高等学校数学教材配套辅导书

高等数学习题集

（修订本）

主　编　北京大学数学科学学院　韩　松

编　委　夏元清　张高民　王方玉

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

高等数学习题集

（修订本）

主　编　北京大学数学科学学院
　　　　韩　松
编　委　夏元清　张高民　王方玉
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/韩松主编.-北京:科学技术文献出版社,2001.12(重印)

ISBN 7-5023-3297-9

Ⅰ.高… Ⅱ.韩… Ⅲ.高等数学课-高中-习题 Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17005 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)68515381,(010)68515544-2172

图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544－2172

图书发行部传真:(010)68514035

策　划　编　辑:胡东华

责　任　编　辑:梁　静

责　任　校　对:李海燕

发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销

印　　刷　　者:三河市富华印刷包装有限公司

版（印）次:2001 年 12 月第 3 版第 2 次印刷

开　　　　　本:850×1168　32 开

字　　　　　数:630 千

印　　　　　张:18.875

定　　　　　价:16.00 元

(京)新登字130号

科学技术文献出版社
向广大读者致意

前　　言

编者在多年教学过程中，感到一本能适合于各个层次读者的习题集对数学技巧的掌握和思维能力的提高是十分必要的，故编者将教学过程中使用效果较好的习题(包括近几年的考研题)编纂成书，以飨读者。

本书是根据本科非数学专业的教学要求，并参照数学考研大纲而编写的，共十章，分为：第一章　函数与极限；第二章　导数、微分及其应用；第三章　不定积分；第四章　定积分及其应用；第五章　级数；第六章　空间解析几何；第七章　多元函数及其微分学；第八章　重积分；第九章　曲线积分、曲面积分及场论初步；第十章　常微分方程，每节的习题分选择题、填空题和解答题。在习题题解部分，选择题只给出答案，对部分填空题和所有解答题都给出了详细的解答过程，有的还是一题多解，以开拓读者思路。

建议读者首先熟悉相应数学教材，再选做本习题集，相信会对读者数学基础和解题能力的提高有所帮助，同时也可作为高校教师和报考硕士研究生的考生的参考书。

由于编者水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，希望广大读者批评指正。

编者

科学技术文献出版社方位示意图

目　　录

第一部分　习　　题

第二部分　答案与提示

第一部分 习 题

第一章 函数与极限

一 函 数

1. 选择题

1) 区间$[a,+\infty)$表示不等式(　　).

(A) $a<x<+\infty$;　　(B) $a\leqslant x<+\infty$;

(C) $a<x$;　　(D) $a\geqslant x$.

2) 若 $\varphi(t)=t^3+1$,则 $\varphi(t^3+1)=$(　　).

(A) t^3+1;　　(B) t^6+2;

(C) t^9+2;　　(D) $t^9+3t^6+3t^3+2$.

3) 设 $y=f(x)$的定义域是$[-1,1]$,则 $y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域是(　　)其中$0\leqslant a\leqslant 1$.

(A) $[a-1,a+1]$;　　(B) $[-a-1,-a+1]$;

(C) $[1-a,a-1]$;　　(D) $[a-1,1-a]$.

4) 函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是(　　).

(A) 偶函数;　　(B) 奇函数;

(C) 非奇非偶函数;　　(D) 既是奇函数又是偶函数.

5) 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形对称于直线(　　).

(A) $y=0$;　　(B) $x=0$;

(C) $y=x$;　　(D) $y=-x$.

6) 若 $f(x)$为奇函数,$\varphi(x)$为偶函数,且 $\varphi(f(x))$有意义,则 $\varphi(f(x))$是(　　).

(A) 偶函数;　　(B) 奇函数;

(C) 非奇非偶函数；　　(D) 可能是奇函数也有可能是偶函数.

7) 函数 $y=10^{x-1}-2$ 的反函数是(　　).

(A) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}$；　　(B) $y=\log_x 2$；

(C) $y=\log_2\frac{1}{x}$；　　(D) $y=1+\lg(x+2)$.

8) 在区间$(-1,0)$上由(　　)给出的函数是单调增加的.

(A) $y=|x|+1$；　　(B) $y=5x-2$；

(C) $y=-4x+3$；　　(D) $y=|x|-2x$.

9) 函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$是周期函数,它的最小正周期是(　　).

(A) 2π；　　(B) π；

(C) $\frac{\pi}{2}$；　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

10) 函数 $y=f(x)$与它的反函数 $x=\varphi(y)$在同一坐标系中的图像是(　　).

(A) 完全不同的；　　(B) 部分相同,部分不同；

(C) 完全相同的；　　(D) 可能相同,也可能不同.

2. 填空题

1) 设 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1\leqslant x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x<3.\end{cases}$

则 $f(x)$的定义域______, $f(0)=$______, $f(1)=$______.

2) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$的定义域______,值域是______.

3) 设 $f(x)=x-x^3$,若 $f(x)=0$,则 $x=$__________；若 $f(x)>0$,则 $x\in$______；若 $f(x)<0$,则 $x\in$______.

4) 设 $f(x)=ax+b$,则 $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$______.

5) 设 $f(x)=\frac{1}{x}$,若 $f(x)+f(y)=f(z)$,则 $z=$______.

6) 若 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,则 $f[f(x)]=$______, $f\{f[f(x)]\}=$______.

7) 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$,则 $f(x)=$______.

8) 若 $z=x+y+f(x-y)$,且知当 $y=0$ 时, $z=x^2$,则 $f(x)=$______.

9) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,则 $f(x)=$______.

10) 若 $\varphi(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ -x & x>0\end{cases}$ 而 $f(x)=\sqrt{\varphi^2(x)}$,则 $\varphi[f(x)]=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$

3. 解答题

1) 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1-x^2)$;　　(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y = x(x-1)(x+1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;　　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

2) 若 $f(t) = 2t^2 + \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{5}{t} + 5t$,证明 $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

3) 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \lg x, (0, +\infty)$;　　(2) $y = \sin x, \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4) 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad - bc \neq 0)$,当 a,b,c,d 满足什么条件时;这反函数与直接函数相同?

5) 对于函数 $f(x) = x^2$,如何选择邻域 $U(0,\delta)$的半径 δ,就能使与任一 $x \in U(0,\delta)$所对应的函数值都在领域 $U(0,2)$内?

6) 设 $G(x) = \ln x$,证明:当 $x > 0, y > 0$,下列等式成立:

(1) $G(x) + G(y) = G(xy)$;

(2) $G(x) - G(y) = G\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

7) 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$,(2)$f(\sin x)$,(3)$f(x+a)$,$(a>0)$,(4)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域各是什么?

8) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = e^x$. 求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

9) 设 $f(x)$适合 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$($a$、$b$、$c$ 均为常数)且$|a| \neq |b|$,试证:$f(-x) = -f(x)$.

10) 设函数 f 在$(-\infty, +\infty)$内有定义,$f(x) \neq 0$,$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,试求:$f(1985)$.

11) 试证:若对于函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$有等式 $f(x+T) = Kf(x)$(式中 K、T 为正常数),且 $f(x) = a^x\varphi(x)$(式中 a 为常数),则 $\varphi(x)$为以 T 为周期的

函数.

12) 求函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

13) 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$ 都为单调增加函数,试证:

若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$,则有 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant \psi[\psi(x)]$.

二 极 限

1. 选择题

1) 若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a,则在 a 的 ε 领域之外,数列中的点(　　).

(A) 必不存在;　　(B) 至多只有有限多个;

(C) 必定有无穷多个;　　(D) 可以有有限个,也可以有无限多个.

2) 若数列 $\{x_n\}$ 在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 邻域内有无穷多个数列的点,则(　　). (其中 ε 为某一取定的正数)

(A) 数列 $\{x_n\}$ 必有极限,但不一定等于 a;

(B) 数列 $\{x_n\}$ 极限存在且一定等于 a;

(C) 数列 $\{x_n\}$ 的极限不一定存在;

(D) 数列 $\{x_n\}$ 一定不存在极限.

3) 极限定义中 ε 与 δ 的关系是(　　).

(A) 先给定 ε 后唯一确定 δ;　　(B) 先确定 ε 后确定 δ,但 δ 的值不唯一;

(C) 先确定 δ 后给定 ε;　　(D) ε 与 δ 无关.

4) 任意给定 $M>0$,总存在着 $X>0$,当 $x<-X$ 时,$f(x)<-M$,则(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$;

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$;　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

5) 若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 极限存在,则(　　).

(A) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在且等于极限值;

(B) $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在,但不一定等于极限值;

(C) $f(x)$ 在 x_0 的函数值可以不存在;

(D) 如果 $f(x_0)$ 存在的话必等于极限值.

6) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则(　　).

(A) $f(x)$ 必在 x_0 的某一邻域内有界;

(B) $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内一定无界;

(C) $f(x)$在 x_0 的任一邻域内一定有界；

(D) $f(x)$在 x_0 的任一邻域内一定无界.

7) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在,则(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且 $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$；

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不一定存在；

(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$一定不存在.

8) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,则

(A) 当 $g(x)$为任意函数时,有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立；

(B) 仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ 时,才有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立；

(C) 当 $g(x)$为有界时,有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立；

(D)仅当 $g(x)$为常数时,才能使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立.

9) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则下列极限一定存在的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^a$　(a 为实数)；(B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$；　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$.

10) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都不存在,则(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都不存在；

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都存在；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$中恰有一个存在,而另一个不存在；

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$有可能都存在.

11) 数列 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\cdots$是(　　).

(A) 以 0 为极限；　　(B) 以 1 为极限；

(C) 以$\frac{n-2}{n}$为极限；　　(D) 不存在极限.

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) = (\quad)$.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\infty$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2}/n^2=\frac{1}{2}$;

(D) 极限不存在.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$的值为(　　).

(A) 1;　　(B) ∞;

(C) 不存在;　　(D) 0.

14) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=($　　$)$.

(A) ∞;　　(B) 不存在;

(C) 1;　　(D) 0.

15) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+2)}=($　　$)$.

(A) 1/3;　　(B) $-1/3$;

(C) 0;　　(D) 2/3.

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=($　　$)$.

(A) e^{-2};　　(B) ∞;

(C) 0;　　(D) $\frac{1}{2}$.

17) 无穷小量是(　　).

(A) 比零稍大一点的一个数;　　(B) 一个很小很小的数;

(C) 以零为极限的一个变量;　　(D) 数零.

18) 两个无穷小量 α 与 β 之积 $\alpha\beta$ 仍是无穷小量,且与 α 或 β 相比(　　).

(A) 是高阶无穷小;　　(B) 是同阶无穷小;

(C) 可能是高阶,也可能是同阶无穷小;

(D) 与阶数较高的那个同阶.

19) 无穷多个无穷小量之和(　　).

(A) 必是无穷小量;　　(B) 必是无穷大量;

(C) 必是有界量;

(D) 是无穷小,或是无穷大,或都有可能是有界量.

20) 无穷大量与有界量的关系是(　　).

(A) 无穷大量可能是有界量；　(B) 无穷大量一定不是有界量；

(C) 有界量可能是无穷大量；　(D) 不是有界量就一定是无穷大量.

21) 试决定当 $x\to 0$ 时下列哪一个无穷小是对于 x 的三阶无穷小(　　).

(A) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$；　(B) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$($a>0$是常数)；

(C) $x^3+0.0001x^2$；　(D) $\sqrt[3]{\tan x}$.

22) 指出下列函数中当 $x\to +0$ 时(　　)为无穷大.

(A) $2^{-x}-1$；　(B) $\dfrac{\sin x}{1+\sec x}$；

(C) e^{-x}；　(D) $e^{\frac{1}{x}}$.

2. 填空题

1) 设数列 $\{x_n\}$ 的通项公式是 $x_n=\dfrac{2n-1}{5n+2}$,对于预先任意给定的正数 ε,若 $\left|x_n-\dfrac{2}{5}\right|<\varepsilon$,那么 n 应从______开始.

2) 设数列 $x_n=(-1)^{n+1}$的前 n 项和为 S_n,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=$ ______.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$______.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=$__________.

5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+bn+5}{3n-2}=2$,则 $a=$______；$b=$______.

6) 如果 $x\to 0$ 时,要无穷小$(1-\cos x)$与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$等价,a 应等于______.

7) 要使 $\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)^{1/x}=0$,则 b 应满足______.

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$______.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=$__________.

10) $\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)^{1/x}$　$(a>0,b>0,x>0)=$__________.

3. 解答题

1) 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

2）根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,并举例说明反过来未必成立.

4）设数列 x_n 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

5）求 $f(x)=\frac{x}{x}$,$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$. 当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

6）设 $x_n=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7）设 $x_n=\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8）计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$　　(8) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$　　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于 0 的常数）

(11) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

9）利用等价无穷小的性质,求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^n}{\sin x^m}$（$n,m$ 为正整数）;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$.

10）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

11）求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin2x}{x^3}$.

12）利用极限存在准则证明：