

全国硕士研究生入学统一考试

金版辅导

樊启斌 编著



数学综合复习

解题指南 (理工类)

全国优秀出版社
武汉大学出版社



理工类硕士研究生入学考试

数学综合复习解题指南

樊启斌 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学综合复习解题指南/樊启斌编著. —武汉: 武汉大学出版社, 2002. 4
理工类硕士研究生入学考试
ISBN 7-307-03435-2

I. 数… II. 樊… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV.
O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 080240 号

责任编辑: 顾素萍 责任校对: 黄添生 版式设计: 支 笛

出版: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

发行: 新华书店湖北发行所

印刷: 华中科技大学印刷厂

开本: 787×1092 1/16 印张: 33.75 字数: 817 千字

版次: 2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03435-2/O · 250 定价: 45.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换。

前言

我编著的《高等数学与线性代数综合解题指南》一书经武汉大学出版社出版之后深受广大读者的好评。现根据国家教育部最新制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》以及近几年来全国统一考试数学试题的命题趋势,对其进行了全面的修订,并增写了概率统计部分,同时将书名更名为《数学综合复习解题指南》。

本书是面向广大考研学子全面复习《高等数学》、《线性代数》与《概率统计》而编写的,它源于编者多年来在各类考研辅导班上授课时所使用的讲义,融汇了编者在长期从事数学教学以及多年来参加评阅研究生入学考试数学答卷的过程中所积累的实践经验,旨在帮助读者复习基础知识,理解基本概念,掌握解题方法,强化应试技能。

本书以解题为主线,将“复习”与“解题”有机地融为一体,对高等数学、线性代数与概率统计这三门课程进行系统的归纳总结与分类讲解。在高等数学部分,对有关的重要概念和理论基本上都作了简要的概括。在线性代数与概率统计部分,考虑到现行的线性代数与概率统计教材版本较多,体系也不尽相同,我们参照考试大纲,在各章节阐述解题方法与技巧之前,对相应的基本概念与重要结论都给出了较为详尽的总结。

本书既突出一般方法的系统归纳,也注重介绍一些特殊技巧,并且十分强调理论与方法的综合运用,对于数学模型方法的应用也给予了一定程度的重视。所选例题和习题共计近3 000道,其中包含了1990年至2002年全国统一考试的部分试题,也包含了我校数学竞赛和研究生入学考试中由我本人命题的部分试题,重点突出,题型广泛,综合性强,不仅具有代表性和启发性,而且涵盖了全国硕士研究生入学统一考试中的各种典型问题。

本书的第19章第1节是原书的第13章,第2节“数学综合考研题选析”是此次修订时增写的内容,旨在引导读者在切实掌握数学基础知识的基础上,进一步强化思维意识,诱发解题谋略,揭示解题规律,迅速提高分析和解决综合问题的能力。

鉴于选择题具有形式新颖、题小量大、覆盖面宽、灵活性强等特点,以及全国硕士研究生入学统一考试一直将选择题作为一种命题形式,本书精选了300道单项选择题列于第20章,期望能对读者了解选择题,迅速而准确地解答各种选择题有所裨益。

本书最后还附有2001、2002年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及参考答案,读者可结合自己的实际情况利用这8套全真试题进行自我测试,以便于适时地调整复习进程。

本书不仅是广大考研读者的复习指导书,而且还可供各类高等学校的教师或学生讲授或学习《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》时阅读和参考。

限于编者的水平,本书中的错漏不当之处仍在所难免,恳请读者批评指正。

编著者

2002年2月于珞珈山

目 录

第 1 章 求极限的方法与技巧	1
§ 1—1 函数的极限	1
一、初等变换法	1
二、无穷小替换法	2
三、罗必达(L'Hospital)法则	4
四、利用泰勒(Taylor)公式	6
五、利用导数的定义	8
§ 1—2 数列的极限	9
一、利用海涅(Heine)定理	9
二、利用单调有界准则	9
三、利用两边夹准则	11
四、利用定积分的定义	12
五、利用积分中值定理	13
§ 1—3 几类典型问题	14
一、极限的存在性	14
二、无穷小的阶的比较	15
三、极限的局部逆问题	16
第 2 章 函数及其连续性	21
§ 2—1 函数的概念与基本性质	21
一、求函数的定义域	21
二、函数符号的运用	22
三、函数的基本特性	23
§ 2—2 函数的连续性	24
§ 2—3 函数的间断点及其类型	26
§ 2—4 闭区间上连续函数性质的应用	27
第 3 章 一元函数微分学	32
§ 3—1 导数与微分的计算方法	32
一、利用导数的定义求导数	32
二、利用导数的运算法则求导数	36
三、对数求导法	37
四、高阶导数的计算	38

五、微分的计算方法	40
§ 3—2 微分中值定理及其应用	42
§ 3—3 导数的应用	45
一、求曲线的切线与法线方程	46
二、讨论函数的单调性,求函数的极值	47
三、判定曲线的凹凸性,求曲线的拐点	49
四、描绘函数的图形	50
五、求曲线的曲率、曲率半径、曲率中心	51
六、确定函数的最大值与最小值	52
 第 4 章 一元函数积分学	 56
§ 4—1 不定积分法	56
一、直接积分法	56
二、凑微分法	56
三、换元积分法	57
四、分部积分法	60
五、部分分式法	62
§ 4—2 定积分的计算与典型问题的求解	65
一、计算定积分的基本方法	65
二、计算分段函数的定积分	66
三、计算定积分的若干技巧	67
四、定积分中的几类典型问题	69
§ 4—3 广义积分的计算方法	71
 第 5 章 微分方程	 76
§ 5—1 一阶微分方程的解法	76
一、可分离变量方程的解法	76
二、齐次方程的解法	77
三、一阶线性微分方程的解法	78
四、全微分方程的解法	80
§ 5—2 高阶微分方程的解法	83
一、几种可降阶的高阶微分方程的解法	83
二、高阶线性微分方程解的结构及其应用	84
三、高阶常系数线性齐次微分方程的解法	85
四、高阶常系数线性非齐次微分方程的解法	86
五、欧拉(Euler)方程的解法	88
六、线性微分方程组的解法	89
§ 5—3 微分方程的应用	89
一、利用微分方程求解函数方程	89

二、利用微分方程求解几何问题	91
三、利用微分方程求解物理问题	92
第 6 章 两类典型问题的论证方法	97
§ 6—1 不等式	97
一、利用微分法证明不等式	97
二、利用积分法证明不等式	101
三、利用幂级数证明不等式	104
§ 6—2 介值存在性问题的论证方法	107
一、确定函数的零点(方程的根)	107
二、几何问题	108
三、双介值问题	109
四、区间变换问题	111
五、含有介值的不等式	111
§ 6—3 构造辅助函数的三种方法	113
一、参数变易法	113
二、不定积分法	114
三、微分方程法	116
第 7 章 向量代数与空间解析几何	121
§ 7—1 向量代数	121
一、向量的基本运算	121
二、证明恒等式或简化算式	122
三、利用向量方法求解几何问题	123
§ 7—2 空间直线与平面	124
一、基本方法	124
二、待定参数法	124
三、平面束法	126
四、向量投影法	126
五、辅助平面法	127
§ 7—3 曲面与方程	128
一、典型二次曲面	128
二、一般旋转曲面	129
第 8 章 多元函数微分学	132
§ 8—1 二元函数的极限	132
一、讨论二重极限的存在性	132
二、求二重极限的方法	133
§ 8—2 多元函数微分法	134

一、讨论二元函数的连续性、可导性与可微性的关系	134
二、求复合函数的偏导数的方法	135
三、求隐函数的偏导数的方法	137
四、求高阶偏导数的方法	140
五、求方向导数的方法	142
§ 8—3 多元函数微分法的应用	143
一、求曲面的切平面方程与法线方程	143
二、求空间曲线的切线方程与法平面方程	144
三、求二元函数极值的方法	145
四、求二元函数在有界闭区域上的最大值与最小值的方法	147
五、多元函数条件极值的应用	147
第 9 章 重积分的计算方法	151
§ 9—1 二重积分的基本计算方法	151
一、利用直角坐标计算二重积分	151
二、利用极坐标计算二重积分	152
§ 9—2 三重积分的基本计算方法	153
一、利用直角坐标计算三重积分	153
二、利用柱面坐标计算三重积分	154
三、利用球面坐标计算三重积分	155
§ 9—3 计算重积分的几种典型技巧	156
一、利用“先二后一法”计算三重积分	156
二、利用重积分的对称性简化计算	157
三、重积分的积分区域的剖分	161
§ 9—4 逐次积分的计算方法	163
一、主观型交换积分次序	163
二、客观型交换积分次序	164
三、应用型交换积分次序	165
第 10 章 曲线积分与曲面积分	170
§ 10—1 第一类曲线积分与第一类曲面积分	170
一、第一类曲线积分的基本计算方法	170
二、第一类曲面积分的基本计算方法	171
三、曲线积分与曲面积分的对称性	172
§ 10—2 第二类曲线积分	173
一、利用基本公式化为定积分计算	174
二、利用格林(Green)公式计算	175
三、利用选择适当路径法计算	176
四、曲线积分中的不等式	178

§ 10—3 第二类曲面积分	179
一、基本计算方法	179
二、利用高斯(Gauss)公式计算	180
三、类型转换法	182
四、投影转换法	183
§ 10—4 空间曲线上的第二类曲线积分的计算	184
一、基本计算方法	185
二、利用斯托克斯(Stokes)公式	186
三、利用积分曲线投影法	187
§ 10—5 梯度、散度与旋度	188
一、梯度(gradient)	188
二、散度(divergence)	188
三、旋度(rotation)	189
 第 11 章 积分学中的各种应用问题	193
§ 11—1 积分学在几何中的应用	193
一、求平面图形的面积	193
二、求空间区域的体积	196
三、求曲线的弧长	199
四、求曲面的面积	201
§ 11—2 积分学在物理中的应用	203
一、求物体的质量与重心	203
二、求变力所做的功	204
三、求转动惯量	205
四、利用元素法求引力	206
 第 12 章 无穷级数	209
§ 12—1 常数项级数的审敛法	209
一、利用级数的基本性质判定级数的敛散性	210
二、正项级数的审敛法	211
三、一般数项级数的审敛法	214
§ 12—2 幂级数	219
一、求幂级数的收敛域	220
二、求幂级数的和函数	222
三、求函数的幂级数展开式	224
§ 12—3 傅立叶(Fourier)级数	225
一、傅立叶级数的收敛定理及其应用	226
二、将周期为 $2l$ 的函数展成傅立叶级数的方法	226
三、将函数在 $[-l, l]$ 上展成傅立叶级数的方法	227

四、将函数在 $[0, l]$ 上展成正弦级数或余弦级数的方法	228
§ 12—4 求常数项级数之和	228
一、利用级数收敛的定义求常数项级数的和	228
二、利用幂级数求常数项级数的和	229
三、利用傅立叶级数求常数项级数的和	230
第 13 章 行列式与矩阵运算	234
§ 13—1 行列式的计算	234
一、基本概念与重要结论	234
二、利用降阶法计算行列式	235
三、利用化三角法计算行列式	237
四、计算行列式的其他方法	238
§ 13—2 矩阵运算	240
一、基本概念与重要结论	240
二、矩阵的运算	244
三、分块矩阵的运算	251
四、矩阵的秩	253
第 14 章 n 维向量空间与线性方程组	259
§ 14—1 向量组的线性相关性	259
一、基本概念与重要结论	259
二、向量的运算	261
三、判定向量组线性相关性的方法	261
四、极大无关组与向量组的秩	265
§ 14—2 n 维向量空间	267
一、基本概念与重要结论	267
二、求向量在基下的坐标的方法	269
三、过渡矩阵与坐标变换	270
四、正交向量组与正交矩阵	270
§ 14—3 线性方程组	273
一、基本概念与重要结论	273
二、利用克莱姆法则求解线性方程组	275
三、利用初等行变换求解线性方程组	276
四、将一个向量用一向量组线性表示的方法	279
五、线性方程组的若干应用问题	280
第 15 章 相似矩阵与二次型	287
§ 15—1 矩阵的特征值和特征向量	287
一、基本概念与重要结论	287

二、 矩阵的特征值与特征向量	288
三、 矩阵的相似对角化	292
§ 15—2 二次型	296
一、 基本概念与重要结论	296
二、 二次型及其矩阵表示	299
三、 二次型的标准形	300
四、 正定二次型与正定矩阵	304
第 16 章 随机事件和概率	310
§ 16—1 随机事件及其概率	310
一、 基本概念与重要结论	310
二、 利用基本性质计算概率	312
三、 利用古典定义与几何定义计算概率	313
§ 16—2 乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式	314
一、 基本概念与重要结论	314
二、 利用条件概率与乘法公式计算概率	316
三、 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率	317
四、 利用事件的独立性计算概率	319
五、 利用二项概率公式计算概率	320
第 17 章 随机变量的概率分布和数字特征	323
§ 17—1 随机变量及其概率分布	323
一、 基本概念与重要结论	323
二、 求随机变量的分布律与分布函数	329
三、 利用概率分布求事件的概率	329
四、 求联合分布、边缘分布与条件分布	332
五、 求随机变量函数的概率分布	335
§ 17—2 随机变量的数字特征与极限定理	337
一、 基本概念与重要结论	337
二、 利用性质求随机变量的期望、方差及相关系数	339
三、 利用分布求随机变量的期望、方差及相关系数	340
四、 求随机变量函数的数学期望与方差	345
第 18 章 数理统计初步	353
§ 18—1 随机样本与抽样分布	353
一、 基本概念与重要结论	353
二、 抽样分布的典型问题	355
§ 18—2 参数估计与假设检验	356
一、 基本概念与重要结论	356

二、估计量的评选标准	360
三、参数估计	362
四、假设检验	365
第 19 章 数学解题策略与综合题选析	370
§ 19—1 高等数学解题策略	370
一、适时利用初等变换技巧	370
二、注重借助几何直观性	373
三、充分挖掘隐含条件	377
四、灵活运用反证法	378
五、善于捕捉辅助信息	380
§ 19—2 数学综合考研题选析	383
第 20 章 选择题集萃	392
附录	427
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及其解答	427
数学(一)试题	427
数学(一)参考解答	430
数学(二)试题	434
数学(二)参考解答	436
数学(三)试题	441
数学(三)参考解答	444
数学(四)试题	449
数学(四)参考解答	451
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及其解答	455
数学(一)试题	455
数学(一)参考解答	458
数学(二)试题	464
数学(二)参考解答	466
数学(三)试题	473
数学(三)参考解答	475
数学(四)试题	482
数学(四)参考解答	484
习题答案与提示	489

第 1 章

求极限的方法与技巧

在高等数学中,无论是极限理论还是极限方法都占有十分重要的地位.一方面,连续、导数、积分和级数收敛等概念的建立都以极限为基础;另一方面,极限作为一种工具,它的计算几乎贯穿高等数学的全部内容.因此,怎样求极限是一个既重要而又基本的问题,除了要能灵活运用极限四则运算法则、极限与无穷小的关系、无穷小的性质以及初等函数的连续性之外,还必须掌握一些方法与技巧.

本章重点讨论如何确定不定式的值以及计算用各种形式给出的数列的极限.

§1—1 函数的极限

函数的极限,根据自变量的变化趋势可以分为6种不同的情形:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); & (2) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); & (3) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); & (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \end{array}$$

其中(1),(4)两种形式是基本的.

如果根据函数值的变化情形来分类,那么函数的极限又可以分为不定式与非不定式两种类型.不定式一共有7种类型: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$. 由于求非不定式的极限远比确定不定式极限的值要简单得多,因此,我们只讨论求不定式极限的方法与技巧.

一、初等变换法

初等变换法是用于求不定式极限的一种基本方法,是通过使用代数或三角函数恒等变形,以及变量代换等技巧,或者消除产生“不定”的因素,将原不定式转化为非不定式的极限来计算;或者将所求极限转化为可以利用基本极限(如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 等)来计算.

【例1】 求 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$.

解 这是“ $\infty - \infty$ ”型的不定式. 首先提取公因子 $\sqrt{x}$, 并令 $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 化为“ $\frac{0}{0}$ ”型的不定式. 然后将分子有理化, 即可消除“不定”的因素. 即

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+t} - 1)(\sqrt{1+t} + 1)}{t(\sqrt{1+t} + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+t} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 2】求 $I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

解 这是“ 1^∞ ”型的不定式, 可利用基本极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 来计算. 因为 $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x - 1) \tan 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{2 \tan x}{1 + \tan x} \right) = -1.$$

于是 $I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \{ [1 + (\tan x - 1)]^{\frac{1}{\tan x - 1}} \}^{(\tan x - 1) \tan 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

【例 3】求 $I = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$.

解 这是“ $0 \cdot \infty$ ”型的不定式. 作变量代换: $y = 1 - x$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $y \rightarrow 0$. 故

$$I = \lim_{y \rightarrow 0} y \cot \frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} \cos \frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

【例 4】求 $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

解 这是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的不定式. 将分子、分母同时除以 $-x$, 有

$$I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} \cdot \sin x}} = 1.$$

【注】这里, 由于自变量的变化过程是 $x \rightarrow -\infty$, 以及根式的特征, 故将分子、分母同时除以 $-x$ 而不是 x . 此外, 还运用了“无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小”的结论.

初等变换法也能用于求某些非不定式的极限, 如:

【例 5】求 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

解 这是非不定式. 注意到函数的特征, 可考虑利用三角函数恒等式:

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0$, 又由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小, 所以

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0.$$

二、无穷小替换法

法则 设 α, β 与 α', β' 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 而 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 与 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 也是在这个变化过程中的极限. 如果 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

这个法则告诉我们,如果在计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha}$ 较困难时,可以设法寻求分别与 α, β 等价的无穷小 α', β' 来替换 α, β , 把 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha}$ 的计算转化为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta'}{\alpha'}$ 的计算.

【例6】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\ln(1 + x) \sim x$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

无穷小替换法如果运用恰当,能大大简化不定式极限的计算.为了能得心应手地利用无穷小替换法求极限,掌握一些常用的等价无穷小是必要的.

常用的等价无穷小(当 $x \rightarrow 0$ 时)有:

- (1) $\sin x \sim x$; (2) $\arcsin x \sim x$; (3) $\tan x \sim x$;
 (4) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; (5) $\arctan x \sim x$; (6) $\ln(1 + x) \sim x$;
 (7) $e^x - 1 \sim x$; (8) $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0$);
 (9) $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ (α 为任意实数).

【例7】求 $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{3x-2} - x) \sin 2(x-1)}{(x-1)^3}$.

解 因为当 $x \rightarrow 1$ 时,

$$\begin{aligned} x^{3x-2} - x &= x[e^{3(x-1)\ln x} - 1] \sim x[3(x-1)\ln x] \\ &= 3x(x-1)\ln[1 + (x-1)] \sim 3x(x-1)^2, \end{aligned}$$

以及 $\sin 2(x-1) \sim 2(x-1)$, 所以

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x(x-1)^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} 6x = 6.$$

在利用无穷小替换法时,还应考虑综合利用其他方法,如:初等变换法、罗必达法则等.

【例8】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x \sin 2x)}{e^{x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}$.

解
$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1) + x \sin 2x]}{e^{x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) + x \sin 2x}{e^{x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{x^2} + 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - 1}{-x^2}} = \frac{-\frac{1}{2} + 2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

值得注意的是,如果所求极限中分子(或者分母)是代数和的形式,那么在做部分替换时,应考虑替换前后分子(或者分母)在整体上的等价性.这是因为:尽管 $\alpha \sim \alpha'$ 且 $\beta \sim \beta'$, 但是 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha' + \beta'$ 却未必等价.

【例9】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

【分析】对于初学者来说,容易错误地用与 $\tan x$ 和 $\sin x$ 都等价的无穷小 x 来替换,从而得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0.$$

导致错误结果的原因在于:当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 $x - x = 0$ 不等价. 正确的解法为:

解
$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

三、罗必达(L'Hospital)法则

罗必达法则 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小(或无穷大);
- (2) 在点 a 的某个去心邻域内, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大),

那么 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

对于函数的其他 5 种类型的极限, 也有类似的法则, 此处不一一列举.

罗必达法则是求不定式极限的一种比较有效的方法, 实践中应注意以下 4 方面的问题.

1. 对于不定式的 7 种类型: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$, 前两类属基本型, 可以直接利用罗必达法则; 后 5 类需首先化为基本型之后, 再利用罗必达法则.

【例 10】求 $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$

解 这是“ $\infty - \infty$ ”型的不定式. 先通分, 化为“ $\frac{0}{0}$ ”型的不定式, 再利用罗必达法则. 即

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 11】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

解 这是“ 1^∞ ”型的不定式, 可用取对数的方法转化为基本型之后再利用罗必达法则.

因为 $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x}},$ 而

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x} = e^{I_1} = e^{-\frac{1}{3}}.$

2. 在运用罗必达法则之前, 往往需要采用适当的方式(如: 变量代换、无穷小替换、拆项等)简化不定式.

【例 12】求 $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - \sqrt[3]{x})}{x - 1}$.

解 作变量代换: $u = 1 - \sqrt[3]{x}$, 则 $x = (1 - u)^3$, 且当 $x \rightarrow 1$ 时, $u \rightarrow 0$. 于是

$$I = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{(1 - u)^3 - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + u}}{3(1 - u)^2(-1)} = -\frac{1}{3}.$$

【例 13】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0)$.

解 如果直接运用罗必达法则计算, 将会遇到较为复杂的导数运算. 这里先利用等价无穷小 $e^u - 1 \sim u \quad (u \rightarrow 0)$ 替换之后, 再利用罗必达法则(其中 $u = (x - \sin x) \ln a$).

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} (a^{x - \sin x} - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x - \sin x) \ln a} - 1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \ln a}{x^3} = \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{\ln a}{6}. \end{aligned}$$

【例 14】求 $I = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1 - x) + \tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x}$.

【分析】这是较为复杂的不定式. 若要辨别它属于哪一种类型的不定式, 则必须首先证明分子的极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln(1 - x) + \tan \frac{\pi}{2} x \right) = \infty$, 即先确定一个“ $\infty - \infty$ ”型的不定式的值. 但这并非易事! 因此, 我们考虑将原式拆成两项, 分别对每一项求极限.

解 拆项得 $I = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1 - x)}{\cot \pi x} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x} \triangleq I_1 + I_2$. 现在对每一项利用罗必达法则,

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi \csc^2 \pi x} = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^2 \pi x}{1-x} = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{-1} = 0,$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\cos \pi x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{\cos \frac{\pi}{2} x} = (-1) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \cos \pi x}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = -2.$$

因此, 所求极限为 $I = I_1 + I_2 = 0 + (-2) = -2$.

3. 在运用罗必达法则之后, 应尽可能地分离出那些极限容易确定且极限不等于零的因子部分, 以便于再次利用罗必达法则或者使用其他方法.

【例 15】求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

解 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}{\frac{1}{1+x^2} - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x - (1+x^2)}$