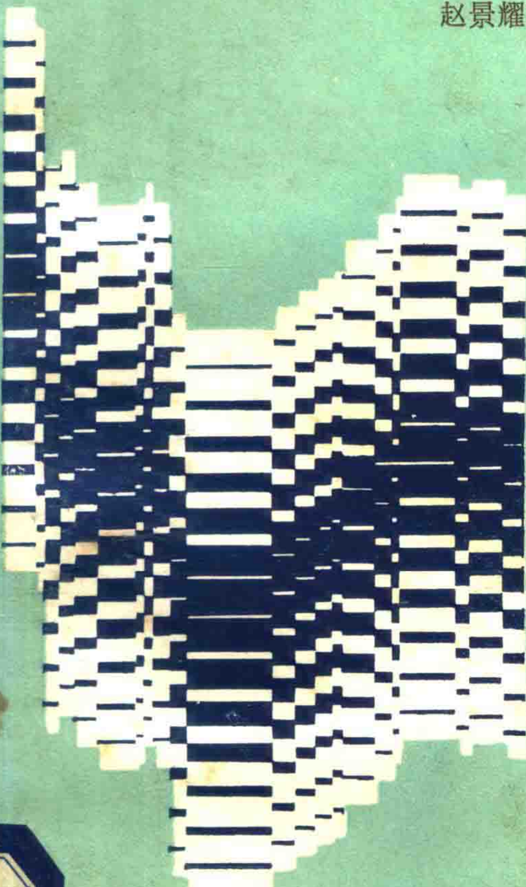
日本新高中数学研究丛书 4

映射与函数

〔日〕寺田文行 著

赵景耀 译



文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 4

映射与函数

［日］寺田文行 著

赵景耀 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括了一些较新的内容。

本册主要内容有函数和图象、二次函数的图象、最大、最小，二次方程、二次不等式，分式函数、无理函数的图象、方程、不等式、平移和对称变换、映射、逆映射和反函数等。叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 4

映 射 与 函 数

［日］寺田文行 著

赵景耀 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 6.125　字数 120,000

1981 年 3 月第 1 版　1981 年 11 月第 1 次印刷

印数　1—6,000

书号 7057·034　　定价 0.46 元

(限国内发行)

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第四册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛深入、易懂．对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究，可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部刘春、钱永耀、刘占元同志负责审校工作．本册由沈阳师范学院赵景耀译出．

由于时间仓促以及译者和校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1980 年 8 月

前　　言

映射的概念，是贯穿高中数学 I 的重要支柱之一．函数是从实数集合到实数集合的映射．平面上图形的移动(变换)可以理解为从平面上的点集到平面上的点集的映射．反之，通过函数图象或图形的移动(变换)，可以使映射的概念更易于理解．

本书是从把函数看作映射开始，首先，对二次函数及其应用，分式函数、无理函数的各种性质以及它们的图象，作了充分的解说．接着展望了图形的平移，对称移动等．最后，以一般的映射、逆映射和反函数做结束．

本书的目的在于使所述内容比教科书

更加广泛，更加深入，更加易懂．

因此，有些也接触到教科书所未涉及的内容．

本书的体例是以每节为单元，采取

解说→例题→发展题→练习

的形式．在每数节后给出一些习题，作为训练实际能力的资料．在这些问题中，收集了很多大学入学试题以及将来要研究的问题．

如果本书能使更多的人成为数学爱好者，则著者感到不胜欣慰．

最后，对在本书的编著上给予大力帮助的东海大学须田贞之先生表示谢忱．

著　　者

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书．它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好．为此，本书的结构编排如下．

主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深人，比较易懂．

在解说后的提要中，归纳出重要公式．因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式．另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率．在印有*的部分，是属于高中还没学到的内容或程度较高的内容．

例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力．虽然从例题到发展题依次提高难度，但在解法和要点指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法．

为此，建议读者要反复进行学习．如果前面的内容都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难．反之，如果不大会解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻．

习题

分 A, B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题；B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中，这种程度的题目出的最多，所以，对于准备高考的读者，这是不可缺少的问题.

虽然常说，学数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵. 本书不提倡单纯的记忆. 对于数学，在适当指导"怎样进行思考"之后，应记忆应用范围较广泛的知识. 深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领.

目 录

重要词汇一览表

1. 函数和图象

映射与函数

当给出使集合$\boldsymbol{A}$的每一个元素，有而且只有集合$\boldsymbol{B}$的一个元素与它对应的规则时，则把这个对应规则叫做从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的**映射**．这时，也包括$\boldsymbol{A}$的不同元素对应$\boldsymbol{B}$的同一元素的情形．

特别是，当$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是实数集合时，则把从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的映射叫做**函数**，用字母f, g，F，φ等表示．

根据函数f，使$\boldsymbol{A}$的元素x对应$\boldsymbol{B}$的元素y这一事实，用

$$f: x \to y \quad 或 \quad y = f(x)$$

来表示，叫做y是x的函数或叫做x的函数$f(x)$等．

变域与值域

这时，$\boldsymbol{A}$叫做x的**变域**或函数$f(x)$的**定义域**，y的集合叫做f的**值域**．

$f(x)=2x+1$是使x有$2x+1$与之对应的函数．这个函数的定义域是全体实数，值域也是全体实数．

假如$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则g是使x有$\dfrac{1}{x-1}$与之对应的函数．这个函数的定义域是除掉1的全体实数，值域是除掉0的全体实数．

还有，如果$\varphi(x)=\sqrt{x}+1$，则φ就是使x有$\sqrt{x}+1$与之对应的函数．这个函数的定义域是非负实数的全体，值域是不小于1的一切实数．

一般地，如果对x的变域加以限制，则值域也受到限制．

函数的图象

有函数f，设$y=f(x)$．在平面上取直角坐标系，我们把以$(x, f(x))$为坐标的所有点的集合叫做$y=f(x)$的**图象**．

这时，定义域是x轴上的某些点的集合，值域是y轴上的某些点的集合．

设函数$f(x)$的定义域是x轴上的连续的点集合，并且a是它的一点，如果当x趋近于a时，$f(x)$趋近于$f(a)$，就说这个函数在a**连续**．

在定义域的每个点都连续的函数的图象是连续的线．

函数与数表

象这样，函数可以用图象来表示．函数还可以用数表来表示．

例如，平方根表表示函数

$$f: x\to\sqrt{x},\quad \text{即}\quad f(x)=\sqrt{x};$$

对数表表示函数

$$f: x\to\lg x,\quad \text{即}\quad f(x)=\lg x.$$

函数的复合

存在定义域为A，值域为B的函数f；定义域为B，值域为C的函数g．

设

$$f: x \to y, \quad g: y \to z.$$

这时，使A的x有C的z与之对应的函数$z=g(f(x))$是确定的．这个函数叫做f和g的复合函数，用$g\circ f$来表示．

即

$$g\circ f: x \to z, g\circ f(x)=g(f(x)).$$

例如，当

$$f: x \to x-1, g: x \to x^2$$

时，由于

$$f: x \to x-1, g: x-1 \to (x-1)^2,$$

因此，

$$g\circ f: x \to (x-1)^2.$$

$$\therefore \quad g\circ f(x)=(x-1)^2.$$

又，顺便指出，由于

$$g: x \to x^2, f: x^2 \to x^2-1,$$

因此，

$$f\circ g: x \to x^2-1.$$

$$\therefore \quad f\circ g(x)=x^2-1.$$

这就是说，$g\circ f$与$f\circ g$是不同的函数．

提　　要

(1) 函数：使实数集合A的元素有实数集合B的元素与之对应的规则

$$f: x \to y, y=f(x) \qquad (x\in A, y\in B)$$

(2) 函数　$y=f(x)$的图象：点$(x, f(x))$的集合．

(3) 函数　$y=f(x), z=g(y)$的复合

$$g\circ f: x \to z, g\circ f(x)=g(f(x)).$$

例题 1. 设函数 $f(x)$ 是以 0 和一切自然数的集合为定义域.

已知 $f(0)=0$，当 x 为自然数时，$f(x)$ 表示 x 除以 5 所得的余数.

（1）求 $f(3)$, $f(7)$，并作出这个函数的图象.

（2）研究下列各命题是否正确?

(i) 对于任意自然数 x, $f(x+5)=f(x)$.

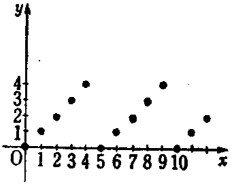
(ii) 对于任意自然数 x, y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(iii) 对于任意自然数 x, $f(f(x))=f(x)$.

解法 注意当 $x=5m+n$ (m, n 是 0 或自然数，$0\leqslant n<5$) 时，$f(x)=n$, $f(x)$ 的值域是 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

解 （1）$3=5\times0+3$, $7=5\times1+2$.

$\therefore\quad f(3)=3$, $f(7)=2$.



（2）(i) 设 x 除以 5 所得商为 m，余数为 n，则

$$x=5m+n\ (m, n\text{ 是 0 或自然数}, 0\leqslant n<5).$$

从而，$x+5=5(m+1)+n$ （$m+1$ 是自然数）.

$\therefore\quad f(x)=n$, $f(x+5)=n$.

即 $\quad f(x)=f(x+5)$.

命题正确.

(ii) 由于 $x+y$ 是自然数，因此，$0\leqslant f(x+y)<5$. 虽然 $0\leqslant f(x)<5$, $0\leqslant f(y)<5$，但是未必有 $f(x)+f(y)<5$. 例如 $x=3$, $y=7$ 时.

所以，命题不正确.

(iii) 设 $x=5m+n$，则 $f(x)=n$.

由于 $n=0, 1, 2, 3, 4$，因此，

$$f(n)=n.$$

$$\therefore\quad f(f(x))=f(n)=n.$$

所以，$f(f(x))=f(x)$.

命题正确.

发展题

设实数 $x(x\geqslant 0)$ 除以 3 的商的整数部分为 $f(x)$.

(1) 作 $y=f(x)$ 的图象.

(2) 作 $y=\dfrac{x}{3}-f(x)$ 的图象.

要点

(1)注意，当$0\leqslant x<3$时，$f(x)=0$. 当$3\leqslant x<6$时，$f(x)=1$. 这样，x每增加3，$f(x)$增加1.

解 假定用3除 x 所得商的整数部分是 m，则

$$3m\leqslant x<3(m+1).$$

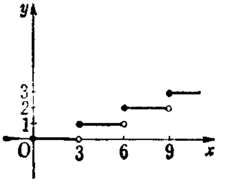
这时，

$$f(x)=m.$$

令 $m=0, 1, 2, \cdots$

当 $0\leqslant x<3$ 时，

$$f(x)=0.$$



当 $3 \leqslant x < 6$ 时，

$$f(x)=1.$$

当 $6 \leqslant x < 9$ 时，

$$f(x)=2.$$

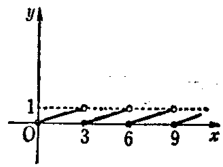
…………………………

因此，图象如上页图.

在(2)中，对于(1)的每一区间，把 $f(x)$ 用 x 的式子表示出来.

(2) 当 $3m \leqslant x < 3m+1$ 时，

$$y=\frac{x}{3}-m.$$



这个方程表示斜率是 $\frac{1}{3}$ 的直线.

如果令 $x=3m$，则 $y=0$.

令 $m=0, 1, 2, \cdots$，可以得到上图.

练习 （答案153页）

1. 指出例题1和发展题中每个函数的定义域和值域.
2. 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 即如果 n 是整数，$n \leqslant x < n+1$，则 $[x]=n$. 试作出下列各函数的图象.

(1) $y=[x]$.　　　　(2) $y=x-[x]$.

〔注意〕 符号 $[x]$ 叫做**高斯符号**.