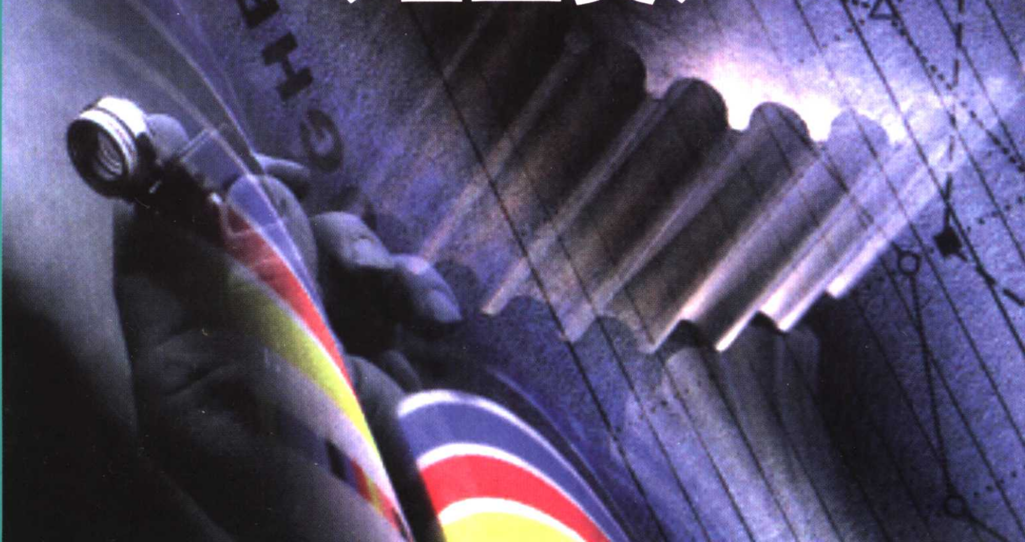
全国硕士研究生入学统一考试

金版辅导

樊启斌 编著

数学综合复习解题指南
（理工类）



全国优秀出版社
武汉大学出版社

理工类硕士研究生入学考试

数学综合复习解题指南

樊启斌 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学综合复习解题指南/樊启斌编著.一武汉：武汉大学出版社，2002.4
理工类硕士研究生入学考试
ISBN 7-307-03435-2

Ⅰ.数… Ⅱ.樊… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 080240 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：华中科技大学印刷厂
开本：787×1092　1/16　印张：33.75　字数：817 千字
版次：2002 年 4 月第 1 版　　2002 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03435-2/O・250　　定价：45.00 元

前 言

我编著的《高等数学与线性代数综合解题指南》一书经武汉大学出版社出版之后深受广大读者的好评。现根据国家教育部最新制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》以及近几年来全国统一考试数学试题的命题趋势，对其进行了全面的修订，并增写了概率统计部分，同时将书名更名为《数学综合复习解题指南》。

本书是面向广大考研学子全面复习《高等数学》、《线性代数》与《概率统计》而编写的，它源于编者多年来在各类考研辅导班上授课时所使用的讲义，融汇了编者在长期从事数学教学以及多年来参加评阅研究生入学考试数学答卷的过程中所积累的实践经验，旨在帮助读者复习基础知识，理解基本概念，掌握解题方法，强化应试技能。

本书以解题为主线，将"复习"与"解题"有机地融为一体，对高等数学、线性代数与概率统计这三门课程进行系统的归纳总结与分类讲解。在高等数学部分，对有关的重要概念和理论基本上都作了简要的概括。在线性代数与概率统计部分，考虑到现行的线性代数与概率统计教材版本较多，体系也不尽相同，我们参照考试大纲，在各章节阐述解题方法与技巧之前，对相应的基本概念与重要结论都给出了较为详尽的总结。

本书既突出一般方法的系统归纳，也注重介绍一些特殊技巧，并且十分强调理论与方法的综合运用，对于数学模型方法的应用也给予了一定程度的重视。所选例题和习题共计近 3 000 道，其中包含了 1990 年至 2002 年全国统一考试的部分试题，也包含了我校数学竞赛和研究生入学考试中由我本人命题的部分试题，重点突出，题型广泛，综合性强，不仅具有代表性和启发性，而且涵盖了全国硕士研究生入学统一考试中的各种典型问题。

本书的第 19 章第 1 节是原书的第 13 章，第 2 节"数学综合考研题选析"是此次修订时增写的内容，旨在引导读者在切实掌握数学基础知识的基础上，进一步强化思维意识，诱发解题谋略，揭示解题规律，迅速提高分析和解决综合问题的能力。

鉴于选择题具有形式新颖、题小量大、覆盖面宽、灵活性强等特点，以及全国硕士研究生入学统一考试一直将选择题作为一种命题形式，本书精选了 300 道单项选择题列于第 20 章，期望能对读者了解选择题，迅速而准确地解答各种选择题有所裨益。

本书最后还附有 2001、2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及参考答案，读者可结合自己的实际情况利用这 8 套全真试题进行自我测试，以便于适时地调整复习进程。

本书不仅是广大考研读者的复习指导书，而且还可供各类高等学校的教师或学生讲授或学习《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》时阅读和参考。

限于编者的水平，本书中的错漏不当之处仍在所难免，恳请读者批评指正。

编著者

2002 年 2 月于珞珈山

目　录

第 1 章

求极限的方法与技巧

在高等数学中，无论是极限理论还是极限方法都占有十分重要的地位. 一方面，连续、导数、积分和级数收敛等概念的建立都以极限为基础；另一方面，极限作为一种工具，它的计算几乎贯穿高等数学的全部内容. 因此，怎样求极限是一个既重要而又基本的问题，除了要能灵活运用极限四则运算法则、极限与无穷小的关系、无穷小的性质以及初等函数的连续性之外，还必须掌握一些方法与技巧.

本章重点讨论如何确定不定式的值以及计算用各种形式给出的数列的极限.

§1—1　函数的极限

函数的极限，根据自变量的变化趋势可以分为 6 种不同的情形：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$；　(5) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$；　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

其中(1),(4)两种形式是基本的.

如果根据函数值的变化情形来分类，那么函数的极限又可以分为不定式与非不定式两种类型. 不定式一共有 7 种类型：$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$. 由于求非不定式的极限远比确定不定式极限的值要简单得多，因此，我们只讨论求不定式极限的方法与技巧.

一、初等变换法

初等变换法是用于求不定式极限的一种基本方法，是通过使用代数或三角函数恒等变形，以及变量代换等技巧，或者消除产生“不定”的因素，将原不定式转化为非不定式的极限来计算；或者将所求极限转化为可以利用基本极限(如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 等)来计算.

【例 1】 求 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$.

解　这是“$\infty-\infty$”型的不定式. 首先提取公因子$\sqrt{x}$，并令 $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$，化为“$\frac{0}{0}$”型的不定式. 然后将分子有理化，即可消除“不定”的因素. 即

$$I=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt{1+t}+1)}{t(\sqrt{1+t}+1)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}=\frac{1}{2}.$$

【例 2】 求 $I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解　这是"1^{∞}"型的不定式，可利用基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 来计算. 因为 $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\tan 2x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)=-1.$$

于是 $I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{[1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\tan x-1}}\right\}^{(\tan x-1)\tan 2x}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【例 3】 求 $I=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解　这是"$0\cdot\infty$"型的不定式. 作变量代换：$y=1-x$，则当 $x\to 1$ 时，$y\to 0$. 故

$$I=\lim_{y\to 0}y\cot\frac{\pi y}{2}=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cos\frac{\pi y}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

【例 4】 求 $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解　这是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的不定式. 将分子、分母同时除以 $-x$，有

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\cdot\sin x}}=1.$$

【注】 这里，由于自变量的变化过程是 $x\to-\infty$，以及根式的特征，故将分子、分母同时除以 $-x$ 而不是 x. 此外，还运用了"无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小"的结论.

初等变换法也能用于求某些非不定式的极限，如：

【例 5】 求 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解　这是非不定式. 注意到函数的特征，可考虑利用三角函数恒等式：

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，又由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，所以

$$I=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

二、无穷小替换法

法则　设 α,β 与 α',β' 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，而 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 与 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 也是在这个变化过程中的极限. 如果 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

这个法则告诉我们，如果在计算 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 较困难时，可以设法寻求分别与 α,β 等价的无穷小 α',β' 来替换 α,β，把 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 的计算转化为 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 的计算.

【例 6】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，有 $\ln(1+x)\sim x$，所以

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

无穷小替换法如果运用恰当，能大大简化不定式极限的计算. 为了能得心应手地利用无穷小替换法求极限，掌握一些常用的等价无穷小是必要的.

常用的等价无穷小(当 $x\to 0$ 时)有：

(1)　$\sin x\sim x$；　(2)　$\arcsin x\sim x$；　(3)　$\tan x\sim x$；

(4)　$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$；　(5)　$\arctan x\sim x$；　(6)　$\ln(1+x)\sim x$；

(7)　$e^x-1\sim x$；　(8)　$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0)$；

(9)　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ (α 为任意实数).

【例 7】 求 $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{3x-2}-x)\sin 2(x-1)}{(x-1)^3}$.

解　因为当 $x\to 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
x^{3x-2}-x&=x[e^{3(x-1)\ln x}-1]\sim x[3(x-1)\ln x]\\
&=3x(x-1)\ln[1+(x-1)]\sim 3x(x-1)^2,
\end{aligned}
$$

以及 $\sin 2(x-1)\sim 2(x-1)$，所以

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{3x(x-1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}6x=6.$$

在利用无穷小替换法时，还应考虑综合利用其他方法，如：初等变换法、罗必达法则等.

【例 8】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+x\sin 2x)}{e^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$.

解

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)+x\sin 2x]}{e^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)+x\sin 2x}{e^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{x^2}+2\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{-x^2}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+2}{1+\dfrac{1}{3}}=\frac{9}{8}.
\end{aligned}
$$

值得注意的是，如果所求极限中分子(或者分母)是代数和的形式，那么在做部分替换时，应考虑替换前后分子(或者分母)在整体上的等价性. 这是因为：尽管 $\alpha\sim\alpha'$ 且 $\beta\sim\beta'$，但是 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha'+\beta'$ 却未必等价.

【例 9】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【分析】 对于初学者来说，容易错误地用与 $\tan x$ 和 $\sin x$ 都等价的无穷小 x 来替换，从而得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

导致错误结果的原因在于：当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 $x-x=0$ 不等价. 正确的解法为：

解 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\ (1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

三、罗必达(L'Hospital)法则

罗必达法则 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(1) 当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小(或无穷大)；

(2) 在点 a 的某个去心邻域内，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)，

那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

对于函数的其他 5 种类型的极限，也有类似的法则，此处不一一列举.

罗必达法则是求不定式极限的一种比较有效的方法，实践中应注意以下 4 个方面的问题.

1. 对于不定式的 7 种类型：$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$，前两类属基本型，可以直接利用罗必达法则；后 5 类需首先化为基本型之后，再利用罗必达法则.

【例 10】 求 $I=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解 这是"$\infty-\infty$"型的不定式. 先通分，化为"$\frac{0}{0}$"型的不定式，再利用罗必达法则. 即

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+2}=-\frac{1}{2}.$$

【例 11】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 这是"1^{∞}"型的不定式，可用取对数的方法转化为基本型之后再利用罗必达法则.

因为 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$，而

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3},$$

所以 $I=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{I_1}=e^{-\frac{1}{3}}$.

2. 在运用罗必达法则之前，往往需要采用适当的方式（如：变量代换、无穷小替换、拆项等）简化不定式.

【例 12】 求 $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-\sqrt[3]{x})}{x-1}$.

解 作变量代换：$u=1-\sqrt[3]{x}$，则 $x=(1-u)^3$，且当 $x\to 1$ 时，$u\to 0$. 于是

$$I=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{(1-u)^3-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+u}}{3(1-u)^2(-1)}=-\frac{1}{3}.$$

【例 13】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

解 如果直接运用罗必达法则计算，将会遇到较为复杂的导数运算. 这里先利用等价无穷小 $e^u-1\sim u(u\to 0)$替换之后，再利用罗必达法则（其中 $u=(x-\sin x)\ln a$）.

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}(a^{x-\sin x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x-\sin x)\ln a}-1}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\ln a}{x^3}=\ln a\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{\ln a}{6}.\end{aligned}$$

【例 14】 求 $I=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$.

【分析】 这是较为复杂的不定式. 若要辨别它属于哪一种类型的不定式，则必须首先证明分子的极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi}{2}x\right)=\infty$，即先确定一个"$\infty-\infty$"型的不定式的值. 但这并非易事！因此，我们考虑将原式拆成两项，分别对每一项求极限.

解 拆项得 $I=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot\pi x}+\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}\triangleq I_1+I_2$. 现在对每一项利用罗必达法则，

$$I_1=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{1-x}}{-\pi\csc^2\pi x}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{1-x}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-1}=0,$$

$$I_2=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\pi x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=(-1)\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-2.$$

因此，所求极限为 $I=I_1+I_2=0+(-2)=-2$.

3. 在运用罗必达法则之后，应尽可能地分离出那些极限容易确定且极限不等于零的因子部分，以便于再次利用罗必达法则或者使用其他方法.

【例 15】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

解 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{\dfrac{1}{1+x^2}-\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x-(1+x^2)}$$