,用正交变换把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成的标准形为

$$g(y_1,y_2,y_3)=my_1^2+3y_2^2$$

求 k 和 m。

七、(8分)

设 $\boldsymbol{a}_1=[1,1,2,4]^T$,$\boldsymbol{a}_2=[1,2,3,6]^T$,$\boldsymbol{a}_3=[1,3,5,8]^T$,$\boldsymbol{a}_4=[1,0,1,t]^T$。当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关?在此时求出向量组的一个极(最)大无关组。

八、(2×6分=12分)

1. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵,x 为 n 维(元)向量,$r(AB)=r(B)=r<n$,证明:线性方程组 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 的基础解系相同。
2. 设 A 是 n 阶对称正定阵,当 $i\neq j$ 时,三个非零向量 p_1,p_2,p_3 满足 $p_i^T A p_j=0$。
   证明:向量组 p_1,p_2,p_3 线性无关。

班级＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　得分＿＿＿＿＿＿

试卷三

（时间 110～120 分钟）

注：$\boldsymbol{E}$ 为单位阵，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$r(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，黑体英文小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分＝24 分）。

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{Y}=$＿＿＿＿。

2. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=$＿＿＿＿。

3. 若 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 是正交阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&1&0&1\\0&3&6&1\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=$＿＿＿＿，$r(\boldsymbol{B})=$＿＿＿＿，$r(\boldsymbol{BA})=$＿＿＿＿。

4. 若 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$＿＿＿＿。

5. 设 $a<b<c$，若用正交变换把 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_3^2+2x_1x_3+x_2^2$ 化成的标准形为 $g(y_1,y_2,y_3)=ay_1^2+by_2^2+cy_3^2$，则 $a=$＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿，$c=$＿＿＿＿。

6. 向量组 $\boldsymbol{a}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=[0,1,k,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=[0,0,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关的充要条件是 k 满足＿＿＿＿。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分＝10 分）。

1. 若 $\boldsymbol{u}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{u}_2=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，则系数阵 $\boldsymbol{A}$ 为（　）。

A. $\begin{bmatrix}-2&1&1\\4&2&-2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-2&1&1\\4&-2&2\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}-2&1&1\\4&2&2\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-2&1&1\\4&-2&-2\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　）。

A. 有一个是降秩阵，另一个是满秩阵　　B. 至少有一个是零矩阵

C. 两个矩阵都是降秩阵　　D. 两个矩阵都是满秩阵

3. 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，则向量组（　）线性相关。

A. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$

B. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$

C. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$

D. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=$（　）。

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$

5. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 型矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$m\neq n$，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 两个方阵（　）。

A. 当一个可逆时，另一个也可逆

B. 当一个不可逆时，另一个也不可逆

C. 至少有一个不可逆

D. 至少有一个可逆

三、（10 分）

已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]$$

1. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}$；

2. 求 $\boldsymbol{A}$。

四、(12 分)

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 A 的三个特征值及其对应的全部特征向量。

五、(10 分)

已知方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=6\\2x_1-x_2+3x_3=2\\3x_1+x_2+2x_3=k\end{cases}$

有解。

(1)求 k 值;

(2)求出方程组的通解。

六、(12 分)

1. 设 $AB+A+B=A^2-2E$,已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,求 B;

2. 已知 $\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}Y\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$,求矩阵 Y。

七、(10 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&k&1\\k&1&k\\1&k&3\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&m\end{pmatrix}$。

1. 已知 A 正定,求 k 取值的最大范围;

2. 已知 A 与 Λ 相似,求 m 和 k。

八、**证明题**(2×6 分=12 分)

1. 若 A 和 B 都是 $2n\times n$ 型矩阵,且$[A,B]$是正交阵,则 B 的列向量组是齐次线性方程组 $A^Tx=0$ 的基础解系。

2. 若 A 既是对称正定阵,又是正交阵,则 $A=E$。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷四

（时间 110～120 分钟）

注：$\boldsymbol{E}$ 为单位阵，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$r(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，黑体英文小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分＝24 分）。

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & x\\-1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\y & 0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $x=$______，$y=$______。

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=\underline{\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}}$。

3. 向量组 $\boldsymbol{a}_1=[1,k,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=[0,0,k,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=[k,0,0,2]^{\mathrm{T}}$ 线性无关的充要条件是 k 满足______。

4. 若 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 5 & z\\0 & 1 & x\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & y & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$______，$y=$______，$z=$______。

5. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 2 & 7\\2 & 1 & 0 & 0\\7 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}}$。

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & t & 3\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，三阶方阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$______，$|\boldsymbol{B}|$ 为______。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分＝10 分）。

1. 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则（　）。

A. $\boldsymbol{A}$ 是对称阵　　B. $\boldsymbol{A}$ 的特征值都不相同

C. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可对角化　　D. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量都正交

2. 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是非齐次方程组，下列结论只有（　）不正确。

A. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 也无解

B. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 也有无穷多解

C. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 也有无穷多解

D. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 也有惟一解

3. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，若 $m>n$，则（　）。

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关　　B. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　D. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

4. 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times m}$，则（　）。

A. 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 的特征值都不为零

B. 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 有一个特征值为零

C. 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 有一个特征值为零

D. 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 的特征值都不为零

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，下列命题只有（　）正确。

A. 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$

B. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是对称阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵

C. 若 $\boldsymbol{AB}$ 是正交阵，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正交阵

D. 若 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆

三、（10 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 分别是 n 阶对称阵、可逆阵、正交阵和对角元全是 1 的下三角阵，$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{LAQ}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{QAQ}=\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{LAL}=\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{AL}=\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AL}=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$，在 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{M},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 这十个矩阵中，请选择：

1. 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的行列式值，也有相同特征值的四个矩阵是（　）。

2. 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的行列式值，但特征值与 $\boldsymbol{A}$ 不一定相同的三个矩阵是（　）。

3. 行列式值和特征值与 $\boldsymbol{A}$ 都不一定相同的三个矩阵是（　）。

注：选取的字母不许重复且超出规定数目的字母无效。

四、(12分)

当 a 和 b 满足什么条件时，方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3 \\ \qquad x_2+2x_3=b \\ 3x_1+5x_2+4x_3=8 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=5 \end{cases}$$

1. 有惟一解，并求出这个解；
2. 有无穷多解，并求出通解。

五、(10分)

设 $\mathbf{R}^4$ 中的列向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，$b_1=a_1+a_2,b_2=ka_2+a_3,b_3=ka_3+a_4,b_4=ka_1+a_4$，回答下面两个问题，并说明理由。

1. 当 k 满足什么条件时，向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 线性无关？
2. 当 k 满足哪些条件时，向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关？

六、(10分)

设三阶实对称阵 A 不可逆，其三个特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3$ 和 λ_3，它们对应的特征向量依次为 $p_1=[2,1,2]^T,p_2=[1,2,-2]^T$ 和 p_3。

1. 求 λ_3 和 p_3；
2. 求 A。

七、(10分)

设 $A=\begin{bmatrix} k & 0 & 2-3k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-3k & 0 & k \end{bmatrix},x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$。

1. 求 A 的三个特征值；
2. 已知二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定，求 k 取值的最大范围。

八、证明题(6分+8分=14分)

1. 设 $A=[a_{ij}]_{n\times 2n},B=[b_{ij}]_{n\times 2n},x$ 为 $2n$ 元(维)向量，B^T 的 n 个列向量是 $Ax=0$ 的基础解系，证明：A^T 的 n 个列向量是 $Bx=0$ 的基础解系。
2. 设 $r(A_{m\times n})=n$，证明：AA^T 有 n 个特征值大于零，有 $m-n$ 个特征值等于零。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷五

（时间 110～120 分钟）

注：E 为单位阵，O 为零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，$r(A)$ 为 A 的秩，A^T 为 A 的转置阵，A^* 为 A 的伴随阵，黑体英文小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分=24 分）。

1. 若 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $AA^T-A^TA=$________。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $AB=A+B$，则 $(B-E)^{-1}=$________。

3. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\\3&4&1&2\\4&2&3&1\end{vmatrix}=$________。

4. 若三阶方阵 A 的特征值为 2，3，4，则 A^* 的特征值为________，________，________。

5. 设 $A_{4\times3}$ 的列向量组线性无关，若 $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&4\\3&5&6\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$________。

6. 若 $\boldsymbol{a}_1=[1,1,1]^T$，$\boldsymbol{a}_2=[1,2,3]^T$，则与 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 都正交的单位向量是________。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分=10 分）。

1. 设 A 为 n 阶方阵，下列结论只有（　　）不对。

A. 当 $A^TA=O$ 时，$A=O$　　B. $r(A^TA)=r(AA^T)$

C. A^TA 与 AA^T 的特征值相同　　D. $A^TA=AA^T$

2. 设 A 为 n 阶方阵，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是非齐次方程组，下列结论只有（　　）不对。

A. 若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 也有惟一解

B. 若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 也有无穷多解

C. 若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多解

D. 若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有惟一解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 也有惟一解

3. 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关，则（　　）。

A. $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示

B. $\boldsymbol{a}_3$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示

C. $\boldsymbol{a}_2$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示

D. $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示

4. 设 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，下列四个乘积矩阵只有（　　）与三阶方阵 A 的特征值相同。

A. PAP　　B. QAQ　　C. PAQ　　D. QAP^T

5. 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 是 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则向量组（　　）也是 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系。

A. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$

B. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$

C. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$

D. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4-\boldsymbol{a}_1$

三、（12 分）

设 $\boldsymbol{a}_1=[1,1,k]^T$，$\boldsymbol{a}_2=[-1,k,1]^T$，$\boldsymbol{a}_3=[-k,1,-1]^T$，$\boldsymbol{a}_4=[1,4,5]^T$。

1. 当 k 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是该向量组的极（最）大无关组？

2. 当 k 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 是该向量组的极（最）大无关组？此时写出 $\boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{a}_4$ 由极（最）大无关组线性表示的表达式。

四、(12 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 2 & -2 \\ 2 & k & 2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}$。

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,求 k 满足的条件;
2. 已知 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值为零,求 k 及另一个特征值;
3. 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间维数为 1,求 k 及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系;
4. 已知 $m\boldsymbol{A}$ 是正交阵,求 m 和 k;
5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 正定,求 k 满足的条件。

五、(12 分)

设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$,已知用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 能把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3(x_1^2+x_2^2)+2x_1x_2+x_3^2$$

化成的标准形为 $g(y_1,y_2,y_3)=ay_1^2+by_2^2+cy_3^2$,求 $\boldsymbol{Q}$ 和 a,b,c,其中 $a<b<c$。

六、(10 分)

求在 $\mathbf{R}^3$ 的两个基:

1. $\boldsymbol{a}_1=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_2=[-2,2,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$;
2. $\boldsymbol{b}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_2=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_3=[1,0,-4]^{\mathrm{T}}$

下有相同坐标的单位向量。

七、(8 分)

设 $\boldsymbol{a}_1=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_2=[0,3,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_3=[3,3,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$,三阶方阵 $\boldsymbol{P}$ 的列分块阵为 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]$。

1. 求正交向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 和 r,s,t,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}$,其中 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 和上三角阵 $\boldsymbol{R}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$。

八、证明题(2×6 分=12 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,证明 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交阵。
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称正定阵,$\boldsymbol{C}$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的惟一解,证明:$\boldsymbol{C}$ 也是对称正定阵。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷六

（时间 110～120 分钟）

注：E 为单位阵，O 为零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，$r(A)$ 为 A 的秩，A^T 为 A 的转置阵，A^* 为 A 的伴随阵，黑体英文和希腊小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分=24 分）。

1. $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^TA=$________。

2. n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&x\\a&a&\cdots&x&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\x&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}=$________。

3. $\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=$________。

4. 向量 $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 下的坐标为（　　）。

5. 若 $|A_{4\times4}|=-2$，则 $|A^*|=$________，$|A^*-A^{-1}|=$________。

6. 设 $A_{3\times3}$ 与 $\begin{pmatrix}4&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$ 相似，则 $|A^2-E|=$________。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分=10 分）。

1. 设 A,B 均为 $2n\times n$ 型矩阵，在下列各项中只有（　　）正确。

A. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 相似　　B. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 的行列式相同

C. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 相合　　D. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 的秩相同

2. 非齐次方程组 $Ax=b$ 有惟一解的充要条件是（　　）。

A. b 能由 A 的列向量组线性表示

B. A 的列向量组是 $[A,b]$ 的列向量组的极大无关组

C. $[A,b]$ 的秩等于 A 的秩

D. $Ax=0$ 有惟一解

3. 若 $A_{m\times k}B_{k\times n}=O$，则 A 和 B（　　）。

A. 必有一个矩阵的秩小于 k

B. 至少有一个是零矩阵

C. 两个矩阵的秩都小于 k

D. 至少有一个矩阵的秩等于 k

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于（　　）。

A. $A^{-1}P_1P_2$　　B. $P_1A^{-1}P_2$

C. $P_1P_2A^{-1}$　　D. $P_2A^{-1}P_1$

5. 设 A 是 $m\times n$ 型矩阵，B 是 $n\times m$ 型矩阵，若 $m>n$，则（　　）。

A. AB 的行向量组线性相关　　B. AB 的列向量组线性无关

C. BA 的行向量组线性相关　　D. BA 的列向量组线性无关

三、（12 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$，求可逆阵 P 和对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

四、(10 分)

当 k 为何值时,方程组

$$\begin{cases}(k+3)x_1+x_2+2x_3=k\\ kx_1+(k-1)x_2+x_3=k\\ 3(k+1)x_1+kx_2+(k+3)x_3=3\end{cases}$$

1. 有惟一解;

2. 有无穷多解;

3. 无解? 在有无穷多解时,求出其通解。

五、(12 分)

设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=5(x_1^2+x_2^2)+k(x_3^2+x_4^2)+2kx_1x_2+4x_3x_4$。

1. k 满足什么条件时,$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$是正定二次型?

2. 当 k 和 m 都是正整数时,已知用正交变换把正定二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$化成的标准形为

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4)=my_1^2+2y_2^2+6y_3^2+(k+5)y_4^2$$

求 k 和 m。

六、判断题,在括号内填上"√"或"×",以确定该命题的对与错(8 分)

1. 若 A,B 均为 n 阶方阵,则 $|A+B|=|A|+|B|$。 ( )

2. $A=[\alpha_1,\cdots,\cdots,\alpha_n]$,$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是 A 的列向量组的极大无关组的充要条件是 $\alpha_j(j=k+1,\cdots,n)$能由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性表示,且表达式惟一。 ( )

3. 若矩阵 A 的行向量组线性无关,则 A 的列向量组线性无关。 ( )

4. 若矩阵 $A,B,A+B$ 均为可逆阵,则$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$。 ( )

5. 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有惟一解,则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解。 ( )

6. 若 x,y 是 A 的两个属于不同特征值的特征向量,则 $x+y$ 也是 A 的特征向量。 ( )

7. 若 A 为 $m\times n$ 矩阵,且 $r(A)=m$,则线性方程组 $Ax=b$ 对任意 $b\in R^n$ 均有解。 ( )

8. 若 A,B 是 n 阶对称正定阵,则 $A+B$ 也是对称正定阵。 ( )

七、(12 分)

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-k\\2&-k&1\end{bmatrix}$,说明理由,回答下列各题:

1. k 为哪些值时,$Ax=0$ 有非零解?

2. k 和 m 为何值时,mA 是正交阵?

3. λ 和 k 为何值时,A 的特征值 λ 对应的特征向量为 $p=[1,1,1]^T$?

八、证明题(4+8=12 分)

1. 设 A,B 和 C 都是 n 阶方阵,且 C 可逆,$C^{-1}AC=B$,λ 为 A 的特征值,对应的特征向量为 p,证明:λ 也是 B 的特征值(请给出对应的特征向量)。

2. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵,方程组 $ABx=0$ 的任一个解向量都能由方程组 $Bx=0$ 的解向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性表示,且表达式惟一,证明:

(1)向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是方程组 $Bx=0$ 的基础解系;

(2)$r(AB)=r(B)$。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷七

（时间 110～120 分钟）

注：E 为单位阵，O 为零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，$r(A)$ 为 A 的秩，A^T 为 A 的转置阵，A^* 为 A 的伴随阵，黑体英文和希腊小写字母为列向量。

一、填空题，将答案填在横线上（6×4 分=24 分）。

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}=$________。

2. 若方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$________。

3. 若向量组 $\alpha_1=[a,0,c]^T,\alpha_2=[b,c,0]^T,\alpha_3=[0,a,b]^T$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式________。

4. 若 $\mathbf{R}^3$ 中两组基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为________。

5. 若 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$________，$y=$________。

6. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f(Py)=6y_1^2$，则 $a=$________。

二、单项选择题，在括号内填上惟一选项（5×2 分=10 分）。

1. 若 A 为 n 阶对称负定阵，k 为正整数，则（　　）。

A. $|A|<0$　　B. A^k 也负定

C. A^{-1} 也负定　　D. A^* 也负定

2. 齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵记为 A，若存在三阶矩阵 $B\neq 0$，使得 $AB=O$，则（　　）。

A. $\lambda=-2$，且 $|B|\neq 0$　　B. $\lambda=2$ 且 $|B|=0$

C. $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　D. $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$

3. 设 n 元列向量 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],B=[\beta_1,\beta_2]$，若 $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则（　　）。

A. $B=AP^T$　　B. $B=AP$　　C. $B=P^TA$　　D. $B=PA$

4. 设 $Ax=0$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组，下列结论只有（　　）正确。

A. 若 $Ax=0$ 有惟一解，则 $Ax=b$ 也有惟一解

B. 若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 也有无穷多解

C. 若 $Ax=b$ 无解，则 $Ax=0$ 也无解

D. 若 $Ax=b$ 有惟一解，则 $Ax=0$ 也有惟一解

5. 设三个同阶方阵 A,P,Q 分别为对称阵、可逆阵和正交阵，在下列四个矩阵变换中，保持矩阵 A 的秩、行列式、特征值和对称性都不变的矩阵变换是（　　）。

A. $P^{-1}AP=B$　　B. $PAQ=C$

C. $P^TAP=F$　　D. $Q^TAQ=H$

三、（12 分）

已知 $\alpha_1=[1,4,0,2]^T,\alpha_2=[2,7,1,3]^T,\alpha_3=[0,1,-1,a]^T,\beta=[3,10,b,4]^T$，问：

(1)a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合；

(2)a,b 为何值是，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出此表示式。