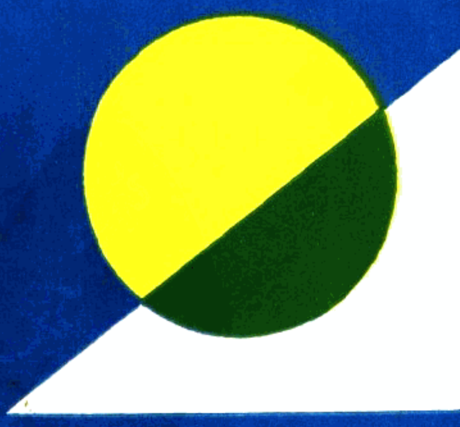
[美] 丹尼尔D·本尼思 著
潘传发 译 杨振德 审校

文科应用数学

国外数学译丛



河南教育出版社

国外数学译丛

文科应用数学

河南教育出版社

国外数学译丛
文科应用数学
〔美〕丹尼尔D·本尼思著
潘传发译　　杨振德审校
责任编辑　　张国旺
河南教育出版社出版
河南第二新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行
850×1168毫米 32开本 12.875印张 316千字
1991年3月第1版　　1991年3月第1次印刷
印数1—2,100册
ISBN7-5347-0309-3/G·272
定价　　4.55元

原书前言

《文科应用数学》（原书名）是为文科及接受普通教育和基础教育的学生编写的，可作为一种趣味性教材，使用一至二学期。这一课程可以是一般性的，概观性的，启发性的或欣赏性的。本书提供一些新颖而有趣的数学题材，介绍各种各样的应用方法以及数学发展史上一些重大事件，并配有大量有趣的练习题。为了寻求新的概念和应用方法，本书作者查阅了文科各专业大量的图书、杂志。这一艰巨劳动的成果体现在本书得以把数学应用于各个学科领域之中。诸如：人类学、考古学、艺术、天文学、生物学、商业、化学、计算机和数据处理、生态学、经济学、电子学、农业、地理、地质学、历史、语言学、医学、矿物学、音乐、物理、心理学、社会学等等方面。此外，本书还提供了不少材料，把数学应用于体育运动、保护用户利益、逻辑学、游戏、魔术和娱乐数学等方面。

学生在学习本书时，一般只须运用算术知识。虽然某些章节要求学生懂一点代数知识，但几乎用不着具体运算。

书中没有须要记忆的陌生公式，也没有机械性操练。学生负担很轻，只要求他们从最基础的数学概念出发来概观各个数学领域，同时跟大量的启发式的应用实例结合起来，以形成一个较完整的概念。本书采用开门见山、深入浅出的方法，一开始就注重用实例说明所讨论的各种数学问题的实际应用。评论家在评论本书时，使用了诸如“妙趣横生”、“数学世界的一颗宝石”这类赞美之词来推荐本书。我深信你也一定会欣赏它的。

书中常常一整节谈的全是应用。有时候先逐步介绍数学概

念，然后在练习中举出多种实例来进一步深化该概念。这些练习题对本书内容的理解和吸收极为重要，这一点应该特别强调才是。许多练习题本身即是应用实例，所以，所有练习的标题均为“应用与练习”。

本书大部分章节可以随意取舍，全书八章的顺序在教学中根据需要几乎可以任意安排。编写过程中充分考虑到了教学中选题和处理所选各题的灵活性。第一章想作为起点，促使学生进一步学习第二章至第七章所包括的内容的兴趣；第八章讨论计算机问题，插在哪里教都可以，并可用于往后的整个教学过程中。作者本人喜欢把第八章放到最后教，因为它带有总结的性质。

本书作者在介绍数学的重要性的同时，还想传达数学的奇妙之处。我期望学生在学完本书时会感到这一课程生动有趣，既欣赏了数学奇境之美妙，又提高了自己的理解水平和思考能力。

本书在编写出版过程中承蒙学院出版社编辑和出版人员大力协助，特在此表示衷心感谢。此外，下述人员(略)曾帮助审校本书，并提出许多宝贵意见，在此一并向他们表示谢意。

目　录

第一章 模 型

“一个数学家，就象一个画家或诗人一样，是一个模型的创造者。”这句话引自G・H・哈代所著《一个数学家的辩解》一书，可能跟你平素对数学的看法不尽一致吧。你或许认为数学主要就是计算和运用公式。如果你真的是这样看待数学，那么当你阅读本书时，便会感到一种愉快的惊诧。这一章及本书其它许多章节都是为了向你显示在各个数学领域里模型的美妙和魅力。我们希望本章能引起你对数学的兴趣，以后每一章也将从直觉和实用的观点出发，为您介绍各个不同的数学分支，你将看到许多始于娱乐和游戏而终于具有重大意义的实际应用的生动实例。

斐波那契数列和其它模型

模型经常出现在数列中，很快你就会看出这些数列呈现出各种各样的数的配置关系。但是在学习如何运用数列之前，有必要先作一个概括的介绍。下面是三个数列以及对每一数列的简短说明或描写：

1，2，3，4，5，… 计数用数，或自然数

2，4，6，8，10，… 正偶数

1，4，9，16，25，… 自然数的平方

每一数列中，数字后面的三个点表示这一模型可以无限地延续下去。一个数列中的每一个数称为该数列的一个项。

下面这道题产生一个有趣的数列：

如果每对兔子每月生殖一对小兔子，每对小兔子头一个月没有生殖能力，但从第二个月往后便每月生殖另一对小兔子；假定不发生死亡现象，那么从一对刚出生的小兔子开始，经过一年之后会有多少对兔子呢？

开始时只有一对兔子，一个月之后仍然是一对兔子，但是它们现在有了生殖小兔子的能力，所以两个月之后就有了两对兔子：其中一对有生殖能力，另一对则没有．三个月之后就有三对兔子：其中两对有生殖能力．如此类推，四个月之后就有五对兔子．这一数列的头两项可推算出来均为1，此后，每一项都是该数列中前两项的和．

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

这一数列以及上述兔子问题，最初是由比萨的列昂纳多（1180—1250）于1202年提出来的；当时他正在把代数介绍到意大利．人们有时也叫他列昂纳多·斐波那契(意为：列昂纳多·波那契之子)，他被认为是十三世纪最伟大的数学家．数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，…被称为斐波那契数列．

不难看出，为什么斐波那契数列中所含各项均为前两项之和（第一、二项除外）．例如，当有21对兔子时，其中13对都已经出生一个月以上，故具有生殖能力，也就是说这13对将生殖另外13对小兔子．将这13对小兔子与原有的21对兔子加起来，便可得到下一个总数，即34对兔子．

斐波那契数列在自然界许多地方均能见到．向日葵花盘上盘旋外伸的葵花籽是沿相反方向延伸的，沿一个方向延伸的葵花籽的数目跟沿相反方向延伸的葵花籽的数目几乎总是斐波那契数列中两个连续项的数目．同样的关系也存在于菠萝、长青松果球、雏菊和其它许多植物中．某些花的花瓣数目也正好符合斐波那契数列．如：百合花（3瓣），金凤花（5瓣），翠雀花（8瓣），

金盏花（13瓣），翠菊（21瓣），雏菊（34，55或89瓣）。

你们当中懂得一点电子学的人一定会高兴知道：斐波那契数列可以由一个特别设计的电路来产生。如果在图1·1 这一电路中所有由"∼"表示的元件均为1Ω的电阻，而且最后一个支路上的电流为1安培，那么通过各电阻的电压（从右到左）分别为斐波那契数列中的各项：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

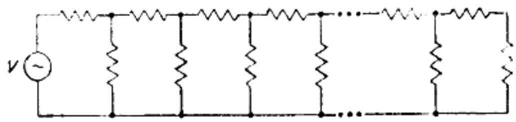


图 1·1

人们通常把1，1，2，3，5，8，13，…这样的数列看作是斐波那契数列，因为它是最原始的斐波那契数列。其实任何一个数列，如果从第二项之后，其中任何一项均为前两项之和，则都可被看作是斐波那契数列。在这个意义上说，下面两组数字便也都是斐波那契数列：

4，7，11，18，29，47，…

5，1，6，7，13，20，33，…

数列开头两项是什么数字无关紧要。只要其它各项每项都是前两项之和，该数列便可称为斐波那契数列。

法国数学家E·A·卢卡斯（1842—1891）推出了数列 2，1，3，4，7，11，18，…并衍生出斐波那契数列中其它各种可能出现的数字之间的某些特定关系。因此，那些不同于最初的斐波那契数列的其它类型的斐波那契数列有时候被称为卢卡斯数列。天文学家注意到了日蚀和月蚀每隔 6，41，47，88，135，223和358 年周而复始地出现所显示出的数学模型。你会看出这些数字组成了一个卢卡斯数列。

这里让我们用斐波那契数列玩一个魔术。你可以像魔术家

似地在瞬息之间计算出任何人写下的斐波那契数列中十个连续项之和。这种神奇快算是怎么回事呢？其实很简单：因为这十个连续项的和总是这一数列中第七项数字的11倍。假定这些数字是3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，那么它们的和便等于55的11倍，即：$11\times55=605$（你可以用加法来验算）。这里需要你做的只是用11来乘任何数字 n。下面是两种快速计算方法。第一种：$11\times n=10\times n+1\times n$或$10\times n+n$。例如：$11\times12=10\times12+12=120+12=132$。第二种方法：要求得任何数的11倍，只须先写下这个数，然后在它下面再写下同样的数，但须要往左边移一位，将这两个数相加即得。因此，$11\times12=$

$$\begin{array}{r}12\\ 12\\ \hline 132\end{array}$$

很容易看出，这个简化式来自

$$\begin{array}{r}12\\ 11\\ \hline 12\\ 12\\ \hline 132\end{array}$$

你可以想出几个斐波那契数列，并验证这一魔术是否行之有效。在应用与练习第4题中我们将会看到这一魔术算法为什么万无一失。

应用与练习

1. 解决斐波那契提出的兔子问题：一年中能繁殖多少对兔子？

2. 在下列斐波那契（或卢卡斯）数列中填空：

(a) 2，6，8，____，____，____，____，____

(b) 2，3，5，____，____，____，____，____，____

(c) ____，____，____，____，____，131，212

(d) ____，____，____，____，36，____，95

(e) 35，____，58，____，____，____

3．如果 a_n 表示一个数列中的任何一项（第 n 项），那么 a_{n+1} 则是紧接它后面的那一项，a_{n-1} 则是它前面的那一项：

$$\cdots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$$

请用 a_{n-1}，a_n，和 a_{n+1} 来表示斐波那契数列中各项之间的关系．

4．现在让我们看看为什么本节中所介绍的魔术算法确实行之有效。设一个斐波那契数列所含十项中的第一项为 x，设第二项为 y，那么第三项便为头两项之和，即 $x+y$。

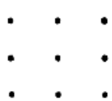
(a) 说明第四项为 $x+2y$。

(b) 说明第五项为 $2x+3y$。

(c) 找出第六项至第十项的表示方法。第十项应该是 $21x+34y$，你可以核对一下．

(d)把所有十项相加，你会得到一个总和：$55x+88y$。再看看第七项为 $5x+8y$。第七项 $5x+8y$ 与十项之总和 $55x+88y$ 之间有什么关系呢？显而易见，十项之和正好是 $5x+8y$ 的11倍。换句话说，就是十项之和是该数列第七项的11倍。

5．本章开始时我们见到的数列之一是由数字的平方组成的．你知道为什么 3^2 或 3×3 被称为 3 的平方吗？仔细看看下图并写出简短的解释。



6．寄一封信的邮费由1957年的 3 分增至1976年的13分．邮费增加的数列为：3 分，4 分，5 分，6 分，8 分，10分，13分。

(a) 由 4 分增至 5 分表明邮费增加了25%。

(b) 哪一次邮费的改变所增加的百分比为最小？

(c) 哪一次邮费的改变所增加的百分比为最大？

帕斯卡（Pascal）三角

下面的数字阵列图不是数列，但它是概率研究中所应用的一个模型（见317面），称之为帕斯卡三角，是以法国数学家布莱兹·帕斯卡的名字命名的，因为这个三角模型是他于1665年介绍到西方国家的。其实，远比他早 200 多年，中国数学家杨辉和朱世杰就已经发现了这个三角阵列。

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

7. (a) 这个三角阵列共包含五行数字，还可以有第六行，第七行等等。每行的数字都由上一行的数字所决定。请仔细研究一下这个三角阵列，确定由上一行推算出下一行所使用的模型。（提示：只需算术运算）

(b) 推算出第六行。

(c) 推算出第七行。

(d) 帕斯卡三角还有其它种类的模型。如果舍去三角形顶上的 1 不计，那么三角便成为：

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

现在每行的第二个数字表明这是第几行。其它的模型没有这

么明显，而且涉及到各构成成分的增加或减少。请找出并描述几个其它的模型。如果三角形中包含有第六行和第七行（即在练习（b）和（c）中推算出来的），你将会感到容易得多。

数列和天文学

对一个模型的观察使得德国数学家J·D·蒂特乌斯找到了一条确定各个行星与太阳之间的递次距离的规则。他于1766年宣布了这一规则。几年之后，法国天文学家J·E·博德认识到这一规则的重大意义并使得人们对蒂特乌斯这一发现给以充分的肯定和重视。此后，这一规则便被称为博德定律。让我们先看下表，然后再来研究这一法则。

行星	博德推算的距离	实际距离*
水星	4	3.9
金星	7	7.2
地球	10	10.00
火星	16	15.2
——	28	—
木星	52	52.0
土星	100	95.3

*计算单位请见应用与练习5.

博德推算出了表中所列的距离，他所依据的定律是以数列0，3，6，12，24，48，96，… 为基础的。如果在这个数列的每一项上加上4，其结果便是表中博德推算的距离，即4，7，10，

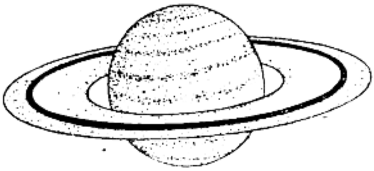


图 1·2

16，28，52，100．这一数列便是用以确定各行星与太阳之间的相对距离的博德定律．可能你已经注意到表中28的位置没有行星，你也多半知道土星之外还有别的行星，但是表上却没有列出来．这是因为在博德定律刚提出来的当时，人们还只知道表中所列举的那些行星的存在．从那以后事态的发展将在下面练习与应用中加以讨论．

应用与练习

1．天王星是威廉·赫歇尔（1738—1822，生于德国，后迁居英国）于1781年发现的，它离太阳的距离为192．按照博德定律土星之外的下一颗星离太阳的距离应为多少？实际距离为192，跟按照博德定律推算的距离比较起来相差多少？

2．发现天王星后，证明它的实际距离符合博德定律，这使得天文学家因为找不到与博德所推算的距离为28的行星而焦虑不安．不久，在1801年，人们在火星和木星的轨道之间终于发现了第一颗（也是最大的一颗）小行星，它离太阳的距离为27.6．后来人们又发现了大量这样的小行星绕太阳旋转，它们的轨道基本上是介于火星和木星之间．

天文学家以博德定律为出发点，于1846年发现了海王星．它离太阳的实际距离是301，跟按博德定律推算的距离比较起来差距大不大？

3．1930年天文学家又发现了冥王星，它离太阳的实际距离为396．这是否符合博德定律？

4. 博德定律是观察一个数列模型的结果. 但遗憾的是，最后它终于不适用于推算距太阳较远的行星. 这一事实是否使你感到这一定律应该从天文史上抹掉？请说明你的理由.

5. 表中所给行星与太阳之间的实际距离是以天文单位（AU）*的十分之一来测量的. 通常人们把地球离太阳的距离作为1个天文单位（1AU），换句话说，表中所列天文单位数值的十分之一是该行星离太阳的实际距离.

(a) 将表中所有其它实际距离换算成天文单位.

(b) 因为地球离太阳的实际距离为九千三百万哩，所以1AU等于____哩？

(c) 计算木星离太阳的距离为____哩？

6. 如果不把水星计算在内，而把金星看作第一颗行星，那么博德距离（简称B）能从该行星的位置P（就金星而言$P=0$，就地球而言$P=1$，以此类推）求得，其计算公式为：$B=3\times2^P+4$. 试求金星、火星、火星和木星之间的小行星带以及土星的博德距离，以验证这个公式.（注$2^0=1$）

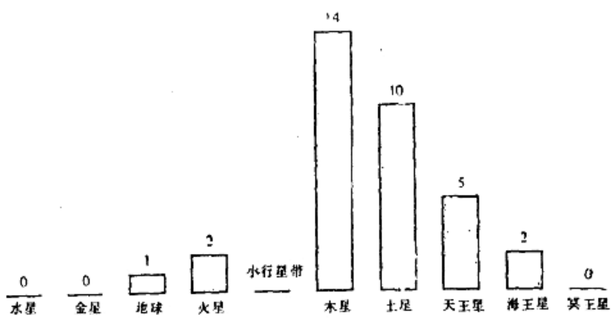


图 1·3

※ AU是Astronomical unit的缩写，即天文单位。