

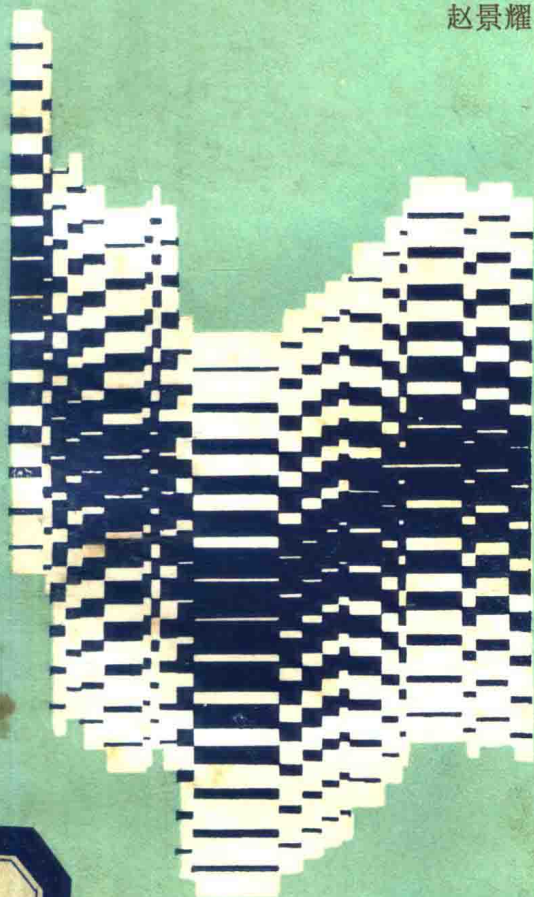
日本新高中数学研究丛书 4

5/22
STW

映射与函数

〔日〕寺田文行 著

赵景耀 译



文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 4

映射与函数

[日] 寺田文行 著

赵景耀 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,书中除有中学数学传统题材外,还包括了一些较新的内容。

本册主要内容有函数和图象、二次函数的图象、最大、最小,二次方程、二次不等式、分式函数、无理函数的图象、方程、不等式、平移和对称变换、映射、逆映射和反函数等。叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂,可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 4

映 射 与 函 数

[日] 寺田文行 著

赵景耀 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.125 字数 120,000

1981年3月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 1—6,000

书号 7057·034 定价 0.46 元

(限国内发行)

译者的话

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,我们译出了其中的第二册至第十三册,本册是第四册。丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容。

这套丛书的特点是比教材内容广泛深入、易懂。对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究,可供我国中学数学教师 and 高中学生研究参考。

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的,最后由我院教研部刘春、钱永耀、刘占元同志负责审校工作。本册由沈阳师范学院赵景耀译出。

由于时间仓促以及译者和校者水平所限,缺点错误,恐难避免。希望读者提出宝贵意见。

辽宁教育学院

1980年8月

前 言

映射的概念,是贯穿高中数学 I 的重要支柱之一.函数是从实数集到实数集的映射.平面上图形的移动(变换)可以理解为从平面上的点集到平面上的点集的映射.反之,通过函数图象或图形的移动(变换),可以使映射的概念更易于理解.

本书是从把函数看作映射开始,首先,对二次函数及其应用,分式函数、无理函数的各种性质以及它们的图象,作了充分的解说.接着展望了图形的平移,对称移动等.最后,以一般的映射、逆映射和反函数做结束.

本书的目的在于使所述内容比教科书

更加广泛,更加深入,更加易懂.

因此,有些也接触到教科书所未涉及的内容.

本书的体例是以每节为单元,采取

解说→例题→发展题→练习

的形式.在每数节后给出一些习题,作为训练实际能力的资料.在这些问题中,收集了很多大学入学试题以及将来要研究的问题.

如果本书能使更多的人成为数学爱好者,则著者感到不胜欣慰.

最后,对在本书的编著上给予大力帮助的东海大学须田贞之先生表示谢忱.

著 者

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书。它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好。为此，本书的结构编排如下。

主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂。

在解说后的提要中，归纳出重要公式。因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式。另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率。在印有*的部分，是属于高中还没学到的内容或程度较高的内容。

例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的能力。虽然从例题到发展题依次提高难度，但在解法和要点指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度。总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法。

为此，建议读者要反复进行学习。如果前面的内容都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难。反之，如果不大解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻。

习题

分 A, B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题; B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中, 这种程度的题目出的最多, 所以, 对于准备高考的读者, 这是不可缺少的问题.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指机械的背诵. 本书不提倡单纯的记忆. 对于数学, 在适当指导“怎样进行思考”之后, 应记忆应用范围较广泛的知识. 深切地希望本书的读者, 能真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际本领.

目 录

前言

几点说明

重要词汇一览表

1. 函数和图象.....1

映射与函数, 变域与值域, 函数的图象, 函数与数表,
函数的复合

2. 二次函数的图象.....13

二次函数, 标准形, 一般式, 标准变形

3. 二次函数的最大、最小.....19

二次函数的最大、最小, 用一般式给出的二次函数, 最
小值, 最大值,

4. 在限定变域上的最大、最小.....27

最大值、最小值, 在包含两端点的区间上的最大、最小,
一般的二次函数在限定变域上的最大、最小, $a > 0$ 的情
形, $a < 0$ 的情形, 不包含端点的区间

习题(1~14).....38

5. 二次函数和二次方程.....40

二次方程与二次函数的图象, 判别式, 实数解, 重解,
虚数解, 按判别式分类, 抛物线与直线

6. 二次函数和二次不等式.....51

二次不等式, 判别式为正的情形, 判别式为零的情形, 判
别式为负的情形, 二次不等式的解, 具有确定符号的条件

7. 不等式和区域.....62

一次不等式表示的区域, 二次不等式表示的区域, 集合
与区域, 连结两个区域的线段, 内分点

习题(15~30).....74

8. 分式函数的图象	76
分式函数 $y = \frac{a}{x}$, $a > 0$ 时的图象, $a < 0$ 时的图象, 渐近线, 直角双曲线, 图象的平移	
9. 分式函数和二次方程	81
二次分式函数, 图象的复合, 渐近线, 二次曲线, 与平行于 x 轴的直线的交点, 最大值、最小值	
10. 分式函数值的范围	89
分母、分子是二次的分式函数, $p^2 < 4q$ 的情形, 函数值的范围, 直线 $y = k$ 与图象交点的个数, $p^2 \geq 4q$ 的情形	
习题(31~41)	97
11. 无理函数的图象	99
无理函数, $y = \sqrt{x}$ 的图象, $y = -\sqrt{x}$ 的图象, $y^2 = x$ 的图象, 无理函数 $y = \sqrt{ax}$, 无理函数 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$	
12. 无理方程和无理不等式	110
无理方程, 同解的意义, 用图象说明, 不等式的一个性质, 无理不等式, 图象的应用	
习题(42~56)	118
13. 平移和对称变换	120
点的变换, 平移, 变换式, 平移的复合, 图象的平移, 关于点的对称变换, 关于直线的对称变换, 关于直线 $y = x$ 的对称变换	
14. 映射	134
映射, 映射的实例, 其他的例, 映射的复合	
15. 逆映射和反函数	143
逆映射, 复合映射的逆映射, 反函数, $y = x^2$ 的反函数, 反函数的图象	
习题(57~65)	151
练习题答案	153
习题答案	166

重要词汇一览表

一对一.....	134	平移.....	120
二次分式函数.....	81	闭区间.....	34
二次方程.....	40	许瓦尔兹不等式.....	58
二次方程的解.....	40	分式函数.....	76
二次不等式.....	51	同解的意义.....	110
二次不等式的解.....	53	判别式.....	40
二次曲线.....	82	连续.....	2
二次函数.....	13	定义域.....	1, 100, 134
二次函数的最大值、最小值.....	19	到上的映射.....	134
几何平均值.....	85, 88	线对称.....	123
上方.....	63	具有确定符号的条件.....	53
下方.....	63	直角双曲线.....	77
上凸.....	13	拐点.....	93
下凸.....	13	顶点.....	15
开区间.....	34	变换.....	120
内分点.....	64	变换式.....	121, 123, 125
公共点.....	40	变域.....	1, 27
反函数.....	144	图象的平移.....	77, 122
区域.....	63	图象的复合.....	81
无理方程.....	110	函数.....	1
无理不等式.....	111	函数与数表.....	2
无理函数.....	99	函数的图象.....	2
对称.....	123	函数的复合.....	2
对称变换.....	123	实数解.....	41
对称轴.....	15	轴.....	13
正射影.....	135	点对称.....	122

绝对值符号.....	17	值域.....	1, 134
复合映射.....	136	高斯符号.....	6
点的变换.....	120	渐近线.....	77, 81
逆映射.....	143	虚数解.....	40
重根.....	41	象.....	134
映射.....	134	最大值.....	20, 27, 83
映射与函数.....	1	最小值.....	20, 27, 83
恒等变换.....	120	集合与区域.....	63
标准形.....	14	解与系数的关系.....	44
标准变形.....	15	算术平均值.....	85, 88

1. 函数和图象

映射与函数

当给出使集合 A 的每一个元素, 有而且只有集合 B 的一个元素与它对应的规则时, 则把这个对应规则叫做从 A 到 B 的映射. 这时, 也包括 A 的不同元素对应 B 的同一元素的情形.

特别是, 当 A, B 都是实数集合时, 则把从 A 到 B 的映射叫做函数, 用字母 f, g, F, φ 等表示.

根据函数 f , 使 A 的元素 x 对应 B 的元素 y 这一事实, 用

$$f: x \rightarrow y \quad \text{或} \quad y = f(x)$$

来表示, 叫做 y 是 x 的函数或叫做 x 的函数 $f(x)$ 等.

变域与值域

这时, A 叫做 x 的变域或函数 $f(x)$ 的定义域, y 的集合叫做 f 的值域.

$f(x) = 2x + 1$ 是使 x 有 $2x + 1$ 与之对应的函数. 这个函数的定义域是全体实数, 值域也是全体实数.

假如 $g(x) = \frac{1}{x-1}$, 则 g 是使 x 有 $\frac{1}{x-1}$ 与之对应的函数. 这个函数的定义域是除掉 1 的全体实数, 值域是除掉 0 的全体实数.

还有, 如果 $\varphi(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 φ 就是使 x 有 $\sqrt{x} + 1$ 与之对应的函数. 这个函数的定义域是非负实数的全体, 值域是不小于 1 的一切实数.

一般地, 如果对 x 的变域加以限制, 则值域也受到限制.

函数的图象

有函数 f , 设 $y = f(x)$. 在平面上取直角坐标系, 我们把以 $(x, f(x))$ 为坐标的所有点的集合叫做 $y = f(x)$ 的图象.

这时, 定义域是 x 轴上的某些点的集合, 值域是 y 轴上的某些点的集合.

设函数 $f(x)$ 的定义域是 x 轴上的连续的点集合, 并且 a 是它的一点, 如果当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 趋近于 $f(a)$, 就说这个函数在 a 连续.

在定义域的每个点都连续的函数的图象是连续的线.

函数与数表

象这样, 函数可以用图象来表示. 函数还可以用数表来表示.

例如, 平方根表表示函数

$$f: x \rightarrow \sqrt{x}, \quad \text{即} \quad f(x) = \sqrt{x};$$

对数表表示函数

$$f: x \rightarrow \lg x, \quad \text{即} \quad f(x) = \lg x.$$

函数的复合

存在定义域为 A , 值域为 B 的函数 f ; 定义域为 B , 值域为 C 的函数 g .

设

$$f: x \rightarrow y, \quad g: y \rightarrow z.$$

这时, 使 A 的 x 有 C 的 z 与之对应的函数 $z = g(f(x))$ 是确定的. 这个函数叫做 f 和 g 的复合函数, 用 $g \circ f$ 来表示.

即

$$g \circ f: x \rightarrow z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

例如, 当

$$f: x \rightarrow x-1, \quad g: x \rightarrow x^2$$

时, 由于

$$f: x \rightarrow x-1, \quad g: x-1 \rightarrow (x-1)^2,$$

因此,

$$g \circ f: x \rightarrow (x-1)^2.$$

$$\therefore g \circ f(x) = (x-1)^2.$$

又, 顺便指出, 由于

$$g: x \rightarrow x^2, \quad f: x^2 \rightarrow x^2-1,$$

因此,

$$f \circ g: x \rightarrow x^2-1.$$

$$\therefore f \circ g(x) = x^2-1.$$

这就是说, $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 是不同的函数.

提 要

(1) 函数: 使实数集合 A 的元素有实数集合 B 的元素与之对应的规则

$$f: x \rightarrow y, \quad y = f(x) \quad (x \in A, y \in B)$$

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象: 点 $(x, f(x))$ 的集合.

(3) 函数 $y = f(x), z = g(y)$ 的复合

$$g \circ f: x \rightarrow z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

例题 1. 设函数 $f(x)$ 是以 0 和一切自然数的集合为定义域.

已知 $f(0)=0$, 当 x 为自然数时, $f(x)$ 表示 x 除以 5 所得的余数.

(1) 求 $f(3), f(7)$, 并作出这个函数的图象.

(2) 研究下列各命题是否正确?

(i) 对于任意自然数 $x, f(x+5)=f(x)$.

(ii) 对于任意自然数 $x, y, f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(iii) 对于任意自然数 $x, f(f(x))=f(x)$.

解法 注意当 $x=5m+n$ (m, n 是 0 或自然数, $0 \leq n < 5$) 时, $f(x)=n, f(x)$ 的值域是 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

解 (1) $3=5 \times 0 + 3, 7=5 \times 1 + 2$.

$\therefore f(3)=3, f(7)=2$.

(2) (i) 设 x 除以 5 所得商为 m ,

余数为 n , 则

$x=5m+n$ (m, n 是 0 或自然数, $0 \leq n < 5$).

从而, $x+5=5(m+1)+n$ ($m+1$ 是自然数).

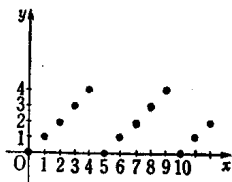
$\therefore f(x)=n, f(x+5)=n$.

即 $f(x)=f(x+5)$.

命题正确.

(ii) 由于 $x+y$ 是自然数, 因此, $0 \leq f(x+y) < 5$. 虽然 $0 \leq f(x) < 5, 0 \leq f(y) < 5$, 但是未必有 $f(x)+f(y) < 5$.

例如 $x=3, y=7$ 时.



所以,命题不正确.

(iii) 设 $x=5m+n$, 则 $f(x)=n$.

由于 $n=0, 1, 2, 3, 4$, 因此,

$$f(n)=n.$$

$$\therefore f(f(x))=f(n)=n.$$

所以, $f(f(x))=f(x)$.

命题正确.

发展题

设实数 $x(x \geq 0)$ 除以 3 的商的整数部分为 $f(x)$.

(1) 作 $y=f(x)$ 的图象.

(2) 作 $y=\frac{x}{3}-f(x)$ 的图象.

要点

(1) 注意, 当 $0 \leq x < 3$ 时, $f(x)=0$. 当 $3 \leq x < 6$ 时, $f(x)=1$. 这样, x 每增加 3, $f(x)$ 增加 1.

解 假定用 3 除 x 所得商的整数部分是 m , 则

$$3m \leq x < 3(m+1).$$

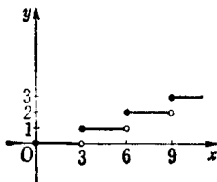
这时,

$$f(x)=m.$$

令 $m=0, 1, 2, \dots$

当 $0 \leq x < 3$ 时,

$$f(x)=0.$$



在(2)中, 对于(1)的每一区间, 把 $f(x)$ 用 x 的式子表示出来.

当 $3 \leq x < 6$ 时,

$$f(x) = 1.$$

当 $6 \leq x < 9$ 时,

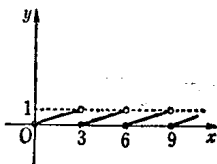
$$f(x) = 2.$$

.....

因此, 图象如上页图.

(2) 当 $3m \leq x < 3m+1$ 时,

$$y = \frac{x}{3} - m.$$



这个方程表示斜率是 $\frac{1}{3}$ 的

直线.

如果令 $x = 3m$, 则 $y = 0$.

令 $m = 0, 1, 2, \dots$, 可以得到
上图.

练习 (答案 153 页)

1. 指出例题 1 和发展题中每个函数的定义域和值域.
2. 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 即如果 n 是整数, $n \leq x < n+1$, 则 $[x] = n$. 试作出下列各函数的图象.

(1) $y = [x]$.

(2) $y = x - [x]$.

[注意] 符号 $[x]$ 叫做高斯符号.