高等数学系列教材

一元微积分与微分方程

电子科技大学应用数学系 编

电子科技大学出版社

高等数学系列教材

一元微积分与微分方程

电子科技大学应用数学系　编

电子科技大学出版社

内容简介

本套教材是在国家教委颁发的《高等工业学校高等数学与线性代数课程教学基本要求》基础上，本着面向21世纪深化教学内容改革的精神编写的.本套教材编写的指导思想是：提高素质；整体优化；反映现代；重视离散；强化应用；淡化技巧.

本套教材共分三册：一元微积分与微分方程；线性代数与空间解析几何；多元微积分与无穷级数.本册主要内容包括微积分基础、微积分运算、微积分应用和常微分方程.每节配有习题，每章后有复习题，书末附有习题答案.

本套教材具有改革新意，结构严谨，论证简明，叙述清晰，例题典型，便于教学，可作为高等工业院校的教材或参考书，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

高等数学系列教材
一元微积分与微分方程
电子科技大学应用数学系　编

电子科技大学出版社出版
（成都建设北路二段四号）　邮编 610054
成都五洲彩印厂胶印
新华书店经销

开本 850×1168　1/32　印张 16.375　字数 444 千字
版次 1997 年 8 月第一版　印次 1997 年 8 月第一次印刷
印数 1－5000 册
ISBN 7－81043－771－2/O・51
定价：16.50 元

前　言

本套教材是在国家教委颁发的《高等工业学校高等数学与线性代数课程教学基本要求》基础上，本着面向21世纪深化教学内容改革的精神编写的. 面对21世纪，现代社会正经历着由工业社会向信息社会过渡的变革. 信息社会有两个重要特点：一是计算机技术的迅速发展与广泛应用；二是数学的应用向一切领域渗透. 根据21世纪对工程技术人才素质的要求，吸收国内外改革教材的长处，本套教材编写的指导思想可以归纳为以下六点：

一、提高素质. 没有教育思想和观念的转变，教学内容、方法和手段的改革就不可能有突破. 数学教育的目的不仅是给学生传授数学知识，而且更重要的是提高学生的数学素质. 必须从应试教育与知识传授的传统教育观念转移到素质教育与能力培养的现代教育观念上来. 因此，本书把提高学生的数学素质贯穿在整个内容之中，使学生掌握数学中解决问题的思想和方法，培养学生的自学能力与创新能力.

二、整体优化. 要改变工科数学内容各部分互相割裂的局面，将工科数学所涉及的主要基础内容作为一个整体来处理，充分重视它们之间的相互渗透与有机结合. 因此，本书充分利用线性代数知识处理微积分及微分方程的内容，注意从几何角度理解线性代数内容，阐明代数内容的几何背景.

三、反映现代. 传统的经典数学内容是重要的数学基础，不可忽视，但作为21世纪的工程技术人员应该了解现代数学语言（包括思想、方法、术语及符号）. 因此，本书在处理经典内容的同时，注重渗透现代数学的观念、思想、方法、术语及符号，为现代数学适度

地提供内容展示的窗口和延伸发展的接口.

四、重视离散.传统工科数学重视连续性,忽视离散性;由于计算机的飞速发展与广泛应用,越来越显示离散数学的重要性.线性代数是离散数学的基础,在线性代数中常用公理化定义、论证方法及抽象化思维等都有它自身的特色,是其他课程无法取代的.因此,本书适当地加强了线性代数的内容与应用.

五、强化应用.理解数学精髓的最佳途径是学会应用数学知识解决实际问题.工科学生学习数学后应该了解数学的应用,具有应用数学知识解决实际问题的意识和能力.因此,本书对每一重要概念都要介绍其应用背景,每一重要结果都要举出应用实例;一些典型的应用例题用数学建模形式给出;应用范围也不仅仅局限在几何与物理方面,而扩大到经济、生物、生命科学与化学等学科领域;结合数学内容还介绍了一些常用的应用数学方法如优化方法等.

六、淡化技巧.传统工科数学内容比较重视数学计算的技巧,但由于计算机技术的迅速发展,常用数学软件包的广泛应用,使得求极限、求导数与求积分的运算技巧有必要适当淡化.因此,本书在运算方面不追求繁难技巧,只要求掌握基本方法.

本套教材共分三册:一元微积分与微分方程;线性代数与空间解析几何;多元微积分与无穷级数.每节配有习题,每章后有复习题,书末附有习题答案.

本册教材我们将一元微积分的体系作了适当调整,分为微积分基础、微积分运算与微积分应用三部分.在微积分基础部分介绍了微分与积分这两个重要基本概念以及它们之间的关系——微积分基本定理,有利于读者对整体内容的把握.在微积分运算部分突出了微分与积分运算的互逆性,将不定积分与定积分的换元积分法、分部积分法合并处理.为使学生了解什么是数学建模,在微积分应用部分专门增加了一节介绍数学建模.

本书精选例题和习题,难易适度,具有典型性与新意;文字叙

述力求清晰流畅，简明易懂，深入浅出，循序渐进，便于学生学习.

本套教材220学时左右可以讲完，带*的内容可根据专业需要酌情取舍.本套教材可作为高等工业院校高等数学与线性代数课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

本套教材由谢云荪、李正良主编.本册的编者是：陈良均（第一章、第四章部分）、李昌宜（第二章）、蒲和平（第三章、第四章部分）.

本套教材的指导思想经过编者集体讨论确定，在编写过程中我们感到要贯彻好这些指导思想难度较大，需要不断地探索、不断地实践、不断地完善，因此，我们恳切地欢迎同行专家及读者提出宝贵的意见.

编 者

1997年1月

目　录

第一章　微积分基础

第二章　微积分运算

第三章 微积分应用

第四章　常微分方程

第一章 微积分基础

在本章中，主要讨论函数的概念，函数的极限和连续性，微积分的基本概念与基本定理，它们都是研究微积分的基础.

§1.1 函 数

一、集合

集合是近代数学最基本的概念之一，读者在中学已经学过.我们知道，具有某种特定性质的并且可以彼此区别的事物的总体，称为**集合**(简称为**集**).例如，一个教室里的学生构成一个集合，满足某种条件的全体实数构成一个集合，某一批产品构成一个集合等等.集合中的每一个事物称为集合的**元素**.

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的、不分顺序的.

若某个元素 x 属于集合 A，则记作 $x\in A$；若某个元素 x 不属于 A，则记作 $x\notin A$ 或 $x\bar{\in} A$.全体自然数的集合记作 N，全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记作 Q，全体实数的集合记作 R.

集合有两种表示法：

(1) 列举法：在大括号内列出全体元素，每个元素之间用逗号隔开.例如，由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

只有一个元素 x_0 的集合称为**单元素集**，记作 $\{x_0\}$.

(2) 描述法:无法一一列举或者不需要一一列举的集合,可以在大括号内的左边写出元素的记号,右边写出元素满足的条件,中间用一竖线隔开.

例如设 A 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的全体实根所组成的集合,用列举法表示为 $A=\{2,3\}$,用描述法表示为

$$A=\{x|x\in R,x^2-5x+6=0\}.$$

又如在 xOy 面上,坐标适合方程 $x^2+4y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体所组成的集合 M,可记作

$$M=\{(x,y)|x,y\text{ 为实数},x^2+4y^2=1\}.$$

本书中常用的集合为数集,即元素是数的集合.除特别注明外,以后提到的数均指实数.常用集合还有**点集**,即直线上或平面上或空间内具有某种性质的全体点所组成的集合.有时也要用函数集、向量集或其他一些集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A、B 的元素相同,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 例如:

$$\{x|x\in R,x^2+1=0\}=\varnothing.$$

常用的实数集合是区间和邻域.

若实数 $a<b$,满足条件 $a<x<b$ 的全体实数所成的集合称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所成的集合称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地,可定义**半开区间**

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

还可定义**无限区间**$(-\infty,+\infty)$,$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$等.

下面再引入几个概念:

(1) 邻域

以点 x_0 为中心,$\delta(\delta>0)$为半径的**邻域**是开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,记作 $N(x_0,\delta)$.

$$N(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\}.$$

以点 x_0 为中心,$\delta(\delta>0)$为半径的空心邻域可表示成

$$N(x_0,\delta)-\{x_0\};$$

或

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta);$$

或

$$\left\{x\,\middle|\,0<|x-x_0|<\delta\right\};$$

简记为

$$0<|x-x_0|<\delta.$$

(2) 内点

设 $D\subset R$,$x_0\in D$,如果存在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta)$,使得

$$N(x_0,\delta)\subset D,$$

则称 x_0 为点集 D 的**内点**.例如开区间(a,b)内的点都是开区间(a,b)的内点.

如果点集 D 中的每一点都是 D 的内点,则称 D 为**开集**.显然任意开区间是开集.

(3) 聚点

设 $D\subset R$、$x_0\in R$,若 x_0 的任意邻域 $N(x_0,\delta)$总含有 D 中异于 x_0 的点,则称 x_0 为 D 的**聚点**.例如开区间(a,b)内的点及端点 a、b

都是开区间的聚点．因此，D 的聚点可以属于 D，也可以不属于 D．显然，D 的内点一定是 D 的聚点．

设 $D\subset R$，$x_0\in R$．若对 x_0 的任意邻域，既含有 D 中的点，又含有不属于 D 中的点，即 $N(x_0,\delta)\cap D\neq\varnothing$ 且 $N(x_0,\delta)\cap\overline{D}\neq\varnothing$，则称 x_0 为 D 的**边界点**（其中 $\overline{D}$ 表示 D 的补集）．例如开区间 (a,b) 和闭区间 $[a,b]$ 的端点 a、b，都是边界点．

记 D' 为 D 的全部聚点所成的集合，若 $D'\subset D$，则称 D 为**闭集**．例如闭区间是闭集．

为了今后书写简明起见，再介绍两个逻辑量词：

$\forall$ 表示"对每一个…"，或"对任意的…"，或"对所有的…"；

$\exists$ 表示"存在…"．

其中，$\forall$ 是英语单词 *Any*（任何的）或 *All*（所有的）的第一个字母 A 的倒写；$\exists$ 是英语单词 *Exist*（存在）的第一个字母 E 的反写．

二、函数的概念

在中学已经学过映射与函数的定义，并把函数看成一类特殊的映射．

定义 1　设 X 和 Y 为两个非空集合，f 为 X 到 Y 的一个对应规律（或法则），$\forall\ x\in X$，由 f 有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为 X 到 Y 的一个映射．记为

$$f:X\to Y(\text{或 } X\xrightarrow{f}Y).$$

并称 y 是 x 的像，x 是 y 的原像（或称逆像）．

定义 2　设 X 和 Y 为两个非空数集，f 为 X 到 Y 的一个映射，则称 $f:X\to Y$ 为定义在数集 X 上的函数．

对于函数 $f:X\to Y$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，X 称为函数 f 的**定义域**，记为 D．

当 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的数值 y_0 称为函数 $f:X\to Y$ 在 x