黑博士"临考点题猜题"命题浓缩精华系列

2004年硕士研究生入学考试

黑 博 士 品 牌 标 志

BLACK DOCTOR 黑博士考研信息工作室 WORKROOM BEIJING

数学 11月

最后冲刺密押五套A卷

数学三

组编 黑博士考研信息工作室

编著 陈跃祥 周华强 王东明

（北京大学著名命题预测专家）

蔡昌林 林祥源 魏柏芳

（清华大学著名命题研究专家）

连续多年国内同类最畅销书

本书是全国惟一的密押卷品牌系列书

世界图书出版公司

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

2004年硕士研究生入学考试

数学最后冲刺密押5套 A卷（11月）

——新典型100题·数学三

（经济类·经典版）

组　编　黑博士考研信息工作室
主　编　铁　军　李　强（著名命题研究专家）
编　著　北京大学著名数学教授　周华强
清华大学著名数学教授　林祥源
北京大学著名数学教授　陈跃祥
清华大学著名数学教授　蔡昌林
北京理工大学数学博士　魏柏芳
上海交通大学数学博士　王东明
策划人　汪　澜

世界图书出版公司
西安·北京·广州·上海

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试试题详解与命题研究 / 陈志良 主编

—西安：世界图书出版西安公司，2003.10

ISBN 7 - 5062 - 6141 - 3

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 098353 号

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

数学最后冲刺密押 5 套卷（数学三）

——新典型 100 题

铁 军　李 强　　主　编

焦 毓 本　　责任编辑

黑博士工作室　　总 策 划

世界图书出版西安公司 出版发行

（西安市南大街 17 号　邮编：710001 电话：7279676）

旗舰印务有限公司印刷

各地新华书店经销

开本：787×1092（毫米）1/16　印张：58　字数：1160 千字

2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷

ISBN　7-5062-6141-3/H・507

Wx 6141　全套十二册定价：120.00 元

若发现黑博士系列图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题请拨打下面电话联系调换：（029）4233161　4235409

目　录

经济类　数学三

特别注意：特别推荐黑博士红皮《政治高分复习指导》、红皮《政治高分典型题库精编 **1800** 题》、《北京政治强化班冲刺大串讲红皮书》、红皮《政治冲刺命题预测 **800** 题》、绿皮《政治最后 **30** 天冲刺命题预测卷》、《黑博士背诵版 **A**、**B**、**C**》及黑博士《临考点题猜题：数学、英语、政治 **11/12** 月 **5** 套密押试卷》。

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004 年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学 11 月最后冲刺浓缩密押 5 套试卷

黑博士数学三试卷(一)

——北京大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003 年 11 月于北京

高分经验警示: 在当前激烈的考研竞争中,对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言,做一定数量的典型题是成功的关系,也就是说:"数学要想考高分,除过做典型题之外,再没有其它的秘诀或捷径!"

提醒特别注意: 此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!在 2003 年考研中,本书中 48 道题相似或命中考题中非客观题(大题)32 道(次),其中数学一,10 题 136 分;数学二,9 题 124 分;数学三,11 题 142 分;数学四,9 题 120 分。

黑博士锦囊妙计: 命题试卷中带 ※ 者为二级重点预测典型题,带 ※※ 者为一级重点预测典型题.此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!

得分	评卷人

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中的横线上.)

(1) 积分$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx =$ ______.

(2) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为______.

(3) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$ 的收敛域为______.

(4) 设$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix}$,则多项式$f(x)$ 的全部根为______.

(5) 设两个相互独立的事件A和B至少发生一个的概率为$\frac{8}{9}$,已知A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等. 则 $P(A) =$ ______.

(6) 某人向一目标独立地射击 3 次,每次命中率为 0.4. 若目标命中一次,被击毁的概率为$\frac{1}{10}$,若命中二次、三次,目标被击毁的概率分别为$\frac{4}{10}$ 和$\frac{7}{10}$. 求目标被击毁的概率为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

______.

得分	评卷人

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内．）

(7) 设$f(x)$可导且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则$\Delta x\to 0$时，$f(x)$在x_0处的微分dy是(　　).

(A) 与Δx等价的无穷小　　(B) 与Δx同阶的无穷小

(C) 比Δx低阶的无穷小　　(D) 比Δx高阶的无穷小

(8) 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

※(9) 设$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$为(　　).

(A) $-2(1-x^2)^2+C$　　(B) $2(1-x^2)^2+C$

(C) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　(D) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

(10) 下列等式中是差分方程的是(　　)

(A) $2\Delta Y_t=Y_t+t$　　(B) $\Delta^2Y_t=Y_{t+2}-2Y_{t+1}+Y_t$

(C) $-2\Delta Y_t=2Y_t+3t$　　(D) $Y(2x)+Y(3x)=2^x$

※※(11) 设$z=y\ln x$而$x=e^t$，$y=\cos t$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$等于(　　)

(A) $t\cos t$　　(B) $t+e^{-t}\cos t$

(C) $\cos t-t\sin t$　　(D) $t\sin t-\cos t$

(12) 设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1,2,5$，矩阵$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2$，则矩阵$\boldsymbol{B}$的行列式$|\boldsymbol{B}|$的值为(　　)

(A) -10　　(B) -1　　(C) 80　　(D) 25

(13) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则下列结论中不正确的是(　　)

(A) $\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}^{-1}$

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

※(14) 设随机变量$X_1,\cdots,X_9$相互独立同分布，$EX_i=1$，$DX_i=1$，$i=1,\cdots,9$．令$S_9=\sum_{i=1}^{9}X_i$．则对任意$\varepsilon>0$，从切比雪夫不等式直接可得(　　).

(A) $P\{|S_9-1|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$　　(B) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{9}{\varepsilon^2}$

(C) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$　　(D) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$

三、解答题（本题共9小题，满分94分．解答应写文字说明、证明过程或演算步骤．）

得分	评卷人

（15）（本题满分9分）

设 $x_1=2, x_2=2+\frac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

得分	评卷人

（16）（本题满分8分）

已知某制造商的生产函数为 $f(x,y)=150x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$，其中 x 代表劳动力的数量，y 为资本数量，每个劳动力与每个单位资本的成本分别是100元和200元，该制造商的总资金是6000元，问应如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本，以使生产函数最大.

得分	评卷人

（17）（本题满分8分）

求 $\int_0^6 x(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

得分	评卷人

※（18）（本题满分9分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(b)=g(a)=1$，在 (a,b) 内 $f(x),g(x)$ 可导，且 $g(x)+g'(x)\neq 0$. $f'(x)\neq 0$ 证明：$\exists \xi,\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}.$$

得分	评卷人

(19) (本题满分 8 分)

$$\iint\limits_{D} |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}\sigma \quad D: 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

得分	评卷人

(20) (本题满分 13 分)

设矩阵，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}| = -1$. 又设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0，属于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，求 a, b, c 及 λ_0 的值.

得分	评卷人

※※(21) (本题满分 13 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

得分	评卷人

※(22)（本题满分13分）

设二维随机变量(X,Y)在矩形区域$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从二维均匀分布，随机变量

$$U=\begin{cases}1, & X^2+Y^2\leqslant 1,\\ -1, & X^2+Y^2>1;\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ -1, & X>Y.\end{cases}$$

(1) 求U和V的联合概率分布；

(2) 讨论U和V的相关性与独立性.

得分	评卷人

(23)（本题满分13分）

对某正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的均值μ进行假设检验. $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$. 已知$\sigma=300$,取样本容量$n=25$,取$H_0$的接受域为$\overline{X}\in(-\infty,995)$.

(1) 若$\mu_0=900$,求犯第Ⅰ类错误（弃真）的概率α；

(2)$\mu=\mu_0=900$不正确,$\mu=\mu_1=1070$正确,问此时犯第Ⅱ类错误（取伪）的概率β是多少?

(3) 若要使犯第Ⅰ类错误的概率减少到(1)中α值的一半,问样本容量应增大到多少?

黑博士考研信息工作室
Black Doctor Workroom BeiJing

2004 年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学 11 月最后冲刺浓缩密押 5 套试卷

黑博士数学三试卷(一) 参考答案

黑博士考研信息工作室
2003 年 11 月于北京

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) $-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$

【解析】 设 $u=2x$,再令 $v=\cos u$,则有

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sin u}{\cos^2 u+\frac{1}{2}\sin^2 u}du$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d(\cos u)}{\cos^2 u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 u}=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1+v^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\arctan v+C=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$$

(2) $y_t=A(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$

【解析】 先将所给差分方程化为标准形式

$$y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t$$

相应的齐次差分方程为 $y_{t+1}+5y_t=0$.

特征方程为 $\lambda+5=0$.

特征根为 $\lambda=-5$.

齐次差分方程的通解为 $Y_t=A\cdot(-5)^t$. 由于 $\lambda=-5\neq 1$,令 $y_t^*=B_0+B_1t$ 为求非齐次差分方程的特解。将其代入所给差分方程,可使

$$[B_0+B_1(t+1)]+5(B_0+B_1t)=\frac{5}{2}t$$

$$6B_1t+(6B_0+B_1)=\frac{5}{2}t$$

因此应有

$$6B_1=\frac{5}{2}\qquad B_1=\frac{5}{12}$$

$$6B_0+B_1=0\qquad B_0=-\frac{5}{72}$$

$$y_t^*=\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$$

故原差分方程的通解为

$$y_t=A(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$$

(3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}|x|^{2n+2}}{3^{n}|x|^{2n}}=3|x|^2$,故收敛半径为 $R=\sqrt{\frac{1}{3}}$,于是知收敛区间为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

当 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ 发散,当 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ 发散,因此收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4) 1, −1,2, −2.

【解法1】 $f(x)$ 的转置是范德蒙德行列式 $D(x,1,-1,2,-2)$,所以可按公式计算得

$$\begin{aligned}f(x)&=D(x,1,-1,2,-2)\\&=(1-x)(-1-x)(2-x)(-2-x)\\&\qquad\cdot(-1-1)(2-1)(-2-1)\\&\qquad\qquad\cdot(2+1)(-2+1)\\&\qquad\qquad\qquad\cdot(-2-2)\\&=72(1-X)(-1-X)(2-X)(-2-X).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的全部根为1、−1,2, −2.

【解法2】 可利用范德蒙德行列式的性质有:

$$D(x,1,-1,2,-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,\text{或 } x=-1,\text{或 } x=2,\text{或 } x=-2.$$

所以 $f(x)$ 全部根为1, −1,2, −2.

【解法3】 利用行列式的性质计算 $f(x)$,比如将 $f(x)$ 化为上三角形,直接算出

$$f(x)=72(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

所以 $f(x)$ 全部根为1, −1,2, −2.

(5) $\frac{2}{3}$

【解析】 因为 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$,故 $P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B)$. 由题设,已知 $P(A\cup B)=\frac{8}{9}$,故 $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=\frac{1}{9}$.

又因为 A,B 独立,所以 $\bar{A},\bar{B}$ 也相互独立,且有 $P(\bar{A})=(\bar{B})$,所以

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[P(\bar{A})]^2=\frac{1}{9},P(\bar{A})=\frac{1}{3}\text{(取正号)}$$

而 $P(A)=\frac{2}{3}$.

(6) 0.2032

【解析】 设 A_i 表示目标被击中 i 次,$i=0,1,2,3$,用 B 表示目标被击毁. 目标被击毁这一事件可分为击中0,1,2,3次四种情形,即 A_i,$i=0,1,2,3$ 是一完全分划,由全概率公式和二项分布得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=(1-0.4)^3\cdot0+C_3^1 0.4(1-0.4)^2\cdot\frac{1}{10}+C_3^2 0.4^2(1-0.4)\cdot\frac{4}{10}+0.4^3\cdot\frac{7}{10}\end{aligned}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$= 0.2032$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

(7) B

【解析】 因为

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

所以,当$\Delta x \to 0$时,$f(x)$ 在x_0处的微分 dy 是与Δx同阶的无穷小.

(8) B

【解析】 由$f''(x) > 0$知,$f'(x)$ 单调增加,所以

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) \quad (0 < \xi < 1)$$

由$f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$ 知,$f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1)$.

(9) C

【解析】 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

(10) A

【解析】 将上述式子整理后可以看出,(B) 是一个恒等式,(C) 为 $-Y_t + \frac{3}{2}t = 0$ 及(D)均不含两个或两个以上未知数的下标差为整数的情况。

(11) C

【解析】 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{x}e^t + \ln x(-\sin t)$

$= \cos t - t\sin t$

(12) C

【解析】 设λ是$\boldsymbol{A}$的一个特征值,对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}(\alpha \neq 0)$,则有$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$,所以$3\boldsymbol{A\alpha} = 3\lambda\boldsymbol{\alpha}$,即$3\lambda$是矩阵$3\boldsymbol{A}$的一个特征值。

同理可得,λ^2是矩阵$\boldsymbol{A}^2$的特征值。

所以$(3\lambda - \lambda^2)$是矩阵$\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2$的特特值。

将$\lambda = -1,2,5$分别代入$(3\lambda - \lambda^2)$,得$\boldsymbol{B}$的特征值为-4,2,-10。

因为矩阵$\boldsymbol{B}$有3个不同的特征值,所以必可对角化,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & -10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}$$

因为$|\boldsymbol{\Lambda}| = 80$,且相似矩阵的行列式相等。

所以$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\Lambda}| = 80$.

(13) D

【解析】 由$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为可逆矩阵,则

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BAA}^{-1}$ 即 $\boldsymbol{BA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

从而$\boldsymbol{A}^{-1}$和$\boldsymbol{B}$可交换.

$B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$,即 $B^{-1}A = AB^{-1}$

从而 A 和 B^{-1} 可交换。

由 $AB = BA$,两边取逆,有

$(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$,即 $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

从而 A^{-1} 和 B^{-1} 可交换。

故(A),(B),(C) 均为正确的结论,只有(D) 为不正确的结论,故正确答案为(D).

(14) B

【解析】 由于 $ES_9 = 9, DS_9 = 9, D(\frac{1}{9}S_9) = \frac{1}{9}$,因此应选(B).

三、解答题(本题共9小题,满分94分.)

(15) (本题满分9分)

【解析】 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,设为 a,则由 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 知 a 应满足:$a = 2 + \frac{1}{a}$,

$\therefore a = \sqrt{2} + 1 (\because a > 0)$.

$$而\left|x_{n+1} - (\sqrt{2}+1)\right| = \left|2 + \frac{1}{x_n} - (\sqrt{2}+1)\right|$$

$$= \left|\frac{(\sqrt{2}-1)x_n - (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{x_n}\right|$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)\left|x_n - (\sqrt{2}+1)\right|}{x_n}$$

$\because x_n > 2$, $\therefore$ 当 $n \geqslant 2$ 时, $\left|x_{n+1} - (\sqrt{2}+1)\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_n - (\sqrt{2}+1)\right|$.

由于 $0 < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < 1$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n - (\sqrt{2}+1)] = 0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} + 1$.

(16) (本题满分8分)

【解析】 由题意知这里一个条件极值问题,即求在条件

$$100x + 200y = 6000$$

之下求

$$f(x,y) = 150x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

的最大值.

令,$F(x,y,\lambda) = 150x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \lambda(6000 - 100x - 200y)$,对方程两边求关于 x,y,λ 的偏导数得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 100x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 100\lambda = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 50x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - 200\lambda = 0, & (2) \\ 6000 - 100x - 200y = 0. & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 由(1)得:\lambda = x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ 由(2)得:\lambda = \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4y.$$

代入(3)得 $600y = 6000$, $y = 10$, $x = 40$. 即用4000元雇佣劳动力,2000元作资本,可使生

产函数$f(x,y)$最大.

(17) (本题满分 8 分)

【解析】 先配方:$6x-x^2=9-(x-3)^2$,命$x-3=3\sin t$,

$$\int_0^6 x(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+3\sin t)3^3|\cos t|^3 3\cos t\mathrm{d}t$$

$$=3^5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^4 t\mathrm{d}t=243\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$=486\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=486\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{729}{8}\pi$$

(18) (本题满分 9 分)

【解析】 原结论 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}=\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$,

将η和ξ均看作变量,则上式可写成 $\dfrac{f'(\xi)}{[e^{\xi}g(\xi)]'}=\dfrac{f'(\eta)}{(e^{\eta})'}$,

辅助函数可令$\varphi(x)=e^x g(x),\psi(x)=e^x$.

【证】 令$\varphi(x)=e^x g(x)$,则由题设可知$f(x),\varphi(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理,于是$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b g(b)-e^a g(a)}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}$$

$$\xrightarrow{\because g(a)=g(b)=1}\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]},\qquad(*)$$

又令$\psi(x)=e^x$,则$f(x),\psi(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理,于是$\exists\eta\in(a,b)$,使得

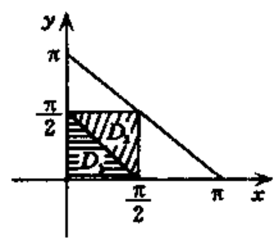
$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}},\qquad(**)$$

由(*),(**)可得

$$\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}.$$

(19) (本题满分 8 分)

【解析】



$$\iint_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_{D_1}|\cos(x+y)|\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}|\cos(x+y)|\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \pi - 2.$$

(20) （本题满分 13 分）

【解析】由于 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$，故有：$A^* = (\det A) \cdot A^{-1}$

又由 $A^* \cdot \alpha = \lambda\alpha = (\det A) \cdot A^{-1} \cdot \alpha$，两边左乘 A 可得：

$$\lambda A\alpha = A(\det A) \cdot A^{-1} \cdot \alpha \Rightarrow A\alpha = \frac{\det A}{\lambda} \cdot A \cdot A^{-1}\alpha = \frac{\det A}{\lambda} \cdot \alpha$$

即 A 的一个特征向量为 $\xi = \frac{\det A}{\lambda} = \frac{-1}{\lambda}$.

由 $\det A = -1 = (1-c)(-3-cb) - a(ab+5) = -1$ ①

又 $A\alpha = -\frac{1}{\lambda}\alpha \Rightarrow -a + c + 1 = \frac{1}{\lambda} = -2 - b = 1 - c + a$ ②

解之可得：$a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$.

(21) （本题满分 13 分）

【解析】 $(A - E)BA^{-1} = 3E$

$$B = 3(A - E)^{-1}A = 3[A^{-1}(A - E)]^{-1} = 3(E - A^{-1})^{-1} = 3\left(E - \frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}$$

$$|A^*| = 8 = |A|^{4-1} = |A|^3, |A| = 2$$

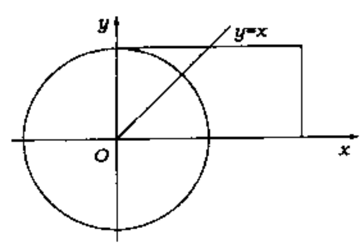
$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(22) （本题满分 13 分）

【解析】 (1) 依题意可知 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

(1) (U,V) 的可能取值为 $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$ 如图



$$P\{V = -1\} = P\{X > Y\} = \iint\limits_{\substack{x>y \\ (x,y)\in D}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4},$$

$$P\{U = -1\} = P\{X^2 + Y^2 > 1\} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2>1 \\ (x,y)\in D}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 - \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned} P\{U = 1, V = -1\} &= P\{X^2 + Y^2 \leqslant 1, X > Y\} \\ &= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1 \\ x>y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1 \\ x>y>0}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

$$P\{U = -1, V = -1\} = P\{V = -1\} - P\{U = 1, V = -1\} = \frac{12 - \pi}{16}.$$

类似地可以计算出其它 p_{ij} 的值列表如下：

$U \backslash V$	-1	1	
-1	$\frac{12-\pi}{16}$	$\frac{4-\pi}{16}$	$1-\pi/8$
1	$\pi/16$	$\pi/16$	$\pi/8$
	$3/4$	$1/4$	

(2) 从 (U,V) 的联合分布与边缘分布可以计算出

$$EU=\pi/4-1,\quad EV=-1/2,\quad EUV=1/2.$$

计算可知 $EUV\neq EUEV$，即 U 与 V 相关，当然 U 与 V 也一定不独立.

(23) （本题满分 13 分）

【解析】 本题是在 σ^2 已知的情况下，对 μ 进行单侧（右侧）假设检验的问题. $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0,\sigma=300$.

(1) $\mu_0=900,n=25,H_0$ 的拒绝域为 $\overline{X}\in(995,+\infty)$

$$\alpha=P\{\text{拒绝 }H_0\mid H_0\text{正确}\}=P\{\overline{X}>995\mid\mu=\mu_0=900\}$$
$$=P\left\{\frac{\overline{X}-900}{300/\sqrt{25}}>\frac{995-900}{300/\sqrt{25}}\right\}=P\{\overline{X}^*>1.58\}$$
$$=1-\Phi(1.58)\approx1-0.943=0.057.$$

(2) $\mu=\mu_1=1070,n=25,H_0$ 的接受域为 $\overline{X}\in(-\infty,995)$

$$\beta=P\{\text{接受 }H_0\mid H_0\text{ 不正确},\mu=\mu_1=1070\text{ 正确}\}$$
$$=P\{\overline{X}<995\mid\mu=\mu_1=1070\}=P\left\{\frac{\overline{X}-1070}{300/\sqrt{25}}<\frac{995-1070}{300/\sqrt{25}}\right\}$$
$$=P\{\overline{X}^*<-1.25\}=\Phi(-1.25)$$
$$=1-\Phi(1.25)\approx1-0.8944=0.1056.$$

(3) 若要 $\alpha_1\leqslant\frac{1}{2}(0.057)=0.0285$，求 $n\geqslant$?

$$\alpha_1=P\{\text{拒绝 }H_0\mid H_0\text{ 正确}\}=P\{\overline{X}>995\mid\mu=\mu_0=900\}$$
$$=P\left\{\frac{\overline{X}-900}{300/\sqrt{n}}>\frac{995-900}{300/\sqrt{n}}\right\}=P\{\overline{X}^*>0.3167\sqrt{n}\}$$
$$=1-\Phi(0.3167\sqrt{n})\leqslant0.0285,$$

即
$$\Phi(0.3167\sqrt{n})\geqslant1-0.0285=0.9715.$$

反查表得 $0.3167\sqrt{n}\geqslant1.9$

$$n\geqslant\left(\frac{1.9}{0.3167}\right)^2\approx35.99.\quad\text{取 }n\geqslant36.$$

黑博士考研信息工作室
Black Doctor Workroom BeiJing

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学11月最后冲刺浓缩密押5套试卷

黑博士数学三试卷(二)

——清华大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003年11月于北京

高分经验警示:在当前激烈的考研竞争中,对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言,做一定数量的典型题是成功的关系,也就是说:"数学要想考高分,除过做典型题之外,再没有其它的秘诀或捷径!"

提醒特别注意:此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!在2003年考研中,本书中48道题相似或命中考题中非客观题(大题)32道(次),其中数学一,10题136分;数学二,9题124分;数学三,11题142分;数学四,9题120分.

黑博士锦囊妙计:命题试卷中带※者为二级重点预测典型题,带※※者为一级重点预测典型题.此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中的横线上.)

(1) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$__________.

※(2) 设某产品在时期t的价格,总供给与总需求分别为p_t,S_t与D_t;并设对于$t=0,1,2,\cdots$有(1)$S_t=2p_t+1$;(2)$D_t=-p_{t-1}+5$;(3)$S_t=D_t$,则由(1),(2),(3)可得差分方程为__________.

(3) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(2x)^n$的收敛域__________.

(4) 设三维向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^T$,$\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角为__________.

(5) 设在3次独立试验中,事件A出现的概率均相等且至少出现1次的概率为$\dfrac{19}{27}$,则在1次试验中,事件A出现的概率为__________.

※(6) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立,且均服从区间(3,6)上的均匀分布,记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.问当$n\to\infty$时,$\overline{X}$依概率收敛于__________.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com